

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”
Corso di Laurea Magistrale in Astronomia

Modelli di galassia con buco nero centrale e
materia oscura.
Stima del raggio di influenza

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Alberto Franceschini

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Ciotti 

Candidata:
Azadeh Ziaeelorzad

II Sessione
Anno Accademico 2015-2016

Indice

1	Introduzione	3
2	Modelli sferici I: power-laws a due componenti	9
2.1	Il modello	10
2.1.1	Contributo della componente stellare	11
2.1.2	Contributo della materia oscura	11
2.1.3	Il contributo del buco nero e il raggio della sfera di influenza	12
2.2	Parametrizzazione	14
2.3	Profilo di dispersione di velocità proiettata	17
2.4	Dispersione di velocità di apertura	23
2.5	Anisotropia radiale	23
2.5.1	I tre contributi	24
2.5.2	Sfera di influenza nel caso anisotropo	24
2.5.3	Proiezione della dispersione di velocità stellare nel caso anisotropo	25
3	Modelli assisimmetrici I: power-laws a due componenti	30
3.1	Modelli assisimmetrici	31
3.2	Il modello	33
3.3	Parametrizzazione	34
3.4	Soluzione delle equazioni di Jeans per espansione omeoidale .	35
3.5	Il raggio della sfera di influenza	36
3.6	Soluzione esatta del modello ellissoidale ad una componente con buco nero centrale	39
4	Modelli sferici II: modelli di Jaffe a due componenti	43
4.1	I modelli	44
4.1.1	Modello a due componenti	46
4.1.2	Il buco nero centrale	47
4.2	Le equazioni di Jeans	47

4.2.1	La parte isotropa	47
4.2.2	La parte anisotropa	48
4.3	Positività e monotonicità dell’alone	49
4.3.1	Positività dell’alone	49
4.3.2	Monotonicità dell’alone	50
4.4	La sfera di influenza spaziale	51
4.5	Energetica e teorema viriale	52
5	Modelli assisimmetrici II: modelli di Jaffe a due componenti	57
5.1	I modelli	59
5.2	Positività e monotonicità dell’alone di materia oscura	59
5.2.1	Positività dell’alone	59
5.2.2	Espansione omeoidale	63
5.2.3	Teorema viriale	64
5.3	Le equazioni di Jeans	66
6	Discussione e Conclusioni	67
A	Le equazioni di Jeans	71
A.1	Funzione di distribuzione	71
A.2	Le equazioni di Jeans	74
A.3	Anisotropia Radiale	76
B	Espansione omeoidale	79
B.1	Il metodo	79
B.1.1	Espansione a massa totale finita	80
B.2	Verifica diretta di equazione 3.52	81
C	Dinamica proiettata	85
C.1	Dinamica proiettata dei sistemi assisimmetrici	87
References		92

Capitolo 1

Introduzione

I buchi neri supermassicci (Super Massive Black Holes - SMBHs), che si trovano al centro di galassie ellittiche, sono attualmente oggetto di intenso studio astrofisico, sia osservativo che teorico, per i molteplici effetti che la loro formazione ed evoluzione hanno sulla struttura della galassia ospite. Uno dei più significativi (e non completamente compresi) fatti empirici concernenti i SMBHs è la sorprendente correlazione tra la loro massa (M_{BH}) e quella della galassia ospite (M_*), con $M_{BH} \simeq 10^{-3} M_*$ (nota come relazione di Magorrian [1]). Altrettanto importante è la cosiddetta relazione $M_{BH} - \sigma$ (Gebhardt et al. 2000 [2]; Ferrarese & Merritt 2000 [3]), una legge empirica che collega M_{BH} con la dispersione di velocità media σ delle stelle nelle galassie (la stessa σ usata nella Legge di Faber-Jackson [4] e nel Piano Fondamentale (Djorgovski & Davis 1987 [5]; Dressler et al. 1987 [6])).

Tali correlazioni sono universalmente riconosciute come manifestazioni del problema della “coevolution” di SMBHs e galassie, con importantissime implicazioni per la fisica dei nuclei galattici attivi (Active Galactic Nuclei - AGN) e soprattutto per la cosmologia: l’attività AGN, tramite l’effetto del feedback è ritenuta responsabile per la costituzione della funzione di massa stellare delle galassie e la sua forte differenziazione rispetto a quella della materia oscura.

In aggiunta tali correlazioni impongono severe restrizioni al modello di merging gerarchico per la formazione di galassie ellittiche e sono strettamente collegate alla fisica delle onde gravitazionali, emesse durante la fusione di SMBHs binari al centro di alcune galassie. Un importante e ancora irrisolto problema è infine quello posto dall’esistenza e dalla possibile detezione di Intermediate Mass BHs (IMBHs) al centro di ammassi globulari.

È quindi ovvio come sia sempre più importante poter misurare con grande precisione M_{BH} , attraverso diagnostiche robuste e ben calibrate. Tra i vari metodi, quello forse più usato è basato sulla misura della dispersione di velocità delle stelle (σ_{obs}) nelle vicinanze dei SMBHs, poiché il campo di

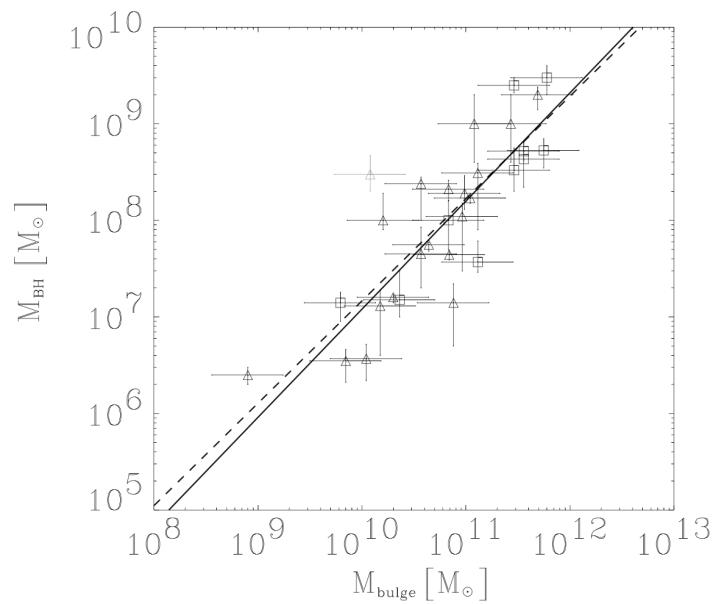


Figura 1.1: Plot della massa dei SMBH in funzione della massa del bulge per 30 galassie campione. Sono stati fatti due fit per i dati mostrati. La linea continua rappresenta il fit con una pendenza di 1.12 ± 0.06 ottenuto da Häring & Rix (2004)[7]. La linea tratteggiata rappresenta invece il fit precedente, di Marconi & Hunt (2003)[8], che ha una pendenza di 1.06 ± 0.09 . La figura proviene dal paper di Häring & Rix.

gravità del SMBH altera significativamente la dispersione di velocità dentro il cosiddetto “raggio di influenza”. In molti lavori correnti (in generale svolti sotto le ipotesi di simmetria sferica e di isotropia del tensore di dispersione della velocità) si tenta di determinare il valore di M_{BH} tramite misure di σ_{obs} . Ma le osservazioni sono oramai così raffinate che è necessario passare ad un livello più avanzato di realismo nella modellizzazione dinamica.

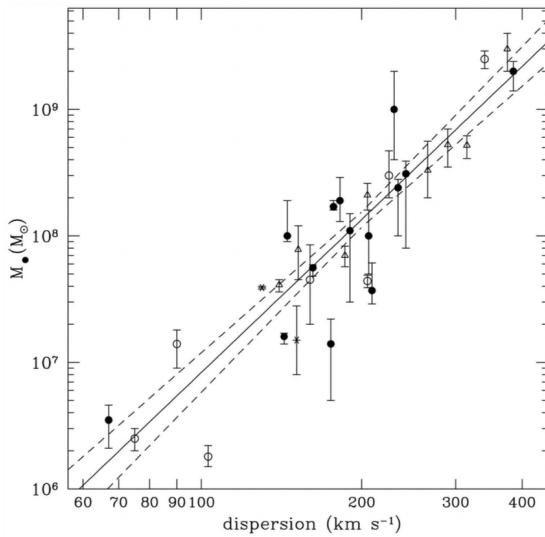


Figura 1.2: Plot della relazione $M_{BH} - \sigma$ come proposti dal gruppo dei “Nukers” (Tremaine et al. 2002). La linea di best-fit è rappresentata dalla linea continua, mentre le linee tratteggiate rappresentano i limiti ad un σ sulla correlazione di best-fit. Le masse dei BH misurate tramite dinamica stellare sono rappresentate con cerchi vuoti, quelle ottenute dalla cinematica del gas sono triangoli, quelle misurate tramite cinematica maser sono distinte dal simbolo asterisco ed infine le misure di Nuker sono riportate come cerchi pieni.

In questa Tesi ci proponiamo di investigare gli effetti sistematici sull’andamento radiale del profilo di dispersione di velocità stellare nelle regioni centrali della galassia ospite dovuti non soltanto ad M_{BH} ma anche alle più importanti proprietà strutturali e dinamiche della galassia stessa. Una comprensione e quantificazione di tali effetti porta inevitabilmente anche ad una migliore definizione del “raggio di influenza”, e quindi ad avere strumenti teorici che permettono stime più robuste ed affidabili di M_{BH} che non la modellistica comunemente usata. In particolare, tra le possibili cause di una modifica del profilo di σ_{obs} (e quindi di erronea determinazione di M_{BH}), in questa Tesi consideriamo gli effetti sistematici prodotti dal profilo radiale e dalla forma (ellitticità) del profilo di densità stellare nelle regioni centrali

della galassia ospite, dalla quantità e distribuzione di materia oscura, dalla eventuale presenza di anisotropia del tensore di dispersione di velocità e dalla rotazione ordinata delle stelle, ed infine (anche se in maniera qualitativa) degli effetti della Point Spread Function, costruendo i profili di dispersione di velocità entro una certa apertura.

Sfortunatamente, un numero non piccolo di lavori è basato su una definizione molto qualitativa del concetto di “raggio di influenza” definito in maniera vaga come la distanza dal buco nero entro la quale il campo di gravità del buco nero stesso altera significativamente le orbite stellari. Ora, risulta chiaro che una tale definizione è altamente insoddisfacente. Intanto perchè l’osservatore non ha a disposizione una copia della galassia identica a quella osservata (ma senza il buco nero centrale) con la quale potesse confrontare. Secondo, perchè l’effetto del campo di gravità del buco nero aumenta in maniera continua avvicinandosi al centro della galassia per cui non è chiaro a che punto l’influenza del buco nero diventi “predominante”. Terzo, perchè altri effetti (geometrici e dinamici) influenzano la dispersione di velocità stellare, e, se non opportunamente quantificati possono essere enormemente attribuiti all’effetto del buco nero, con conseguenti errori sulla stima della massa del buco nero.

È pertanto fondamentale, ed è anche il primo risultato di questo lavoro di tesi, introdurre una definizione quantitativa e rigorosa di “raggio di influenza”. Rimandando i dettagli tecnici ai vari capitoli, qui ricordiamo che le equazioni di Jeans (e la loro proiezione) sono lineari nei vari campi di gravità presenti (stelle, materia oscura, buco nero centrale). Pertanto, dato un modello di galassia a tre componenti, arbitrariamente complicato (per quanto riguarda la forma geometrica, la distribuzione orbitale delle stelle, etc, etc) come vedremo il profilo di dispersione delle velocità stellari, σ_{**}^2 , può sempre, in linea di principio, scriversi come

$$\sigma_*^2 = \sigma_{**}^2 + \sigma_{*DM}^2 + \sigma_{*BH}^2.$$

Si noti che σ_{**}^2 (il contributo del campo di gravità di stelle) e σ_{*DM}^2 (il contributo dell’alone di materia oscura) sono *indipendenti* dalla presenza del buco nero centrale, ovvero rappresentano *esattamente* ciò che la definizione qualitativa di raggio di influenza avrebbe necessitato di conoscere per poter essere applicata. A questo punto è naturale introdurre, per ogni modello di galassia, la quantità

$$\Delta\sigma_* \equiv \frac{\sigma_{**}^2 + \sigma_{*DM}^2 + \sigma_{*BH}^2 - (\sigma_{**}^2 + \sigma_{*DM}^2)}{\sigma_{**}^2 + \sigma_{*DM}^2} = \frac{\sigma_{*BH}^2}{\sigma_{**}^2 + \sigma_{*DM}^2}. \quad (1.1)$$

Assegnato adesso un valore di riferimento per $\Delta\sigma_*$ (ad esempio 20%, 50%, 100%) con l’aiuto dei modelli saranno presentati nei prossimi capitoli studieremo come la posizione del punto al quale $\Delta\sigma_*$ raggiunge il valore prescritto dipende dalle proprietà strutturali e dinamiche della galassia stessa.

Il lavoro di Tesi si articola in vari capitoli caratterizzati da un grado sempre maggiore di realismo. I vari effetti sono introdotti successivamente, in maniera tale da poter quantificare l'impatto di ogni singolo aspetto di volta in volta preso in considerazione. Così, nel Capitolo 2 si studia la soluzione (spaziale e proiettata) delle equazioni di Jeans per una famiglia di modelli di galassia sferica con buco nero centrale, nei quali sia le stelle che la materia oscura sono distribuite come due leggi di potenza che possono essere modificate a piacimento, e nei quali si può regolare l'ammontare di anisotropia radiale usando la parametrizzazione di Osipkov-Merritt [9]. Nel Capitolo 3, i modelli precedenti sono generalizzati al caso ellissoidale e le equazioni di Jeans, che adesso ammettono anche rotazione ordinata, sono risolte in approssimazione di espansione omeoidale, una tecnica molto flessibile che permette di ottenere risultati quantitativamente corretti senza dover ricorrere a complicate integrazioni numeriche. Nel Capitolo 4 sono nuovamente considerati modelli di galassia sferici anisotropi a due componenti, e buco nero centrale, dove la parte stellare è descritta dalla distribuzione di Jaffe e l'alone di materia oscura è tale che il profilo di densità totale è a sua volta una legge di Jaffe (con raggio di scala diverso). Tali modelli rappresentano una generalizzazione di modelli descritti in letteratura (Ciotti, de Zeeuw 2009 [10]) e hanno potenziali applicazioni anche per la realizzazione di modelli numerici di fluidodinamica. Infine, nel Capitolo 5 passiamo a studiare la classe di modelli più complicata, ovvero la generalizzazione *con schiacciamento* dei modelli a due componenti di Jaffe con buco nero centrale.

Due articoli con risultati principali di questa Tesi sono in corso di scrittura.

Concludendo, sottolineiamo una possibile applicazione dei risultati e delle tecniche presentate in questa Tesi al caso degli IMBHs. Se tali ipotetici IMBH seguissero la relazione di Magorrian, è noto che gli effetti sul profilo di dispersione di velocità degli ammassi globulari sono più difficili da mettere in evidenza che nel caso delle galassie. Pertanto, l'analisi svolta nella Tesi, specialmente per quanto riguarda gli studi sugli effetti di rotazione e anisotropia, può avere ricadute per gli studi della dinamica stellare degli ammassi globulari.

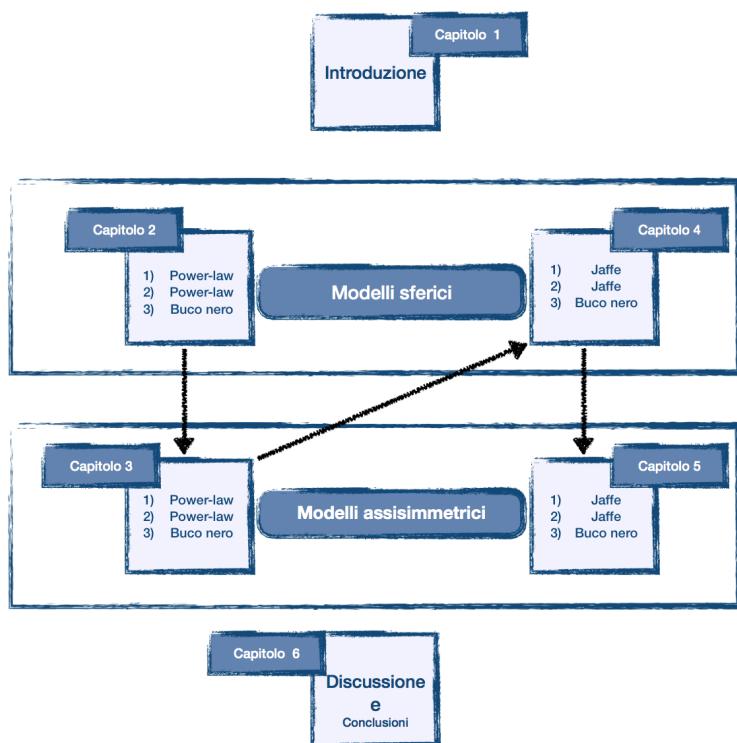


Figura 1.3: Struttura della tesi. Le frecce indicano il percorso verso modelli sempre più realistici, mentre i rettangoli grandi racchiudono modelli di stessa geometria.

Capitolo 2

Modelli sferici I: power-laws a due componenti

In questo primo Capitolo introduciamo il problema costruendo una famiglia molto semplice (ma sufficientemente realistica) di galassie a simmetria sferica con alone di materia oscura e buco nero centrale. I modelli tengono anche conto di anisotropia radiale nel tensore di dispersione della velocità stellare. Per questa famiglia di modelli si risolvono le equazioni di Jeans e si proiettano i profili di dispersione di velocità, considerando anche la quantità “osservativa” nota come “aperture velocity dispersion”. Confrontando i profili con e senza l’effetto del buco nero centrale, si stima il valore del raggio di influenza in funzione del profilo di densità stellare, dalla materia oscura e dall’ammontare dell’anisotropia.

2.1 Il modello

Consideriamo un semplice modello di galassia a 2 componenti (stelle e alone di materia oscura) con buco nero centrale. Il profilo di densità stellare è descritto da una legge di potenza

$$\rho_* = \frac{A_*}{r^\alpha}, \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha < 3. \quad (2.1)$$

L'intervallo di valori per l'esponente α è scelto in maniera da comprendere il caso corrispondente a una galassia con 'core piatto' ($\alpha=0$) fino a un profilo molto ripido ($\alpha \sim 3$). Il caso $\alpha \geq 3$ è escluso per la divergenza della massa centrale, mentre valori negativi di α sono esclusi in quanto corrispondono ad una densità crescente con r . Per il momento il parametro A_* (che ha le dimensioni di $[A_*] = ML^{\alpha-3}$) è lasciato generico.

Analogamente per il profilo dell'alone di materia oscura assumiamo

$$\rho_{DM} = \frac{A_{DM}}{r^\beta}, \quad \text{con} \quad 0 \leq \beta < 3. \quad (2.2)$$

Per l'esponente β valgono le stesse limitazioni di α , che sono mostrate dal range di valori in ascissa e ordinata dei vari pannelli in Figura 2.1. Come risulterà chiaro successivamente, le considerazioni di ulteriori proprietà dinamiche porteranno a ridurre ulteriormente la zona accettabile nel piano (α, β) .

Limitandoci momentaneamente al caso isotropo [9], l'equazione di Jeans per il profilo di dispersione di velocità della componente stellare, diventa (vedi equazione A.31 con il parametro di anisotropia $\beta(r) = 0$)

$$\frac{d(\rho_* \sigma_*^2)}{dr} = -\rho_* \frac{d\Phi_T}{dr}, \quad (2.3)$$

dove $\Phi_T(r) = \Phi_*(r) + \Phi_{DM}(r) + \Phi_{BH}(r)$.

Dalla linearità dell'equazione di Jeans rispetto al potenziale risulta:

$$\sigma_*^2 = \sigma_{**}^2 + \sigma_{*DM}^2 + \sigma_{*BH}^2, \quad (2.4)$$

dove il significato della scomposizione è evidente¹.

L'equazione 2.3 viene integrata richiedendo che il termine di pressione $\rho_* \sigma_*^2$ si annulli all'infinito, come naturale in ogni sistema gravitazionale. In tal caso si ottiene

$$\rho_* \sigma_*^2 = \int_r^\infty \frac{d\Phi_T}{dr'} \rho_* dr'. \quad (2.5)$$

Grazie all'ipotesi di simmetria sferica, il teorema di Newton permette di valutare i termini che compaiono nell'integrando in maniera molto semplice, come

¹Si noti che, dalla nostra scelta della forma funzionale di ρ_* e ρ_{DM} , una volta ottenuta la soluzione per σ_*^2 è disponibile anche la soluzione per σ_{*DM}^2 ottenuta sostituendo A_* con A_{DM} e α con β .

$$\frac{d\Phi_*}{dr} = \frac{GM_*(r)}{r^2}, \quad \frac{d\Phi_{DM}}{dr} = \frac{GM_{DM}(r)}{r^2}, \quad \frac{d\Phi_{BH}}{dr} = \frac{GM_{BH}}{r^2}, \quad (2.6)$$

dove ovviamente,

$$M_*(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho_*(r') dr', \quad M_{DM}(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho_{DM}(r') dr', \quad (2.7)$$

sono la massa cumulativa contenuta all'interno della sfera di raggio r , per la distribuzione di stelle e di materia oscura, rispettivamente. Più in generale la massa totale contenuta all'interno di sfera di raggio r è data da

$$M_T(r) = M_*(r) + M_{DM}(r) + M_{BH}. \quad (2.8)$$

Passiamo adesso ad integrare i tre contributi nell'equazione 2.5.

2.1.1 Contributo della componente stellare

Per la distribuzione stellare, dall'equazione 2.7 otteniamo

$$M_*(r) = \frac{4\pi A_*}{3-\alpha} r^{3-\alpha}. \quad (2.9)$$

L'integrazione della parte corrispondente nell'equazione di Jeans 2.3 è immediata e si ottiene

$$\sigma_{**}^2 = \frac{2\pi G A_*}{(3-\alpha)(\alpha-1)} r^{2-\alpha}. \quad (2.10)$$

Si noti che per la convergenza dell'integrale 2.5 all'infinito è necessario limitarsi a valori di $\alpha > 1$. Questa limitazione è mostrata in Figura 2.1 con la linea verticale (pannello in alto a sinistra). Si noti inoltre che in sistemi realistici non solo il termine di pressione tende a zero per $r \rightarrow \infty$, ma anche la dispersione di velocità non aumenta indefinitamente con l'aumento di r : pertanto la soluzione 2.10 impone una successiva limitazione per il valore di α , con $\alpha > 2$. Anche questa limitazione è mostrata in Figura 2.1 (pannello in alto a destra).

2.1.2 Contributo della materia oscura

Consideriamo adesso il contributo dell'alone di materia oscura alla dispersione di velocità stellare, σ_{*DM} . Dall'equazione 2.7 abbiamo

$$M_{DM}(r) = \frac{4\pi A_{DM}}{3-\beta} r^{3-\beta}. \quad (2.11)$$

Dall'integrazione dell'equazione 2.3, e ripetendo gli argomenti sul comportamento per $r \rightarrow \infty$, si ha che per la convergenza è necessario che $\beta > 2 - \alpha$, e in tal caso si ottiene

$$\sigma_{*DM}^2 = \frac{4\pi G A_{DM}}{(3 - \beta)(\alpha + \beta - 2)} r^{2-\beta}, \quad \beta > 2 - \alpha. \quad (2.12)$$

La limitazione $\beta > 2 - \alpha$ è mostrata in Figura 2.1 (pannello in basso a sinistra) dalla regione triangolare. Come si vede tale limite non esclude in aggiunta a quanto fatto dalla σ_{**} . Inoltre chiedendo che σ_{*DM} non aumenti con il raggio si ha che $\beta \geq 2$. Questa ulteriore limitazione è mostrata nell'ultimo pannello in Figura 2.1 (destra in basso).

2.1.3 Il contributo del buco nero e il raggio della sfera di influenza

La determinazione del contributo del buco nero alla dispersione di velocità stellare è molto semplice e non impone condizioni aggiuntive. L'integrazione dell'equazione 2.5 è infatti immediata e si ottiene

$$\sigma_{*BH}^2 = \frac{GM_{BH}}{(1 + \alpha)r}. \quad (2.13)$$

Pertanto, nel caso isotropo i valori accettabili di α e β sono quelli corrispondenti a $2 \leq \alpha < 3$ e $2 \leq \beta < 3$. Sommando i 3 contributi, finalmente otteniamo:

$$\sigma_*^2 = \frac{C_*}{r^{\alpha-2}} + \frac{C_{DM}}{r^{\beta-2}} + \frac{C_{BH}}{r}, \quad (2.14)$$

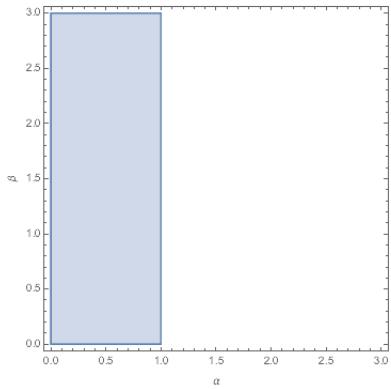
con

$$\begin{cases} C_* = \frac{2\pi G A_*}{(3 - \alpha)(\alpha - 1)}, \\ C_{DM} = \frac{4\pi G A_{DM}}{(3 - \beta)(\alpha + \beta - 2)}, \\ C_{BH} = \frac{GM_{BH}}{1 + \alpha}. \end{cases} \quad (2.15)$$

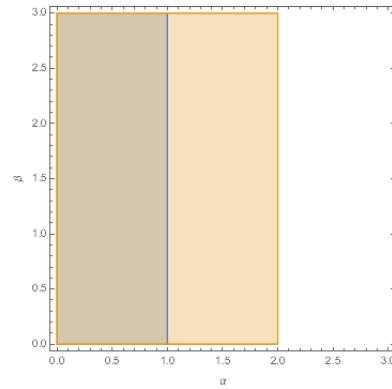
Prima di proseguire facciamo notare un aspetto interessante della soluzione 2.14: dalle limitazioni su α e β si ha che, sufficientemente vicino al centro, il contributo del BH è sempre dominante sugli altri due in quanto gli esponenti $\alpha - 2$ e $\beta - 2$ sono entrambi minore di 1. Le equazioni 2.14 e 2.15 già permettono una prima stima qualitativa del raggio della sfera di influenza, infatti assumendo per semplicità $\alpha = \beta$ e richiedendo che $\Delta\sigma_* = 1$ in equazione 1.1, si ottiene

$$\frac{C_* + C_{DM}}{r_{Inf}^{\alpha-2}} = \frac{C_{BH}}{r_{Inf}} \implies r_{Inf} = \left(\frac{C_{BH}}{C_* + C_{DM}} \right)^{\frac{1}{3-\alpha}}. \quad (2.16)$$

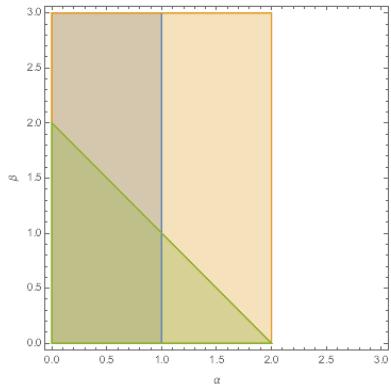
Nella prossima sezione valuteremo quantitativamente l'andamento di r_{Inf} in funzione di α e β per scelte realistiche di C_* e C_{DM} .



(a) Convergenza σ_{**} . Con $\alpha > 1$



(b) Non crescità di σ_{**} . Con $\alpha \geq 2$



(c) Convergenza di σ_{*DM} . Con $\beta > 2 - \alpha$ (d) σ_{*DM} non crescente. Con $\beta \geq 2$

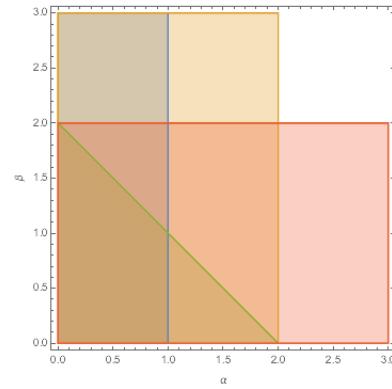


Figura 2.1: limiti sui valori dei parametri α e β imposti dalla convergenza dell'integrale 2.5, e per una dispersione di velocità non crescente per $r \rightarrow \infty$, nel caso isotropo. Le zone colorate si riferiscono ai valori proibiti dei parametri, la regione bianca corrisponde a modelli accettabili.

2.2 Parametrizzazione

I modelli noti fino a questo punto sono totalmente generici per quanto riguarda il valore delle costanti di scala A_* e A_{DM} . Dobbiamo adesso esprimere tali costanti in termini di massa stellare e massa di materia oscura.

Sfortunatamente, la massa totale dei modelli power-law diverge, a meno di non introdurre un troncamento a qualche raggio r_t . Questo approccio non presenterebbe alcuna difficoltà concettuale, ma soltanto una complicazione algebrica. Data la nostra esplorativa di questo Capitolo, procediamo in altra maniera, ovvero continuiamo ad usare i modelli non troncati, ma consideriamo come massa di scala quella contenuta all'interno del raggio di “troncamento” r_t il cui valore sarà da fissare successivamente.

Dalle espressioni 2.9 e 2.11 si ottiene l'espressione di A_* e A_{DM} in funzione di r_t , calcolando $M_{*t} = M_*(r_t)$ e $M_{DM} = M_{DM}(r_t)$. Inoltre, introducendo il parametro

$$\mathcal{R} \equiv \frac{M_{DM}}{M_{*t}}, \quad (2.17)$$

una semplice algebra mostra finalmente che

$$A_* = \frac{(3-\alpha)M_{*t}}{4\pi r_t^{3-\alpha}}, \quad A_{DM} = \frac{(3-\beta)\mathcal{R}M_{*t}}{4\pi r_t^{3-\beta}}. \quad (2.18)$$

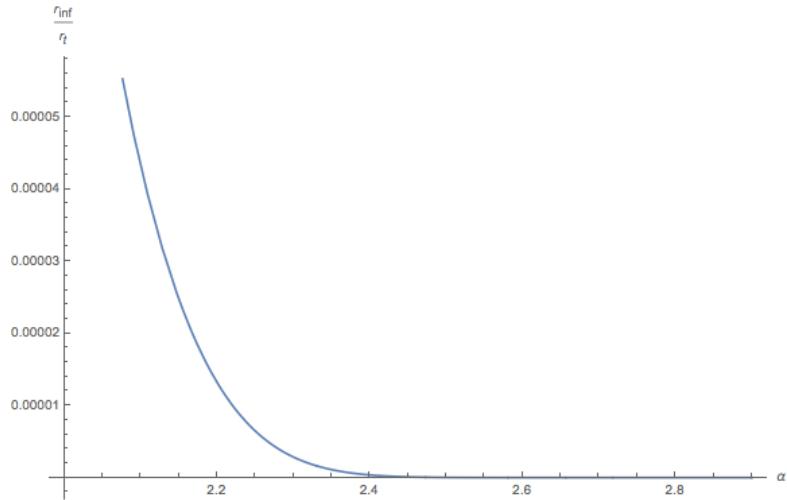
Pertanto, il valore delle costanti C_* e C_{DM} può essere riformulato come

$$C_* = \frac{GM_{*t}}{2(\alpha-1)r_t^{3-\alpha}}, \quad C_{DM} = \frac{G\mathcal{R}M_{*t}}{(\alpha+\beta-2)r_t^{3-\beta}}. \quad (2.19)$$

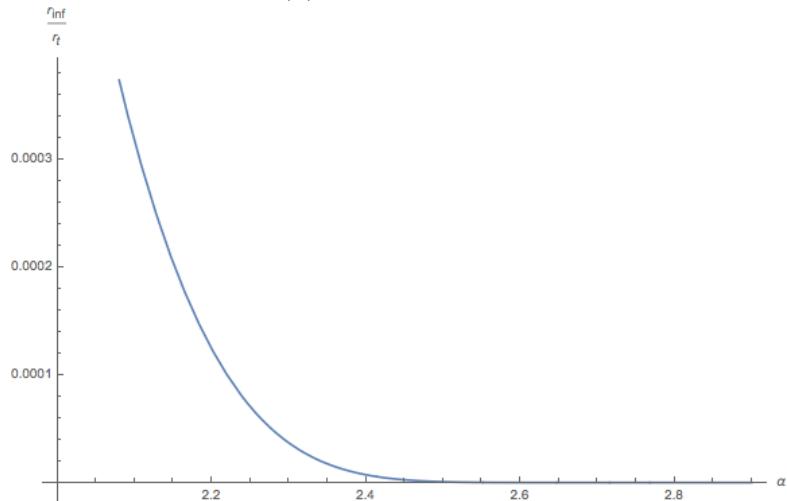
A questo punto, possiamo valutare l'espressione 2.16 assumendo $\alpha = \beta$ ed ottenendo così

$$r_{Inf} = r_t \left[\frac{2(\alpha-1)\mu}{(1+\mathcal{R})(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{3-\alpha}}. \quad (2.20)$$

La formula ricavata ci permette di studiare il problema per ogni combinazione accettabile dei parametri, come si può vedere in alcuni casi illustrativi in Figura 2.2. È opportuno sottolineare come il caso più astrofisicamente rilevante sia quello per cui $\mu = M_{BH}/M_{*t} = 10^{-3}$ (come prescritto dalla relazione di Magorrian, che stabilisce la relazione empirica $M_{BH} = 10^{-3}M_*$) ed $\mathcal{R} = 5$ (come indicato da osservazioni cosmologiche). Si noti che per α che aumenta, r_{Inf}/r_t diminuisce, come naturale conseguenza della maggiore densità stellare nelle regioni centrali, e che i valori di r_{Inf} , per r_t dell'ordine della decina di kpc sono dell'ordine della decina di pc . In Figura 2.2 sono mostrati i profili di r_{Inf}/r_t per alcuni valori di \mathcal{R} e μ a scopo illustrativo, come già sottolineato, il caso realistico è quello con $\mathcal{R} = 5$ e $\mu = 0.001$.



(a) $\mu = 10^{-3}, \mathcal{R} = 5$



(b) $\mu = 10^{-3}, \mathcal{R} = 0$

Figura 2.2: Profilo di r_{Inf}/r_t per diversi valori di μ e \mathcal{R} . Dall'equazione 2.20, considerando $\alpha = 2$ e $r_t \simeq 6 \cdot 10^3 pc$, otteniamo rispettivamente questi valori di r_{Inf} per ciascun pannello: (a) $r_{Inf} \simeq 0.6 pc$, (b) $r_{Inf} \simeq 4 pc$, (c) $r_{Inf} \simeq 66 pc$, (d) $r_{Inf} \simeq 0.6 \cdot 10^{-3} pc$.

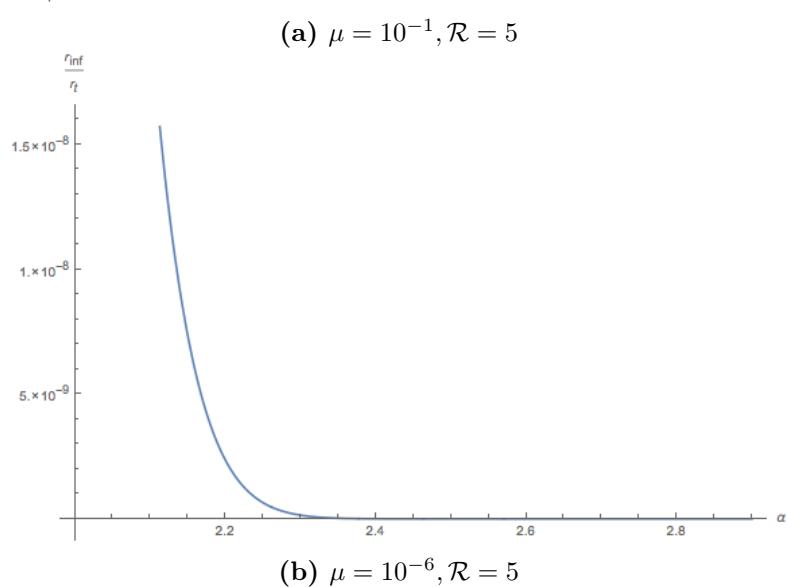
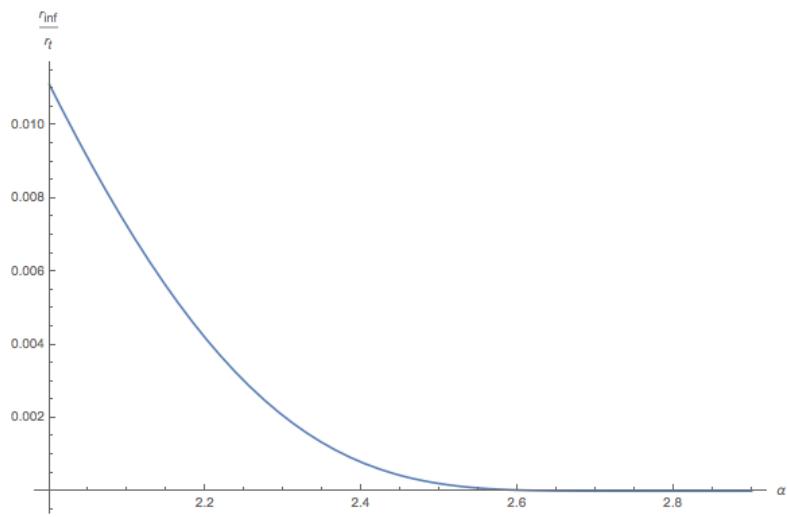


Figura 2.2-Continued

2.3 Profilo di dispersione di velocità proiettata

Ovviamente, nei lavori di tipo osservativo non si ha accesso al profilo intrinseco(tridimensionale) della dispersione di velocità (neanche nel caso isotropo) ma si possono osservare i profili proiettati. È pertanto fondamentale costruire tali profili per il nostro modello. Come prima cosa passiamo dalla densità spaziale delle stelle alla densità proiettata $\Sigma_*(R)$, una quantità che ci occorrerà in seguito

$$\Sigma_*(R) = 2 \int_0^\infty \rho_* dz = 2 \int_R^\infty \frac{\rho_* r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (2.21)$$

Ponendo $z^2 = r^2 - R^2$, dove l'ultima espressione è stata ottenuta con il cambio di variabile.

In maniera analoga si può dimostrare che nel caso isotropo la proiezione della dispersione di velocità si ottiene da un integrale simile, ovvero:

$$\Sigma_*(R) \sigma_p^2(R) = 2 \int_R^\infty \frac{\rho_*(r) \sigma_*^2(r) r}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr. \quad (2.22)$$

Come si vede dai risultati della Sezione precedente i tre contributi alla dispersione di velocità delle stelle, nel nostro semplice modello, sono delle leggi di potenza. Inoltre dall'additività dell'integrale risulta che la dispersione di velocità proiettata è ottenuta come somma delle proiezioni delle singole componenti che possono pertanto essere valutate separatamente. Pertanto è utile avere l'espressione della proiezione di una legge di potenza generica $r^{-\gamma}$. Trattiamo quindi l'integrale generale:

$$I_\gamma(R) = 2 \int_0^\infty \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{\gamma/2}}. \quad (2.23)$$

Tutti gli integrali specifici del problema saranno poi ottenuti per valori opportuni del parametro γ . Per la convergenza della 2.23 è immediato determinare che $\gamma > 1$, ovvero

$$\gamma = \begin{cases} 2\alpha - 2 > 1, \\ \alpha + \beta - 2 > 1, \\ \alpha + 1 > 1. \end{cases} \quad (2.24)$$

Con il cambiamento di variabile $z = tR$ si ha

$$I_\gamma(R) = \frac{2}{R^{\gamma-1}} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{\gamma/2}} = B \left[\frac{1}{2}, \frac{\gamma-1}{2} \right] R^{1-\gamma}, \quad (2.25)$$

dove

$$B[a, b] = \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx, \quad a > 0, b > 0. \quad (2.26)$$

è la funzione Beta Completa di Eulero.²

L'espressione per I_γ deve adesso essere specializzata a 4 diversi oggetti, ovvero ρ_* e le tre componenti $\rho_*\sigma_{**}^2$, $\rho_*\sigma_{*DM}^2$, $\rho_*\sigma_{*BH}^2$. Iniziando dalla densità proiettata stellare, dalle equazioni 2.1 e 2.21 si ottiene

$$\Sigma_*(R) = A_* B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha-1}{2} \right] R^{1-\alpha}, \quad (2.27)$$

dove ricordiamo che A_* è il coefficiente di scala della densità stellare.

Si noti che per la convergenza è necessario che $\alpha > 1$, e quindi non viene imposta alcuna limitazione aggiuntiva a quelle già ottenute e graficate in Figura 2.1.

Nel caso della dispersione di velocità proiettata si devono considerare le diverse componenti in equazione 2.14.

Usando la 2.25, nel caso di σ_{p**}^2 si ha che

$$\Sigma_*(R)\sigma_{p**}^2(R) = A_* C_* B \left[\frac{1}{2}, \frac{2\alpha-3}{2} \right] R^{3-2\alpha}, \quad (2.28)$$

per cui la convergenza richiede che $\alpha > 3/2$. Dalla 2.27 segue che

$$\sigma_{p**}^2(R) = C_* \frac{B \left[\frac{1}{2}, \frac{2\alpha-3}{2} \right]}{B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha-1}{2} \right]} R^{2-\alpha}. \quad (2.29)$$

Pertanto la dispersione di velocità proiettata per il contributo stellare non richiede altre limitazioni poichè $\alpha > 2$.

Per quanto riguarda il contributo dell'alone di materia oscura, si ha che

$$\Sigma_*(R)\sigma_{p*DM}^2(R) = A_* C_{DM} B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha+\beta-3}{2} \right] R^{3-\alpha-\beta}, \quad (2.30)$$

per la cui convergenza si richiede $\alpha + \beta > 3$. Dalla 2.27 segue che

$$\sigma_{p*DM}^2(R) = C_{DM} \frac{B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha+\beta-3}{2} \right]}{B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha-1}{2} \right]} R^{2-\beta}. \quad (2.31)$$

Pertanto la dispersione di velocità proiettata per il contributo della materia oscura non richiede altre limitazioni poichè $\beta > 2$.

Consideriamo infine l'effetto del buco nero centrale. In questo caso

$$\Sigma_*(R)\sigma_{p*BH}^2(R) = A_* C_{BH} B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2} \right] R^{-\alpha}, \quad (2.32)$$

²Ricordiamo che la funzione Beta è legata alla funzione Γ dalla relazione $B[a, b] = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

pertanto

$$\sigma_{p*}^2(R) = C_{BH} \frac{B\left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]}{B\left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha-1}{2}\right]} R^{-1}. \quad (2.33)$$

Quindi possiamo infine scrivere

$$\sigma_{p*}^2(R) = \frac{D_*}{R^{\alpha-2}} + \frac{D_{DM}}{R^{\alpha+\beta-3}} + \frac{D_{BH}}{R}, \quad (2.34)$$

dove

$$\begin{cases} D_* = C_* \frac{B\left[\frac{1}{2}, \alpha - \frac{3}{2}\right]}{B\left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha-1}{2}\right]}, \\ D_{DM} = C_{DM} \frac{B\left[\frac{1}{2}, \alpha - \frac{3}{2}\right]}{B\left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha-1}{2}\right]}, \\ D_{BH} = C_{BH} \frac{B\left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]}{B\left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha-1}{2}\right]}. \end{cases} \quad (2.35)$$

Adesso analogamente a quanto fatto nel caso della dispersione di velocità spaziale, possiamo considerare nuovamente l'espressione per $\Delta\sigma_*$, chiedendo che $\Delta\sigma_* = 1$ e limitandoci per semplicità al caso $\alpha = \beta$. Analogamente all'equazione 2.16 si ottiene

$$\frac{D_* + D_{DM}}{R_{Inf}^{\alpha-2}} = \frac{D_{BH}}{R_{Inf}} \implies R_{Inf} = \left(\frac{D_{BH}}{D_* + D_{DM}} \right)^{\frac{1}{3-\alpha}}. \quad (2.36)$$

Utilizzando le espressioni dell'equazione 2.35, con una semplice algebra, si ottiene il seguente elegante risultato:

$$R_{Inf} = r_t \left[\frac{2B\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)(\alpha-1)\mu}{B\left[\frac{1}{2}, \alpha - \frac{3}{2}\right](1+\mathcal{R})(1+\alpha)} \right]^{\frac{1}{3-\alpha}} = \left[\frac{B\left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}\right]}{B\left[\frac{1}{2}, \alpha - \frac{3}{2}\right]} \right]^{\frac{1}{3-\alpha}} r_{Inf}. \quad (2.37)$$

Ovvero, nel caso di profili power-law la relazione tra raggi di influenza spaziale e proiettato è data da un semplice coefficiente. In Figura 2.4 mostriamo il fattore correttivo che trasforma da r_{Inf} spaziale a R_{Inf} proiettato. Come si vede tale fattore è minore dell'unità (ovvero, da un punto di vista osservativo il raggio proiettato di sfera di influenza è più piccolo di quello spaziale, in altre parole dobbiamo spostarci più vicini al buco nero per lo stesso effetto), e diminuisce al diminuire α . Questo potrebbe apparire controidintuitivo, ma è in realtà una semplice conseguenza geometrica della proiezione del profilo di dispersione di velocità, che per valori di α vicini a 2 rimane alto anche a grandi valori di r .

In analogia con il caso isotropo, abbiamo calcolato R_{Inf} per diversi valori di μ e \mathcal{R} con $\alpha = 2$, in Figura 2.5 sono riportati tali risultati e mostrati i quattro andamenti per $2 \leq \alpha < 3$. Ricordiamo inoltre che il caso realistico coincide con $\mu = 0.001$ e $\mathcal{R} = 5$.

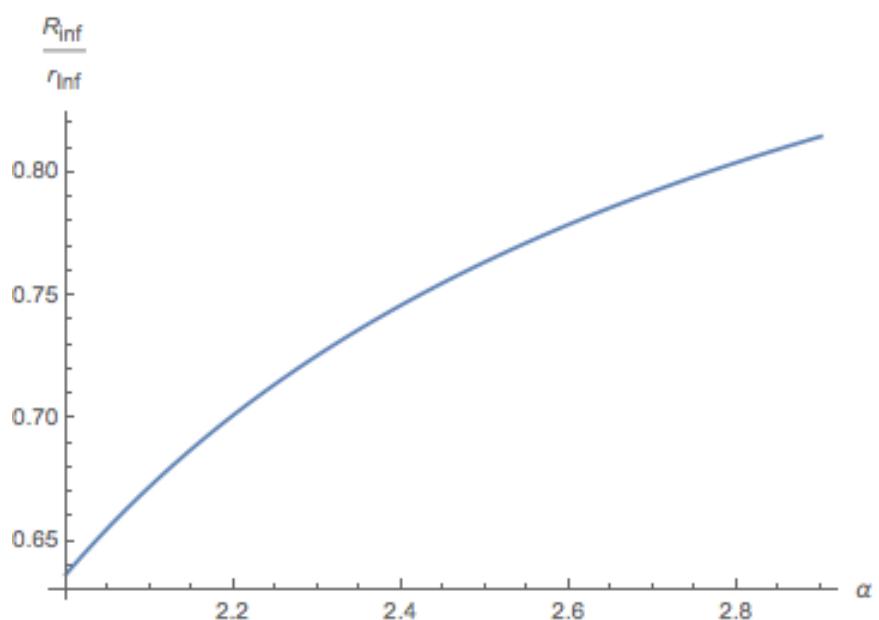
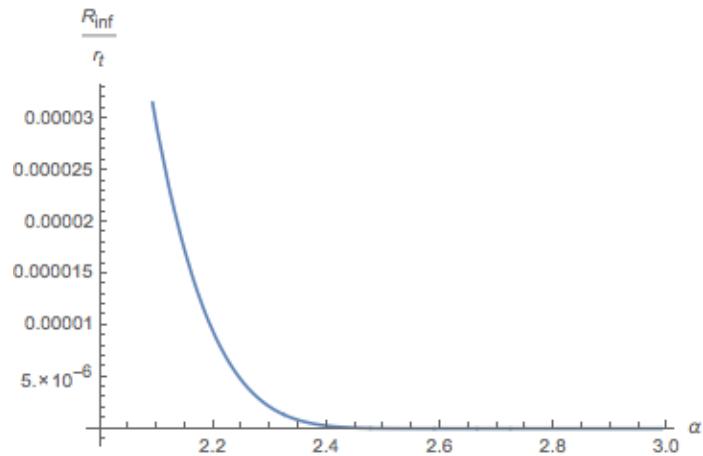
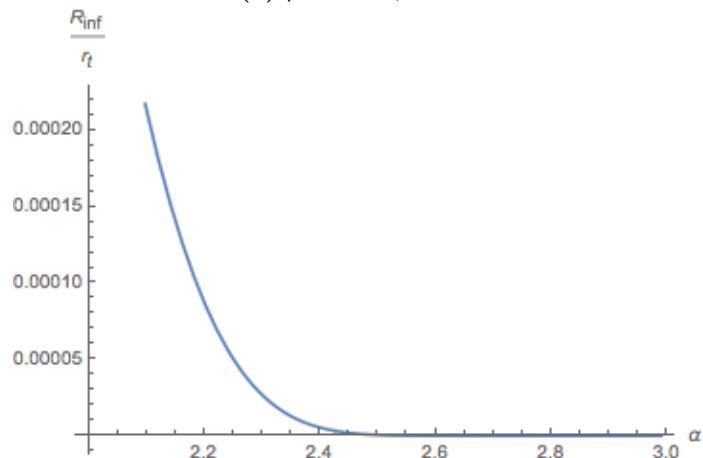


Figura 2.4: Il fattore $R_{\text{inf}}/r_{\text{inf}}$ (dato dall'equazione 2.37) in funzione del parametro α . Si noti come il raggio di influenza proiettato sia sistematicamente più piccolo del suo analogo spaziale, e come i due raggi tendono a coincidere nel caso dei profili di densità sempre più ripidi.

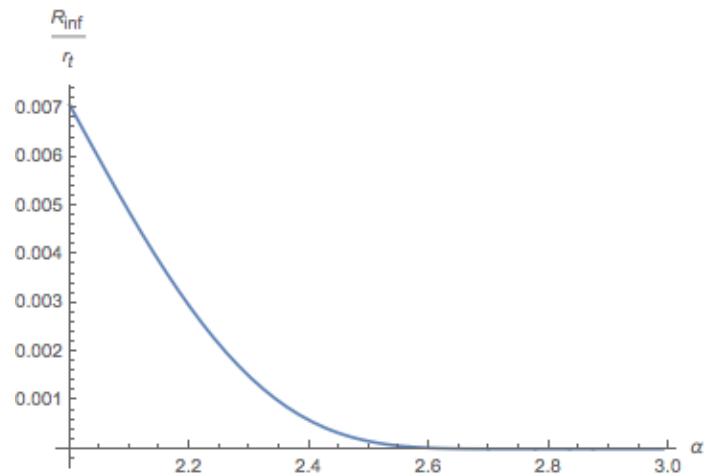


(a) $\mu = 10^{-3}, \mathcal{R} = 5$

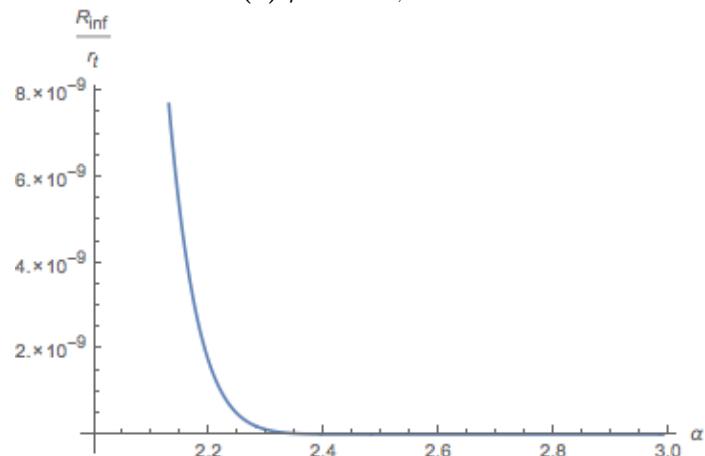


(b) $\mu = 10^{-3}, \mathcal{R} = 0$

Figura 2.5: Andamento di R_{Inf}/r_t per diversi valori di μ e \mathcal{R} . Dall'equazione 2.37, considerando $\alpha = 2$ e $r_t \simeq 6 \cdot 10^3$ pc, otteniamo rispettivamente questi valori di R_{Inf} per ciascun pannello: (a) $R_{Inf} \simeq 0.4$ pc, (b) $R_{Inf} \simeq 2.5$ pc, (c) $R_{Inf} \simeq 42$ pc, (d) $R_{Inf} \simeq 0.4 \cdot 10^{-3}$ pc.



(a) $\mu = 10^{-1}, \mathcal{R} = 5$



(b) $\mu = 10^{-6}, \mathcal{R} = 5$

Figura 2.6: Figura 2.5-Continued

2.4 Dispersione di velocità di apertura

Da un punto di vista osservativo la dispersione di velocità non è mai misurata “puntualmente”, ma gli effetti di *seeing* comportano una specie di *luminosity weighted* del profilo σ_p^2 pesato sul profilo di luce $\Sigma_*(R)$. Per tale motivo valutiamo adesso questo effetto.

Si definisce dispersione di velocità di apertura la grandezza

$$\sigma_a^2(R) \equiv \frac{2\pi}{L_p(R)} \int_0^R \Sigma_*(R') \sigma_p^2(R') R' dR', \quad (2.38)$$

dove $\Sigma_*(R)$ è la densità proiettata e

$$L_p(R) = 2\pi \int_0^R \Sigma_*(R') R' dR', \quad (2.39)$$

è la luminosità proiettata contenuta all'interno del disco di raggio R .

Nel caso del nostro modello, dalla 2.27 otteniamo

$$L_p(R) = \frac{2\pi A_*}{3-\alpha} B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha-1}{2} \right] R^{3-\alpha}. \quad (2.40)$$

Dalle espressioni ottenute per la $\Sigma_* \sigma_{p**}^2$ e $\Sigma_* \sigma_{pDM*}^2$, si ottiene facilmente,

$$L_p(R) \sigma_{a**}^2(R) = \frac{2\pi A_* C_* B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha-3}{2} \right]}{5-2\alpha} R^{5-2\alpha}, \quad (2.41)$$

$$L_p(R) \sigma_{aDM*}^2(R) = \frac{2\pi A_* C_{DM} B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha+\beta-3}{2} \right]}{5-2\alpha-\beta} R^{5-\alpha-\beta}. \quad (2.42)$$

A differenza delle altre 2 quantità, per $\alpha \geq 2$ il contributo del buco nero diverge nelle regioni centrali, pertanto in questa classe di modelli non è possibile calcolare $\Delta\sigma_*$ usando la aperture velocity dispersion.

2.5 Anisotropia radiale

In questa sezione, andiamo a studiare il nostro sistema in presenza di anisotropia radiale, in particolare, consideriamo anisotropia di tipo Osipkov-Merritt (OM) data dall'equazione A.30. Partendo dall'equazione A.31, Si può dimostrare [10] che, la soluzione dell'equazione sferica di Jeans risulta

$$\rho_*(r) \sigma_r^2(r) = \frac{G}{r^2 + r_a^2} \int_r^\infty \rho_*(r) M_T(r) \left(1 + \frac{r_a^2}{r^2} \right) dr. \quad (2.43)$$

Da questa equazione vediamo che nel caso di anisotropia OM, la componente radiale della dispersione di velocità spaziale si possa sempre rappresentare

come somma di due integrali, uno corrispondente al caso isotropo che è già stato calcolato nelle sezioni precedenti. Infatti equazione 2.43, può essere scritto in completa generalità come

$$\rho_*(r)\sigma_r(r) = \frac{\mathcal{A}(r) + r_a^2\mathcal{I}(r)}{r^2 + r_a^2}, \quad (2.44)$$

dove,

$$\mathcal{A}(r) = \mathcal{A}_* + \mathcal{A}_{DM} + \mathcal{A}_{BH} \quad e \quad \mathcal{I} = \mathcal{I}_* + \mathcal{I}_{DM} + \mathcal{I}_{BH}. \quad (2.45)$$

Poichè il caso isotropo si ottiene per $r_a \rightarrow \infty$, dalla 2.44 risulta che il termine $\mathcal{I}(r)$ è già stato calcolato, per cui dobbiamo adesso calcolare soltanto $\mathcal{A}(r)$ per vari contributi del nostro sistema.

2.5.1 I tre contributi

Iniziamo valutando la componente anisotropa della dispersione di velocità stellare. Come evidente dall'equazione 2.43,

$$\mathcal{A}_* = G \int_r^\infty \frac{4\pi A_*^2}{3-\alpha} r^{3-2\alpha} dr = \frac{2\pi G A_*^2}{(3-\alpha)(\alpha-2)} r^{4-2\alpha}. \quad (2.46)$$

Per quanto riguarda il contributo della materia oscura,

$$\mathcal{A}_{DM} = G \int_r^\infty \frac{A_*}{r^\alpha} \frac{4\pi A_{DM}}{3-\beta} r^{3-2\beta} dr = \frac{4\pi G A_{DM} A_*}{(3-\beta)(\alpha+\beta-4)} r^{4-\alpha-\beta}. \quad (2.47)$$

Determiniamo infine il contributo del buco nero, ottenendo

$$\mathcal{A}_{BH} = G \int_r^\infty \frac{A_*}{r^\alpha} M_{BH} dr = \frac{GM_{BH} A_*}{\alpha-1} r^{1-\alpha}. \quad (2.48)$$

2.5.2 Sfera di influenza nel caso anisotropo

In analogia con quanto fatto nel paragrafo 2.2, calcoliamo adesso il valore del raggio (spaziale) della sfera di influenza nel caso anisotropo generale. Ovviamente, se nelle formule consideriamo $r_a \rightarrow \infty$ otteniamo nuovamente i risultati del caso isotropo. È possibile ottenere la seguente espressione generale:

$$\Delta\sigma_* = \frac{\mathcal{A}_{BH} + r_a^2\mathcal{I}_{BH}}{(\mathcal{A}_{**} + \mathcal{A}_{DM}) + r_a^2(\mathcal{I}_{**} + \mathcal{I}_{DM})} \quad (2.49)$$

Per la nostra analisi preliminare adottiamo come in precedenza $\alpha = \beta$, per cui l'equazione precedente diventa

$$\Delta\sigma_* = \frac{\mathcal{A}_{BH} + r_a^2\mathcal{I}_{BH}}{(1+\mathcal{R}) + r_a^2(\mathcal{A}_{**} + \mathcal{I}_{**})}. \quad (2.50)$$

Consideriamo inizialmente il caso estremo, ovvero $r_a = 0$. In questo caso le orbite sono pesantemente radiali. Otteniamo

$$r_{Inf} = r_t \left[\frac{2\mu(\alpha - 2)}{(\alpha - 1)(1 + \mathcal{R})} \right] \frac{1}{3 - \alpha}. \quad (2.51)$$

Confrontando questo risultato con l'analoga espressione 2.20, si possono fare subito due considerazioni. La prima è che dividendo l'equazione 2.51 per la 2.20 si ha che

$$\frac{(r_{Inf})_{Rad}}{(r_{Inf})_{Iso}} = \left[\frac{(\alpha + 1)(\alpha - 2)}{(\alpha - 1)^2} \right]^{\frac{1}{3 - \alpha}}, \quad (2.52)$$

e quindi r_{Inf} nel caso radiale estremo è più piccolo di r_{Inf} nel caso isotropo, per un fattore rappresentato in Figura 2.7.

Un punto importante e strettamente collegato al precedente è allora il seguente:

se una galassia con buco nero centrale e radialmente anisotropa è osservata con un dato valore di r_{Inf} ma, erroneamente si interpretano le osservazioni come se la galassia fosse isotropa, che errore si commette sulla stima della massa del buco nero M_{BH} ?

In formule,

$$(r_{Inf})_{Vero} = r_t \left[\frac{2\mu(\alpha - 2)}{(\alpha - 1)(1 + \mathcal{R})} \right]^{\frac{1}{3 - \alpha}} = r_t \left[\frac{2\mu_{Iso}(\alpha - 1)}{(1 + \mathcal{R})(1 + \alpha)} \right]^{\frac{1}{3 - \alpha}}. \quad (2.53)$$

Da cui

$$\mu_{Iso} = \mu_{Vero} \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 2)}{(\alpha - 1)^2}, \quad (2.54)$$

ovvero

$$\frac{\Delta\mu}{\mu_{Vero}} = -\frac{3 - \alpha}{(\alpha - 1)^2}. \quad (2.55)$$

Quindi la sottostima nella M_{BH} può essere molto alta specialmente per valori di α vicini a 2. Questo risultato suggerisce che potrebbe essere interessante studiare se le galassie che presentano valori misurati di M_{BH} piccoli in maniera anomala, non siano per caso molto anisotrope.

2.5.3 Proiezione della dispersione di velocità stellare nel caso anisotropo

Così come abbiamo fatto nel caso puramente isotropo, scriviamo adesso la formula per la proiezione della dispersione di velocità nel caso con anisotropia. Si può far vedere che nel caso sferico con anisotropia, descritta dal

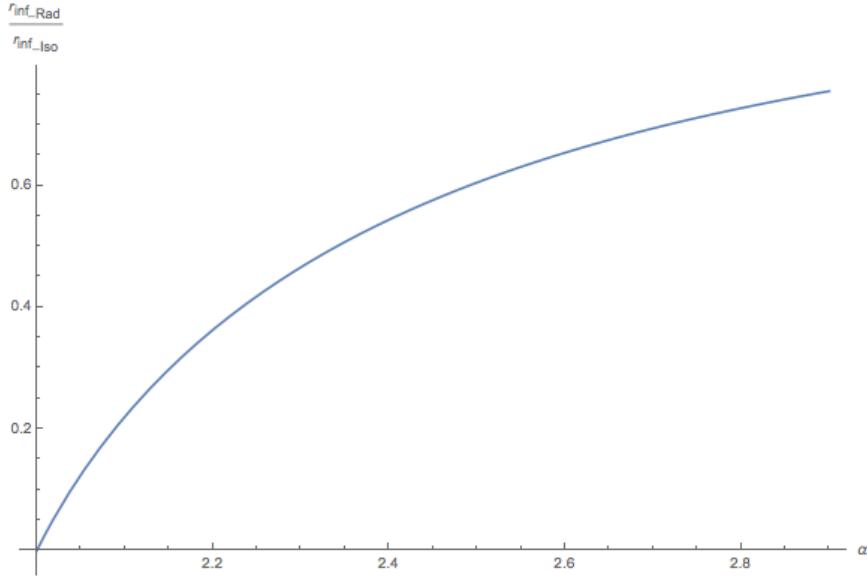


Figura 2.7: Il fattore $(r_{\text{inf}})_{\text{Rad}}/(r_{\text{inf}})_{\text{Iso}}$ (dato dall'equazione 2.52) in funzione del parametro α . Come si vede questo fattore è minore di 1 e quindi il raggio di sfera di influenza in caso radiale è minore rispetto al caso isotropo.

parametro $\beta(r)$, la formula corrispondente a quella in equazione 2.22 è data da

$$\Sigma_*(R)\sigma_p^2(R) = 2 \int_R^\infty \frac{\rho_*(r)\sigma_r^2(r)r}{\sqrt{r^2 - R^2}} \left(1 - \beta \frac{R^2}{r^2}\right) dr, \quad (2.56)$$

con

$$\beta = \frac{r^2}{r^2 + r_a^2}. \quad (2.57)$$

Per $\beta = 0$ (caso isotropo) si riottiene l'equazione precedentemente richiamata. Il caso puramente radiale è ottenuto invece ponendo $\beta = 1$.

Nei nostri modelli, $\beta = \frac{r^2}{r^2 + r_a^2}$ e i due casi sopra menzionati sono ottenuti inserendo nell'equazione 2.56 le equazioni 2.46 e 2.57, considerando i casi limite $r_a \rightarrow \infty$ e $r_a = 0$. In conclusione si ottiene:

$$\Sigma_*(R)\sigma_p^2(R) = 2 \int_R^\infty \frac{\rho_*(r)\sigma_r^2(r)r}{\sqrt{r^2 - R^2}} \left(1 - \frac{R^2}{r^2 - r_a^2}\right) dr \quad (2.58)$$

$$= \underbrace{2 \int_R^\infty \frac{\rho_* \sigma_r^2}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr}_I - \underbrace{2 \int_R^\infty \frac{\rho_* \sigma_r^2}{\sqrt{r^2 - R^2}} \left(\frac{R^2}{r^2 - r_a^2}\right) dr}_{II}. \quad (2.59)$$

Sfortunatamente, nonostante la semplicità dei nostri modelli, la proiezione per valori arbitrari di r_a non è esprimibile in generale con funzioni

elementari. Come esempio di ciò, consideriamo il caso della componente stellare. Il primo dei due integrali si compone a sua volta di due parti:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_R^\infty \frac{\mathcal{A} + r_a^2 \mathcal{I}}{r^2 + r_a^2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr \\ &= \underbrace{\int_R^\infty \frac{\mathcal{A}}{(r^2 + r_a^2) \sqrt{r^2 - R^2}} dr}_{I_1} + \underbrace{\int_R^\infty \frac{r_a^2 \mathcal{I}}{(r^2 + r_a^2) \sqrt{r^2 - R^2}} dr}_{I_2} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{4\pi G A_*^2}{(3-\alpha)(2\alpha-4)} \int_R^\infty \frac{r^{4-2\alpha}}{(r^2 + r_a^2) \sqrt{r^2 - R^2}} dr \\ &= \text{const } R^{2-2\alpha} \Gamma[-1 + \alpha] {}_2F_1 \left[1, -1 + \alpha, -\frac{1}{2} + \alpha, \frac{a^2}{R^2} \right]. \\ I_2 &= \int_R^\infty \frac{r_a^2 \mathcal{I}}{(r^2 + r_a^2) \sqrt{r^2 - R^2}} dr \\ &= \text{const } \int_R^\infty \frac{r^{2-2\alpha}}{(r^2 + r_a^2) \sqrt{r^2 - R^2}} dr \\ &= \text{const } R^{-2\alpha} \Gamma[\alpha] {}_2F_1 \left[1, \alpha, \frac{1}{2} + \alpha, -\frac{a^2}{R^2} \right]. \end{aligned}$$

Analogamente, l'integrale II si scomponete in due parti; ancora si ottengono risultati contenenti funzioni ipergeometriche ${}_2F_1$ che non riportiamo in quanto non aggiungono informazioni a quanto già detto.

Fortunatamente, il caso puramente radiale permette la valutazione dell'integrale di proiezione 2.56 in maniera diretta. Si osserva infatti che per $\beta = 1$ (ovvero $r_a = 0$), il termine $\rho_* \sigma_*^2 = \mathcal{A}/r^2$ è una somma di leggi di potenza e che il coefficiente di proiezione $1 - \beta R^2/r^2$ si scomponete in due parti, a loro volta leggi di potenza. In concreto, nel caso puramente radiale qui riportato

$$\Sigma_*(R) \sigma_p^2(R) = 2 \int_R^\infty \frac{\mathcal{A}(r)}{r \sqrt{r^2 - R^2}} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) dr = I_1 + I_2, \quad (2.60)$$

I_1 e I_2 sono proiezioni di legge di potenza; come tali, possiamo ottenere immediatamente la loro forma dal risultato generale in equazione 2.22.

Prima di procedere alla valutazione esplicita dei sei integrali, è importante sottolineare che la considerazione del caso puramente radiale non è soltanto dettata da argomenti di semplicità matematica, ma anche dal fatto importante che tutti i casi reali sono necessariamente contenuti tra il caso isotropo e quello puramente radiale. I calcoli eseguiti possono essere considerati pertanto una indicazione delle variazioni massime che ci possiamo attendere per effetti di anisotropia orbitale.

Procediamo con il calcolo dei due integrali I_1 e I_2 , seguendo come anticipato l'equazione 2.22

$$\Sigma_*(R)\sigma_p^2(R) = 2 \int_R^\infty \frac{\mathcal{A}(r)}{r\sqrt{r^2 - R^2}} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) dr \quad (2.61)$$

$$= 2 \underbrace{\int_R^\infty \frac{\rho_*\sigma^2(r)r}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr}_{I_1} - 2 \underbrace{\int_R^\infty \frac{\rho_*\sigma^2(r)r}{\sqrt{r^2 - R^2}} \frac{R^2}{r^2} dr}_{I_2}. \quad (2.62)$$

Utilizzando i risultati già ottenuti abbiamo

$$I_1 = B \left[\frac{1}{2}, \frac{\delta - 1}{2} \right] \frac{1}{R^{\delta-1}} \quad (2.63)$$

dove

$$\delta = \begin{cases} 2\alpha - 2 > 1, \\ \alpha + \beta - 2 > 1, \\ \alpha + 1 > 1. \end{cases} \quad (2.64)$$

Considerando i tre contributi otteniamo

$$I_1 = \zeta_* \frac{1}{R^{2\alpha-3}} + \zeta_{DM} \frac{1}{R^{\alpha+\beta-3}} + \zeta_{BH} \frac{1}{R^\alpha}, \quad (2.65)$$

con ,

$$\zeta_* = \frac{4\pi G A_*^2}{(3-\alpha)(2\alpha-4)} B \left[\frac{1}{2}, \frac{2\alpha-3}{2} \right], \quad (2.66)$$

$$\zeta_{DM} = \frac{4\pi G A_* A_{DM}}{(3-\alpha)(\alpha+\beta-4)} B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha+\beta-3}{2} \right], \quad (2.67)$$

$$\zeta_{BH} = \frac{GM_{BH} A_*}{\alpha-1} B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2} \right]. \quad (2.68)$$

Calcoliamo I_2 in modo analogo:

$$I_2 = 2 \int_R^\infty \frac{\rho_*\sigma^2(r)r}{\sqrt{r^2 - R^2}} \frac{R^2}{r^2} dr \quad (2.69)$$

$$= B \left[\frac{1}{2}, \frac{\xi-1}{2} \right] \frac{1}{R^{\xi-1}}, \quad (2.70)$$

dove $\xi = \delta + 2$. Per la convergenza di questi integrali richiediamo che $\xi > 1$, ovvero

$$\xi = \begin{cases} 2\alpha > 1, \\ \alpha + \beta > 1, \\ \alpha + 3 > 1. \end{cases} \quad (2.71)$$

Considerando i tre contributi infine abbiamo

$$I_2 = \eta_* \frac{1}{R^{2\alpha-3}} + \eta_{DM} \frac{1}{R^{\alpha+\beta-3}} + \eta_{BH} \frac{1}{R^\alpha}, \quad (2.72)$$

con

$$\eta_* = \frac{4\pi G A_*^2}{(3-\alpha)(2\alpha-4)} B \left[\frac{1}{2}, \frac{2\alpha-1}{2} \right], \quad (2.73)$$

$$\eta_{DM} = \frac{4\pi G A_* A_{DM}}{(3-\alpha)(\alpha+\beta-4)} B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha+\beta-1}{2} \right], \quad (2.74)$$

$$\eta_{BH} = \frac{G M_{BH} A_*}{\alpha-1} B \left[\frac{1}{2}, \frac{\alpha+2}{2} \right]. \quad (2.75)$$

Capitolo 3

Modelli assisimmetrici I: power-laws a due componenti

In questo capitolo introduciamo, rispetto al Capitolo precedente, l'effetto geometrico dovuto allo schiacciamento della galassia e dell'alone di materia oscura. Il fatto di considerare modelli "schiacciati" permette inoltre di studiare un tipo diverso di anisotropia rispetto a quello considerata nel Capitolo 2, ovvero anisotropia tangenziale. Per quanto riguarda invece il profilo di densità, i modelli rimangono power-law come nel capitolo precedente (anche se le superfici di isodensità sono adesso ellissoidi di rotazione). Le equazioni di Jeans sono risolte usando la tecnica di espansione omeoidale, che sarà nuovamente considerata per modelli più realistici nel Capitolo 5.

3.1 Modelli assisimmetrici

In questo Capitolo studiamo la generalizzazione ellissoidale di modelli power-law del capitolo precedente: Tali modelli sono quindi un caso particolare di modelli assisimmetrici. Si può dimostrare che sotto ipotesi di stazionarietà la funzione di distribuzione dipende solo dagli integrali del moto associati al potenziale totale del sistema Φ_T , e in caso di un sistema assisimmetrico, tali integrali sono l'energia E e la componente assiale del momento angolare L_z di ogni orbita stellare, pertanto $f = f(E, L_z)$. Coordinate cilindriche (R, φ, z) sono ovviamente le coordinate naturali per questi sistemi, e ricordiamo che

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi, \\ y = R \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad (3.1)$$

dove

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.2)$$

e si è scelto l'asse z come asse di simmetria.

È facile da dimostrare che in coordinate cilindriche, il tensore di dispersione di velocità σ , per la funzione di distribuzione $f = f(E, L_z)$ è diagonale ed abbiamo: $\sigma_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Per di più, in conseguenza del fatto che $f = f(E, L_z)$, è possibile dimostrare che le componenti del tensore della dispersione di velocità e le componenti del vettore di velocità media (che da ora in poi indichiamo con \bar{v}) hanno le seguente proprietà:

$$\sigma_R = \sigma_z = \sigma \quad \bar{v}_R = \bar{v}_z = 0, \quad (3.3)$$

dove per semplicità del notazione abbiamo indicato le componenti diagonali del tensore di dispersione di velocità $(\sigma_R, \sigma_\varphi, \sigma_z)$ con solo un indice. Le equazioni Jeans possono essere scritte per tali sistemi come

$$\frac{\partial \rho_* \sigma^2}{\partial z} = -\rho \frac{\partial \Phi_t}{\partial z}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \rho_* \sigma^2}{\partial R} - \frac{\rho_* \Delta_*}{R} = -\rho_* \frac{\partial \Phi_T}{\partial R}, \quad (3.5)$$

dove la terza equazione relativa alla coordinata φ è zero per la simmetria del sistema, e

$$\Delta_* = \bar{v}_\varphi^2 - \sigma^2. \quad (3.6)$$

Prima di procedere all'integrazione del sistema 3.4 e 3.5 è necessaria una discussione breve sulla condizione al contorno per la dispersione di velocità. Se il sistema si estende fino all'infinito, la condizione al contorno naturale è $\rho \sigma_R^2 \rightarrow 0$ per $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ($\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Altrimenti, se il sistema è troncato è necessario che la componente normale della dispersione di velocità

σ_n svanisca ovunque sul confine del sistema. Si può dimostrare che questa condizione è verificata se e solo se $\sigma = 0$ sulla superficie di bordo. I nostri sistemi sono non troncati, pertanto si applica la condizione prima. Si noti inoltre che le equazioni di Jeans non determinano separatamente i contributi $\overline{v_\varphi^2}$ e σ_φ^2 e per cui si deve procedere ad una scomposizione. Noi usiamo la decomposizione k di Satoh (1980), ponendo

$$\overline{v_\varphi^2} \equiv k^2 \Delta_*, \quad (3.7)$$

$$\sigma_\varphi^2 = \overline{v_\varphi^2} - \overline{v_\varphi}^2 = \sigma^2 + (1 - k^2) \Delta_*, \quad (3.8)$$

con $0 \leq k \leq 1$. Per $k = 0$ non abbiamo moti ordinati e il tensore di dispersione di velocità è tangenzialmente anisotropo, mentre per $k = 1$ il tensore di dispersione di velocità è isotropo, e la galassia è schiacciata dalla rotazione, come avviene nel caso di strutture fluidodinamiche. Ricordiamo che nella decomposizione 3.7 e 3.8 il fatto che k è costante è solo una delle possibili scelte: ad esempio in Ciotti e Pellegrini (1996) è descritta una decomposizione più generale nella quale $k = k(r, z)$.

In particolare nel caso isotropo ($k = 1$)

$$\begin{cases} \overline{v_\varphi^2} = \Delta_*, \\ \sigma_\varphi^2 = \sigma^2, \end{cases} \quad (3.9)$$

mentre nel caso totalmente tangenzialmente anisotropo ($k = 0$)

$$\begin{cases} \overline{v_\varphi^2} = 0, \\ \sigma_\varphi^2 = \overline{v_\varphi^2} = \Delta_* + \sigma^2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Nella prossima sezione determiniamo il potenziale dei nostri modelli, ma qui illustriamo l'integrazione delle equazioni di Jeans in completa generalità. L'integrazione della 3.4 è immediata e si ottiene, a R fissato,

$$\rho_* \sigma^2 = \int_z^\infty \rho_* \frac{\partial \Phi_t}{\partial z'} dz'. \quad (3.11)$$

Dall'equazione 3.5 segue che la quantità $\rho_* \Delta_*$ può essere ottenuta, una volta conosciuta la quantità $\rho_* \sigma^2$, effettuando 2 derivate radiali, ovvero

$$\rho_* \Delta_* = R \left(\frac{\partial \rho_*}{\partial R} + \rho_* \frac{\partial \Phi_t}{\partial R} \right). \quad (3.12)$$

Utilizzando un'espressione equivalente all'equazione 3.12 è però ottenuta con integrazione per parti (Barnabè et al. 2006 [11]; Smet et al. 2015 [12]),

$$\rho_* \Delta_* = R \int_z^\infty \left(\frac{\partial \rho_*}{\partial R} \frac{\partial \Phi_t}{\partial z} - \frac{\partial \rho_*}{\partial z'} \frac{\partial \Phi_t}{\partial R} \right) dz'. \quad (3.13)$$

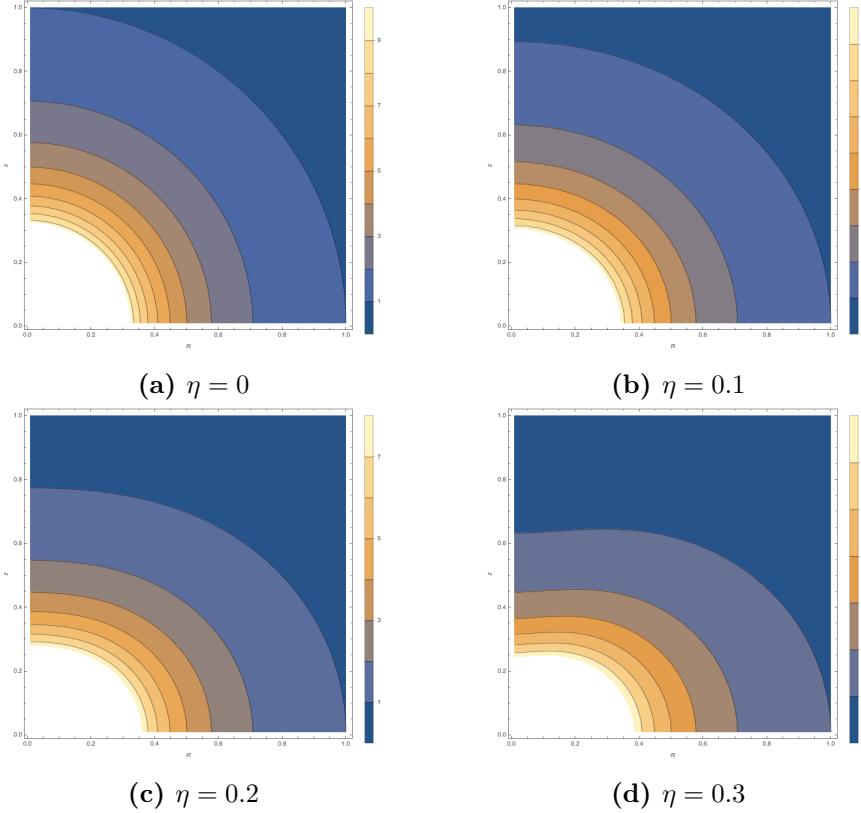


Figura 3.1: Mappa di densità ρ_* per diversi valori di η_* .

Si noti che, nel caso di un sistema a simmetria sferica, ovvero $\rho_* = \rho_*(r)$ e $\Phi_t = \Phi_t(r)$, l'equazione 3.13 mostra immediatamente che $\Delta_* = 0$ che a sua volta, nel caso isotropo, implica $\bar{v}_\varphi = 0$, ovvero un sistema sferico fluido non può ruotare. Si noti inoltre che $\Delta_* = \Delta_{**} + \Delta_{*DM} + \Delta_{*BH}$.

3.2 Il modello

Generalizzando i modelli del Capitolo 2, le distribuzioni di densità stellare e materia oscura sono

$$\rho_* = \frac{A_*}{m_*^\alpha}, \quad \rho_{DM} = \frac{A_{DM}}{m_{DM}^\beta}, \quad (3.14)$$

dove

$$m_*^2 \equiv R^2 + \frac{z^2}{q_*^2}, \quad m_{DM}^2 \equiv R^2 + \frac{z^2}{q_{DM}^2}, \quad (3.15)$$

Nel seguito applicheremo il metodo dell'espansione omeoidale (Ciotti and Bertin (2005)) per il calcolo del potenziale gravitazionale e pertanto è ne-

cessario l'introduzione di due parametri di espansione, che nel nostro caso assumiamo essere;

$$q_* \equiv 1 - \eta_*, \quad q_{DM} \equiv 1 - \eta_{DM}. \quad (3.16)$$

Poichè la massa totale delle distribuzioni 3.14 è infinita, si deve eseguire quella che può essere definita “unconstrained expansion”.

Seguendo la tecnica sviluppata in Ciotti e Bertin (2005), tale espansione viene eseguita per $\eta \leq 1/\alpha$, $\eta_{DM} \leq 1/\beta$, con $\alpha, \beta > 1$. Utilizzando i risultati in Appendice B e considerando il caso assisimmetrico, dopo lunghi ma elementari calcoli si ottiene

$$\begin{cases} \rho_* = A_* \left(\frac{1 - \alpha \eta_*}{r^\alpha} + \frac{\alpha \eta_* R^2}{r^{\alpha+2}} \right), \\ \rho_{DM} = A_{DM} \left(\frac{1 - \beta \eta_{DM}}{r^\beta} + \frac{\beta \eta_{DM} R^2}{r^{\beta+2}} \right). \end{cases} \quad (3.17)$$

Il potenziale associato a tali densità è

$$\Phi_* = 4\pi G A_* \begin{cases} -\frac{5 - \alpha - (4 - \alpha)(\alpha - 1)\eta_*}{(5 - \alpha)(3 - \alpha)(\alpha - 2)r^{\alpha-2}} - \frac{\eta_* R^2}{(5 - \alpha)r^\alpha}, \\ \frac{(3 - 2\eta_*) \ln r}{3} - \frac{\eta_* R^2}{3r^2}, \end{cases} \quad (3.18)$$

e

$$\Phi_{DM} = 4\pi G A_{DM} \begin{cases} -\frac{5 - \beta - (4 - \beta)(\beta - 1)\eta_{DM}}{(5 - \beta)(3 - \beta)(\beta - 2)r^{\beta-2}} - \frac{\eta_{DM} R^2}{(5 - \beta)r^\beta}, \\ \frac{(3 - 2\eta_{DM}) \ln r}{3} - \frac{\eta_{DM} R^2}{3r^2}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Nella 3.18 e 3.19 la prima espressione si riferisce ad α e $\beta \neq 2$, mentre la seconda per $\alpha = \beta = 2$. Il potenziale totale del sistema può essere quindi scritto come

$$\Phi = \Phi_* + \Phi_{DM} - \frac{GM_{BH}}{r}. \quad (3.20)$$

3.3 Parametrizzazione

I modelli noti fino a questo punto sono totalmente generici per quanto riguarda il valore delle costanti di scala A_* e A_{DM} . Dobbiamo adesso esprimere tali costanti in termini di massa stellare e massa di materia oscura.

Sfortunatamente, la massa totale dei modelli power-law diverge, a meno di non introdurre un troncamento a qualche raggio r_t . In analogia con quanto fatto per i modelli nel Capitolo 2, definiamo M_{*t} come la massa totale di

stelle contenute all'interno dell'ellissoide di rapporto assiale q_* con semiasse maggiore R_t , ovvero come la massa contenuta all'interno di

$$m_t^2 = R_t^2 + \frac{z_t^2}{q_*^2}, \quad (3.21)$$

ed analogamente per la materia oscura. Si ottiene da una semplice integrazione

$$M_{*t} = \frac{4\pi q_* A_*}{3 - \alpha} m_t^{3-\alpha}, \quad M_{DMt} = \frac{4\pi q_{DM} A_{DM}}{3 - \beta} m_t^{3-\beta}, \quad (3.22)$$

da cui

$$A_* = \frac{(3 - \alpha) M_{*t}}{4\pi q_* m_t^{3-\alpha}}, \quad A_{DM} = \frac{(3 - \beta) M_{DMt}}{4\pi q_{DM} m_t^{3-\beta}}. \quad (3.23)$$

Si noti che per $q_* = q_{DM} = 1$ e per $m_t = r_t$ si riottengono le equazioni 2.18 nel Capitolo 2.

3.4 Soluzione delle equazioni di Jeans per espansione omeoidale

Dobbiamo adesso passare a risolvere le equazioni di Jeans 3.11 e 3.12 per il modello descritto in Sezione 3.2, con l'aggiunta del buco nero centrale. Prima di procedere sono necessarie alcune importanti considerazioni. La prima è che il modello espanso è una linearizzazione, in termini dello schiacciamento, della densità omeoidale iniziale. D'altra parte, i parametri associati sono esatti. Pertanto le coppie potenziale-densità così ottenute possono essere interpretate in due maniere diverse: o come espansione di un modello omeoidale ovvero come coppie potenziale-densità a se stanti. Nel secondo caso, quando si risolvono le equazioni di Jeans è ovvio che si debbano considerare tutti i termini, anche quelli quadratici negli schiacciamenti, ma nel primo caso, quando le coppie sono interpretate come linearizzazione, è necessario fermarsi al primo ordine negli schiacciamenti. Ora i modelli appena costruiti non presenterebbero alcuna difficoltà di integrazione fino al secondo ordine nello schiacciamento, ma per quanto detto ci limitiamo qui al primo ordine. La tecnica generale di integrazione per queste coppie omeoidali è descritta nel Capitolo 5, qui ci limitiamo a dare il risultato.

$$\begin{aligned}
\rho_* \sigma^2 = & 4\pi G A_*^2 \left[\frac{1}{r^{2\alpha-2}} \frac{(2\eta_*\alpha - 1)(\alpha - 5) + 4\eta_*}{2(\alpha - 5)(\alpha - 3)(\alpha - 1)} + \frac{R^2}{r^{2\alpha}} \frac{(4 - \alpha)\eta_*}{(\alpha - 5)(\alpha - 3)} \right] + \\
& + 4\pi G A_* A_{DM} \left[\frac{1}{r^{\alpha+\beta-2}} \frac{(\beta - 4)(\beta - 1)\eta_{DM} + (\alpha\eta_* - 1)(\beta - 5)}{(\beta - 5)(\beta - 3)(\alpha + \beta - 2)} + \right. \\
& \left. + \frac{R^2}{r^{\alpha+\beta}} \frac{\beta\eta_{DM}(3 - \beta) + \alpha\eta_*(5 - \beta)}{(\beta - 5)(\beta - 3)(\alpha + \beta)} \right] + \\
& + G A_* M_{BH} \left[\frac{1}{r^{\alpha+1}} \frac{1 - \alpha\eta_*}{\alpha + 1} + \frac{R^2}{r^{\alpha+3}} \frac{\alpha\eta_*}{\alpha + 3} \right]. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

E dall'equazione 3.12 otteniamo

$$\begin{aligned}
\rho_* \Delta_* = & 4\pi G A_*^2 \frac{R^2}{r^{2\alpha}} \frac{2\eta_*}{(\alpha - 5)(\alpha - 3)} + \\
& + 4\pi G A_* A_{DM} \frac{2\alpha R^2}{r^{\alpha+\beta}} \frac{\eta_*(\beta - 5) - \eta_{DM}(\beta - 3)}{(\beta - 5)(\beta - 3)(\alpha + \beta)} + \tag{3.25}
\end{aligned}$$

$$+ G A_* M_{BH} \frac{R^2}{r^{\alpha+3}} \frac{2\alpha\eta_*}{(\alpha + 3)}. \tag{3.26}$$

Per completezza riportiamo infine anche l'espressione della velocità di rotazione nel piano equatoriale

$$\begin{aligned}
v_c^2 = & R \frac{d\Phi(R, 0)}{dR} = 4\pi G A_* \frac{5 - \alpha - 2\eta_*}{R^{\alpha-2}(5 - \alpha)(3 - \alpha)} \\
& + 4\pi G A_{DM} \frac{5 - \beta - 2\eta_{DM}}{R^{\beta-2}(5 - \beta)(3 - \beta)} + \frac{GM_{BH}}{R}. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

3.5 Il raggio della sfera di influenza

Con l'aiuto delle formule appena scritte procediamo alla costruzione della funzione $\Delta\sigma_*$ introdotta nel caso di modelli power-law sferici. La situazione attuale è sicuramente più complessa dal punto di vista geometrico, e angoli di vista diversi porterebbero a campi diversi per la dispersione di velocità proiettata. Una vera e propria analisi della sfera di influenza (pur essendo algebricamente possibile per questa famiglia di modelli, vedi Appendice C) esula naturalmente dal presente lavoro di Tesi, e ci limitiamo pertanto a studiare alcuni casi semplici ma illustrativi. Scopo principale di questa prima analisi è capire come lo schiacciamento della galassia influisce sulle stime della sfera di influenza. Seguendo quanto fatto nel Capitolo 2, iniziamo considerando la grandezza σ^2 in equazione 3.25, limitandoci al caso $\beta = \alpha$ e $\eta_* = \eta_{DM}$. In tale semplice situazione l'espressione per $\Delta\sigma$ diventa

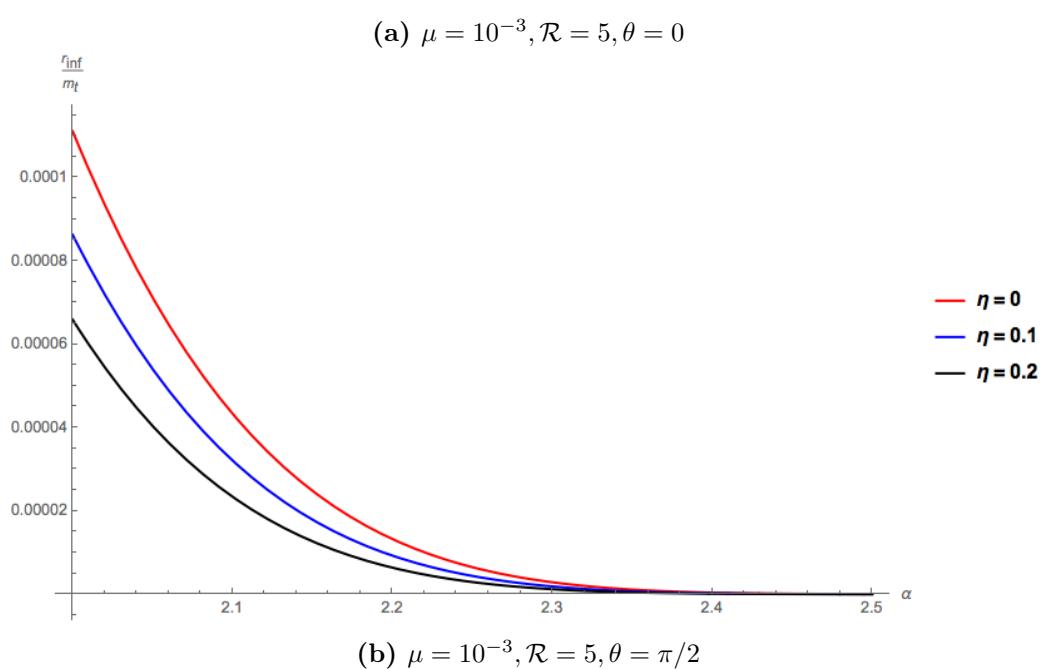
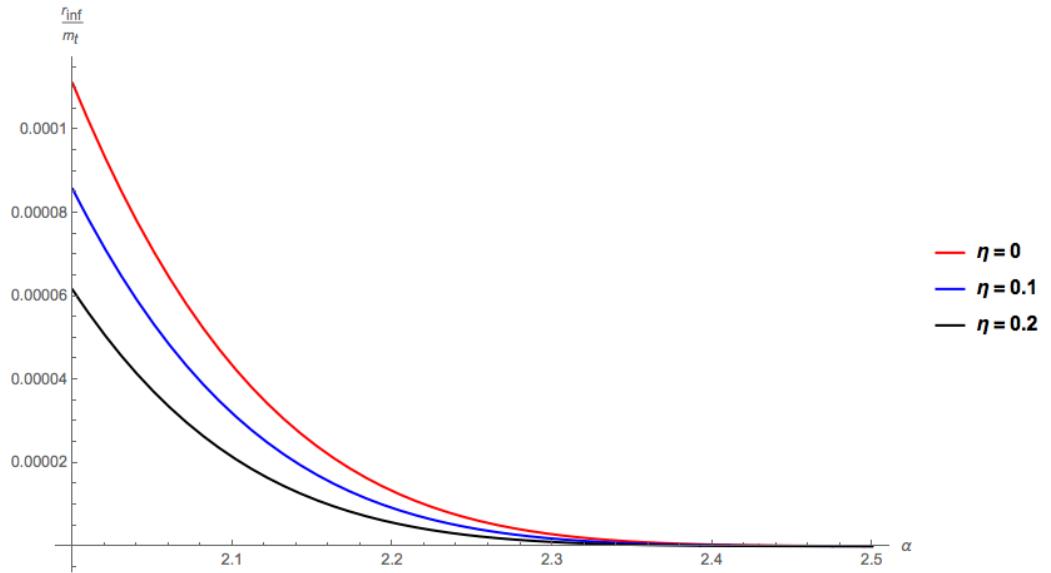


Figura 3.2: Andamento di r_{inf}/m_t per valori diversi del parametro di schiacciamento η_* . Nel primo pannello abbiamo $\theta = 0$ e nel secondo $\theta = \pi/2$.

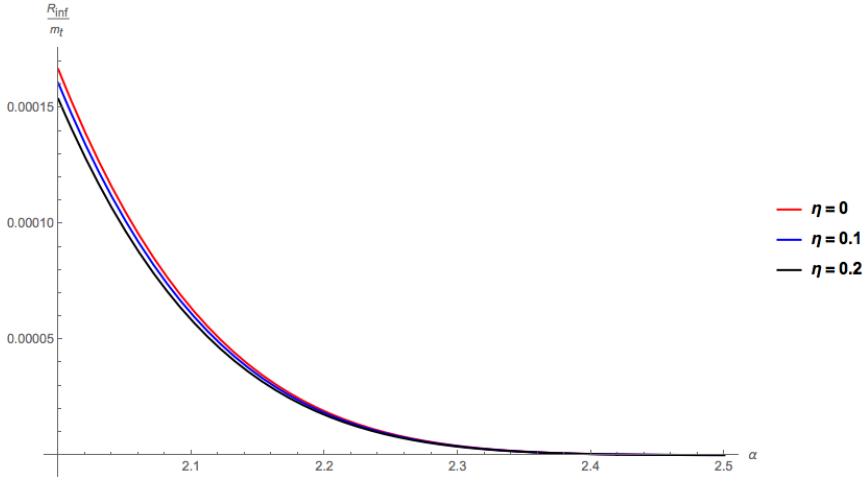


Figura 3.3: Il profilo R_{inf}/m_t ottenuto utilizzando equazione 3.27 della velocità della rotazione delle stelle nel piano equatoriale.

$$\Delta\sigma = \frac{M_{BH}}{A_*} \frac{1}{1 + A_{DM}/A_*} \frac{\frac{1}{r^{\alpha+1}} \frac{1 - \alpha\eta_*}{\alpha + 1} + \frac{R^2}{r^{\alpha+3}} \frac{\alpha\eta_*}{\alpha + 3}}{\frac{1}{r^{2\alpha-2}} \frac{(2\eta_*\alpha - 1)(\alpha - 5) + 4\eta_*}{2(\alpha - 5)(\alpha - 3)(\alpha - 1)} + \frac{R^2}{r^{2\alpha}} \frac{(4 - \alpha)\eta_*}{(\alpha - 5)(\alpha - 3)}}. \quad (3.28)$$

Alcune considerazioni possono essere ottenute immediatamente dalla formula precedente. La prima considerazione è che per fissati parametri del modello, e per fissato valore di $\Delta\sigma$, ponendo $R = r \sin \theta$, sarebbe possibile scrivere $r = r(\theta)$, la curva lungo la quale $\Delta\sigma$ ha il valore finito. La seconda considerazione riguarda la eliminazione delle costanti A_* e A_{DM} in termini della massa totale come ricavato nella sezione 3.3. Per la scelta dei parametri, nel nostro caso particolare, si ha

$$1 + \frac{A_{DM}}{A_*} = 1 + \mathcal{R} \quad (3.29)$$

e

$$\frac{M_{BH}}{A_*} = \mu \frac{4\pi(1 - \eta_*)}{3 - \alpha} m_t^{3 - \alpha}. \quad (3.30)$$

Troviamo infine,

$$\Delta\sigma = \frac{\mu(1 - \eta_*)}{(1 + \mathcal{R})(3 - \alpha)} \left(\frac{r}{m_t} \right)^{\alpha-3} \left[\frac{\frac{1 - \alpha\eta}{\alpha + 1} + \frac{\alpha\eta}{\alpha + 3} \sin^2 \theta}{\frac{(2\eta_*\alpha - 1)(\alpha - 5) + 4\eta_*}{2(\alpha - 5)(\alpha - 3)(\alpha - 1)} + \frac{(4 - \alpha)\eta_*}{(\alpha - 5)(\alpha - 3)} \sin^2 \theta} \right].$$

Nella Figura 3.2 viene illustrato l’andamento di $\Delta\sigma_*$ per $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$. Come vediamo, il raggio di influenza diminuisce all’aumentare il parametro di schiacciamento. Possiamo inoltre calcolare $\Delta\sigma_*$ utilizzando questa volta equazione 3.27, dalla quale otteniamo

$$\Delta\sigma_* = \frac{\mu q_*}{(1 + \mathcal{R})} \frac{5 - \alpha}{5 - \alpha - 2\eta_*} \left(\frac{R}{m_t} \right)^{\alpha-3}. \quad (3.31)$$

3.6 Soluzione esatta del modello ellissoide ad una componente con buco nero centrale

Consideriamo nuovamente la distribuzione di densità stellare data dall’equazione 3.14 nel campo di gravità del buco nero centrale,

$$\Phi_{BH} = -\frac{GM_{BH}}{r}; \quad r^2 = R^2 + z^2. \quad (3.32)$$

Le soluzioni dell’equazione di Jeans verticale (con 2-integrali) è data in Riciputi et al (2005) nel limite $\eta_* \rightarrow 0$, utilizzando il metodo dell’espansione omeoidale. Qui noi risolviamo il problema completo per un parametro di appiattimento (*flattening*) finita. Si noti che viene considerato soltanto il potenziale del buco nero centrale. Questo è accettabile quando si considerino regioni sufficientemente centrali della galassia. Fissando R ,

$$\rho_* \sigma^2 = \int_z^\infty \rho_* \frac{\partial \Phi}{\partial z'} dz' = \int_z^\infty \rho_* \frac{d\Phi}{dr'} \frac{z'}{r'} dz' = \int_r^\infty \rho_* \frac{d\Phi}{dr'} dr'. \quad (3.33)$$

Perciò, l’integrazione verticale può essere trasformato da z' a r' . Da notare che questa trasformazione vale per un potenziale sferico generico $\Phi(r)$ (come, per esempio, nel caso di un alone isotermo). Ovviamente, $r' = \sqrt{R^2 + z'^2}$. L’idea è quello di esprimere ρ_* in termini di r' : questa operazione può essere fatta sempre per le distribuzioni ellisoidali, e abbiamo

$$m_*^2 = R^2 + \frac{z^2}{q_*^2} = R^2 \left(1 - \frac{1}{q_*^2} \right) + \frac{r^2}{q_*^2} = \frac{r^2 - (1 - q_*^2)R^2}{q_*^2}. \quad (3.34)$$

L’equazione 3.33 diventa quindi

$$\rho_* \sigma^2 = \int_r^\infty \rho_* \frac{d\Phi_{BH}}{dr'} dr' = GA_* M_{BH} q_*^\alpha \int_r^\infty \frac{dr'}{[r'^2 - (1 - q_*^2)R^2]^{\alpha/2} r'^2}. \quad (3.35)$$

con il cambiamento di variabile $x' = \frac{r'}{R\sqrt{1-q^2}}$ otteniamo dopo qualche passaggio

$$\rho_* \sigma^2 = \frac{GA_* M_{BH} q_*^\alpha}{(1 - q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \frac{1}{R^{\alpha+1}} \int_x^\infty \frac{dx'}{(1 - 1/x'^2)^{\alpha/2} x'^{2+\alpha}}. \quad (3.36)$$

Cambiamo ancora variabile come $t = 1/x'$, ottenendo

$$\rho_* \sigma^2 = \frac{GA_* M_{BH} q_*^\alpha}{(1 - q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \frac{1}{R^{\alpha+1}} \int_0^y t^\alpha (1 - t^2)^{-\alpha/2} dt \quad (3.37)$$

dove,

$$y \equiv \frac{1}{x} = \frac{R \sqrt{1 - q_*^2}}{r} \leq 1. \quad (3.38)$$

Infine, ponendo $z = t^2$, si ottiene

$$\rho_* \sigma^2 = \frac{GA_* M_{BH} q_*^\alpha}{2(1 - q_*^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} \frac{1}{R^{\alpha+1}} \int_0^{y^2} (1 - z)^{-\alpha/2} z^{\frac{\alpha-1}{2}} dz. \quad (3.39)$$

Poichè la funzione incompleta di Beta di Eulero, è data da

$$B[x; a, b] = \int_0^x t^{a-1} (1 - t)^{b-1} dt \quad (a > 0), \quad (3.40)$$

si ha quindi

$$\begin{cases} \rho_* \sigma^2 = \frac{GA_* M_{BH} q_*^\alpha}{2(1 - q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \frac{1}{R^{\alpha+1}} B \left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2} \right] \\ y^2 = \frac{R^2 (1 - q_*^2)}{r^2} \end{cases} \quad (3.41)$$

Ora è interessante considerare il caso quasi sferico, $q_* \rightarrow 1$, e quindi $y \rightarrow 0$. Ci aspettiamo di ottenere l'ultimo termine in equazione 3.25. Mostriamo infatti che si ottiene il risultato aspettato. Dalla 3.40 è immediato mostrare che

$$B[x; a, b] \sim \frac{x^a}{a} + \frac{(1-b)x^{a+1}}{a+1} \quad x \rightarrow 0, \quad (3.42)$$

perciò dalla 3.41, per $y \rightarrow 0$,

$$B \left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2} \right] \sim y^{1+\alpha} \left(\frac{2}{1+\alpha} + \frac{\alpha y^2}{3+\alpha} \right), \quad (3.43)$$

e quindi dopo qualche passaggio

$$\rho_* \sigma^2 = \frac{GA_* M_{BH} q_*^\alpha}{2r^{\alpha+1}} \left[\frac{2}{1+\alpha} + \frac{\alpha R^2 (1 - q_*^2)}{(3+\alpha)r^2} \right]. \quad (3.44)$$

Consideriamo infine $q_* = 1 - \eta_*$ (con $\eta_* \rightarrow 0$). Al primo ordine in η_* otteniamo

$$\rho_* \sigma^2 = \frac{GA_* M_{BH}}{(3+\alpha)r^{\alpha+1}} \left[\frac{1}{\alpha+1} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\alpha \eta_*}{3+\alpha} \right], \quad (3.45)$$

che come vediamo coincide (dopo la normalizzazione) con il contributo del buco nero in equazione 3.25.

Passiamo adesso a considerare il termine $\rho_* \Delta_{*BH}$ che si ottiene risolvendo equazione 3.13. Iniziamo dimostrando un risultato notevole, il fatto che, quando ρ_* è stratificata su una superficie ellisoidale, allora l'integrale 3.13 può essere trasformato dall'integrazione su z all'integrazione su r . Infatti,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{d\Phi}{dr'} \frac{z'}{r'}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{d\Phi}{dr'} \frac{R}{r'}. \quad (3.46)$$

Inoltre,

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial R} = \frac{d\rho_*}{dm'} \frac{R}{m'}; \quad \frac{\partial \rho_*}{\partial z'} = \frac{d\rho_*}{dm'} \frac{z'}{q_*^2 m'}, \quad (3.47)$$

per cui in 3.13

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial R} \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \frac{\partial \rho_*}{\partial z'} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = R \left(1 - \frac{1}{q_*^2} \right) \frac{\rho'_*}{m'} \Phi' \frac{z'}{r'}, \quad (3.48)$$

ovvero

$$\rho_* \Delta_{*BH} = R^2 \left(1 - \frac{1}{q_*^2} \right) \int_z^\infty \frac{\rho'_* \Phi'}{m'} \frac{z' dz'}{r'}. \quad (3.49)$$

Dall'equazione precedente è apparente come nel caso di densità stellare sferica ($q_* = 1$), il potenziale sferico $\Delta_* = 0$.

Adesso, $\frac{\rho'_*}{m'}$ è una funzione di $m' = \sqrt{R^2 + \frac{z'^2}{q^2}}$ e possiamo nuovamente applicare la trasformazione data dalla 3.34, e otteniamo questa bellissima espressione

$$\rho_* \Delta = R \left(1 - \frac{1}{q_*^2} \right) \int_r^\infty \frac{d\rho_*}{dm'} \frac{d\Phi}{dr'} dr'. \quad (3.50)$$

Da notare che per $q \neq 1$ nel caso isotropo (quando l'equazione 3.25 diventa identica all'equazione della dinamica dei fluidi), $\overline{v_\varphi}^2$ non è cilindrica, In accordo con il Teorema di Poincarè e il Teorema di stratificazioni baroclini. Inoltre, in caso sferico, e per il profilo di densità decrescente monotona ($\rho'_* < 0$), le soluzioni fisiche richiedono $q \leq 1$, vale a dire che solo i sistemi oblati sono possibili. Occorre menzionare, la equazione 3.50 può essere ottenuta come un caso speciale delle equazioni in Barnabèt al. (2006), con $A(R) = 1, \rho(\Phi) = 1, B(m) = \rho_*, q_g = q, q_\Phi = 1$ e cambiando variabile con $l = r'$.

Svolgendo le derivate

$$\rho_* \Delta_* = \frac{GA_* M_{BH} \alpha (1 - q_*^2) R^2}{q_*^2} \int_r^\infty \frac{dr'}{m'^{\alpha+2} r'^2}, \quad (3.51)$$

ed usando nuovamente la trasformazione 3.34 si ottiene dopo noiosi calcoli

$$\begin{cases} \rho_* \Delta_* = \frac{GA_* M_{BH} \alpha q_*^\alpha}{2(1 - q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} R^{\alpha+1}} B \left[y^2; \frac{\alpha+3}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right] \\ y^2 = \frac{R^2(1 - q_*^2)}{r^2} \end{cases} \quad (3.52)$$

Questa espressione è particolarmente interessante, perché nel caso dell'equazione 3.12, ci sono due derivate, ed il calcolo di $\frac{\partial \rho_* \sigma^2}{\partial R}$ dall'equazione 3.41 produrrebbe altri due termini, che possono essere combinati in modo da ottenere l'equazione 3.52. Consideriamo nuovamente il caso quasi sferico. Dalla 3.40 otteniamo

$$B \left[y^2; \frac{\alpha+3}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right] \sim y^{3+\alpha} \left(\frac{2}{3+\alpha} + \frac{2+\alpha}{5+\alpha} y^2 \right), \quad (3.53)$$

e dall'equazione 3.52

$$\begin{aligned} \rho_* \Delta_* &= \frac{GA_* M_{BH} \alpha q^\alpha (1 - q^2) R^2}{2r^{3+\alpha}} \left[\frac{2}{3+\alpha} + \frac{2+\alpha}{5+\alpha} \frac{R^2(1 - q^2)}{r^2} \right] \\ &= GA_* M_{BH} \frac{2\eta\alpha R^2}{(3+\alpha)r^{3+\alpha}}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

in perfetto accordo con l'equazione 3.26.

Come verifica finale dell'equazione 3.52 in Appendice B mostriamo che questo risultato può essere ottenuto con algebra non banale dalle equazioni 3.41 e 3.12, ancora una volta dimostrando l'utilità di equazione 3.12 in applicazione.

Capitolo 4

Modelli sferici II: modelli di Jaffe a due componenti

In questo Capitolo torniamo a considerare modelli a simmetria sferica, nei quali però, a differenza che nel Capitolo 2, consideriamo un profilo di massa più realistico. Ovviamente i risultati per le regioni centrali sono interpretabili usando i risultati del Capitolo 2. Però per la rilevanza dei presenti modelli anche per altre applicazioni (Ciotti e Ziaeelorzad, in preparazione), ne presentiamo una trattazione sufficientemente approfondita. In termini qualitativi, questi modelli possono essere considerati un'estensione più realistica dei modelli di Jaffe in alone isotermo, introdotti e discussi da Ciotti, Morganti, de Zeeuw, (2009)[10].

4.1 I modelli

La densità di luminosità di molte galassie ellittiche può essere approssimata con una power-law nel raggio, sia nel caso di piccoli che di grandi raggi Ad esempio, la legge di Sersic[13] $R^{1/n}$ nelle regioni centrali ha un andamento de proiettato come $\rho_* \sim r^{-\frac{n-1}{n}}$ (Ciotti 1991 [14]). Inoltre simulazioni numeriche cosmologiche suggeriscono che la densità spaziale di massa negli aloni di materia oscura abbia una struttura simile. Da un punto di vista modellistico queste proprietà possono essere riassunte dalla seguente forma funzionale

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_c)^\alpha (1+r/r_c)^{\beta-\alpha}}. \quad (4.1)$$

Per quanto riguarda gli aloni di materia oscura, le simulazioni risultano ben descritte considerando $\beta = 3$ e $\alpha = 1$ (Navarro, Frenk & White 1995[15]). Nel caso delle galassie, una descrizione molto soddisfacente può essere ottenuta nel caso $\beta = 4$ e ponendo $\alpha = \beta$, si ottiene in questa maniera la famiglia dei cosiddetti “ γ -models”. La distribuzione di densità spaziale per i γ -models sferici è data da:

$$\rho(r) = \frac{3-\gamma}{4\pi} \frac{M_* r_c}{r^\gamma (r+r_c)^{4-\gamma}}, \quad (4.2)$$

$$M(r) = M_* \times \left(\frac{r}{r+r_c} \right)^{3-\gamma}. \quad (4.3)$$

dove M_* è la massa totale delle stelle, r_c rappresenta il raggio di scala, e $0 \leq \gamma < 3$ (Dehnen (1993) [16], Tremaine et al. (1994) [17]). In particolare per $\gamma = 2$ si hanno **Jaffe model** (Jaffe 1983 [18]) mentre per $\gamma = 1$ si hanno **Hernquist model** (Hernquist 1990 [19]).

Possiamo calcolare $\Phi(r)$ tramite equazione di Poisson e ottenendo il ben noto relazione :

$$\Phi(r) = \frac{GM_*}{r_c} \begin{cases} -\frac{1}{2-\gamma} \left[1 - \left(\frac{r}{r+r_c} \right)^{2-\gamma} \right], & (\gamma \neq 2), \\ \ln \frac{r}{r+r_c}, & (\gamma = 2). \end{cases} \quad (4.4)$$

È chiaro quindi che con buona approssimazione possiamo descrivere una galassia con le sovrapposizioni di un γ -model (in genere con $\gamma = 2$) e di un NFW profile. Risulta ovvio che il profilo di massa totale è ancora ben descritto da una distribuzione power-law con doppia slope. Per motivi che saranno chiari nello svolgimento del capitolo, noi considereremo modelli leggermente diversi, ovvero modelli nei quali la massa stellare è distribuita secondo una legge di Jaffe di massa M_* e raggio di scala r_* , e la massa totale da un'altra legge di Jaffe di massa totale M_T e raggio di scala r_t . In un lavoro in preparazione (Ciotti & Ziaeelorzad) questo approccio verrà esteso a famiglie di γ -models a due componenti e buco nero centrale.

Come anticipato prima, per $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$ sono inclusi rispettivamente i modelli di Hernquist (1990) e Jaffe (1983) come due casi speciali di questa famiglia di modelli. Un confronto con il profilo di de Vaucouleurs (1948) [20] mostra che questi γ -models rappresentano un'approssimazione ragionevole per le galassie ellittiche reali con il loro profilo di densità proiettato sul piano del cielo per un grande intervallo radiale.

La descrizione forse più nota per il profilo di brillanza superficiale delle galassie ellittiche è data dalla legge $R^{1/4}$ di *de Vaucouleurs*. Secondo questa legge empirica, la luminosità superficiale, in termini di magnitudine, si può esprimere come

$$I(R) = I_0 e^{-7.67(R/R_e)^{1/4}}, \quad (4.5)$$

dove R_e è il cosiddetto raggio effettivo, ovvero il raggio del cerchio contenente metà della luce totale dell'immagine della galassia.

Siccome R_e per definizione racchiude la metà della luce,

$$L(R_e) = \int_0^{R_e} 2\pi R \cdot I(R) dR = \frac{L_T}{2}, \quad (4.6)$$

dove nel caso della legge di Sersic (una generalizzazione della legge di *de Vaucouleurs* con importantissime applicazioni riguardanti struttura e dinamica delle galassie ellittiche e in particolare delle loro regioni centrali [21], [22], [23], [24])

$$L_T = \frac{2\pi m \Gamma(2m)}{b^{2m}}, \quad b \sim 2m - \frac{1}{3} + \frac{4}{405m} + \dots \quad (4.7)$$

(Ciotti 1991). Come noto la legge $R^{1/4}$ si ottiene per $m = 4$, così chè è anche possibile scrivere

$$\log \left(\frac{I}{I_e} \right) = -3.33071 \left\{ \left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right\}, \quad I_e = I(R_e). \quad (4.8)$$

La legge empirica $R^{1/4}$ descrive in maniera molto soddisfacente i profili di luminosità superficiale osservati per molte galassie ellittiche, ma sfortunatamente la sua deproiezione non può essere espressa in termini di funzioni elementari. Per tale motivo i γ -models sono molto utilizzati nelle applicazioni.

In questo capitolo descriveremo la distribuzione di densità stellare ρ_* e la distribuzione della densità totale ρ_T ($\rho_T = \rho_* + \rho_{DM}$) del sistema come una legge di Jaffe, che rappresenta un'ottima approssimazione per la deproiezione della legge di *de Vaucouleurs*.

4.1.1 Modello a due componenti

Seguendo l'approccio in Ciotti et al.(2009), costruiamo i modelli a due componenti, *non* aggiungendo direttamente l'alone di materia oscura come nei Capitoli 2 e 3 ma prescrivendo il profilo di densità totale ρ_T . In Ciotti et al.(2009) il profilo di densità totale era assunto essere $1/r^2$ (sfera isoterma singolare), in accordo con le osservazioni di dinamica e lenti gravitazionali, tali modelli hanno il grande vantaggio di essere abbastanza realistici e molto semplici dal punto di vista analitico, ma hanno lo svantaggio di avere un'energia di legame infinita, una velocità di fuga infinita, e una dispersione di velocità viriale infinita, tutti aspetti problematici nel caso di utilizzo per simulazioni numeriche. Con i modelli che presenteremo nel seguito, risolviamo anche questi problemi indicati sopra.

Il profilo di densità della distribuzione stellare nel modello di Jaffe è ottenuto per $\gamma = 2$, ovvero

$$\rho_*(r) = \frac{M_*}{4\pi r_*^3} \frac{1}{s^2(1+s)^2}, \quad (4.9)$$

dove M_* è la massa totale stellare, e $s \equiv r/r_*$ il raggio normalizzato al raggio di scala r_* .

A partire dalla 4.2, per la distribuzione di densità totale del sistema, come anticipato, consideriamo ancora un profilo di Jaffe,

$$\rho_T(r) = \frac{M_T}{2\pi} \frac{r_T}{r^2(r_t+r)^2}, \quad M_T(r) = M_T \frac{r}{r_T+r}. \quad (4.10)$$

con M_T massa totale,

Nel seguito del Capitolo poniamo $M_T/M_* = \mathcal{R} + 1$ e $\xi = r_t/r_*$, cosicché

$$M_T = M_*(\mathcal{R} + 1) \frac{s}{\xi + s}. \quad (4.11)$$

Si noti che questa scelta riconduce l'integrazione dell'equazione di Jeans ad uno dei casi considerati in Ciotti et al.(1996), pertanto permettendo un controllo ulteriore dei risultati. Notiamo che i risultati in Ciotti et al.(2009), si possono riottenere dai nostri modelli con la sostituzione formale

$$M_T \rightarrow \frac{v_0^2 r_T}{G}, \quad (4.12)$$

e considerando poi il limite $r_t \rightarrow \infty$. Indichiamo questa famiglia di modelli con il nome “JJ” per indicare che si tratta di due modelli di Jaffe.

4.1.2 Il buco nero centrale

Nel caso di un buco nero centrale nel modello dobbiamo aggiungere al potenziale della galassia, il contributo del buco nero

$$\Phi_{BH}(r) = -\frac{GM_{BH}}{r}, \quad (4.13)$$

dove M_{BH} è la massa del buco nero. In analogia a quanto fatto nel Capitolo 2, poichè le osservazioni mostrano che $M_{BH} \simeq 1.3 \times 10^{-3} M_*$ (Magorrian et al. (1998)[1], Merritt & Ferrarese (2001)[25]), otteniamo

$$M_{BH} = \mu M_*, \quad \mu \simeq 10^{-3} \quad (4.14)$$

4.2 Le equazioni di Jeans

Le equazioni di Jeans nel caso OM sono già state riportate nel Capitolo 2. In particolare, dobbiamo risolvere l'equazione 2.44, ottenendo i contributi isotropi (\mathcal{I}) e anisotropi (\mathcal{A}).

4.2.1 La parte isotropa

Consideriamo la funzione $\mathcal{I}(r) = \mathcal{I}_T(r) + \mathcal{I}_{BH}(r)$ nell'equazione 2.44. È composta da due contributi, quello dovuto al potenziale della distribuzione totale $\rho_T(r)$ sulle stelle, e quello dovuto al buco nero centrale. Per quanto riguarda il contributo del buco nero centrale, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{BH}(r) &= G \int_r^\infty \frac{\rho_*(r) M_{BH}}{r^2} dr = \frac{G\mu M_*^2}{4\pi r_*^4} \int_s^\infty \frac{dt}{t^4(1+t)^2} = \\ &= \frac{G\mu M_*^2}{4\pi r_*^4} \left[\frac{12s^3 + 6s^2 - 2s + 1}{3s^3(1+s)} + 4 \ln \frac{s}{1+s} \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

dove l'integrazione è elementare e non viene riportata. Per quanto riguarda il contributo di ρ_T , per $\xi \neq 1$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_T(r) &= G \int_r^\infty \frac{\rho_*(r) M_T(r)}{r^2} dr = \frac{GM_*^2(1+\mathcal{R})}{4\pi r_*^4} \int_s^\infty \frac{dt}{t^3(1+t)^2(\xi+t)} = \\ &= \frac{GM_*^2(1+\mathcal{R})}{4\pi r_*^4} \left[\frac{\ln(\xi+s)}{\xi^3(\xi-1)^2} + \frac{(3\xi-4)\ln(1+s)}{(\xi-1)^2} - \frac{(3\xi^2+2\xi+1)\ln s}{\xi^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2s^2(3\xi^2-\xi-1) + s(3\xi+2)(\xi-1) - \xi(\xi-1)}{2\xi^2(\xi-1)s^2(1+s)} \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

in accordo con l'equazione (A11) in Ciotti et al. 1996, dove si noti la correzione di tre segni all'interno della parentesi quadrata. È evidente che il caso $\xi = 1$ debba essere trattato separatamente, come limite o valutando direttamente l'integrale con $\xi = 1$. Dall'altra parte ciò equivale semplicemente a calcolare la funzione \mathcal{I}_{**} per un modello di Jaffe per cui si ottiene l'equazione (A5) in Ciotti et al. (1996), ovviamente modificata per la diversa normalizzazione. Per completezza riportiamo il risultato:

$$\mathcal{I}_T = -\frac{GM_*^2(1+\mathcal{R})}{4\pi r_*^4} \left[\frac{(6s^2 + 6s - 1)(2s + 1)}{2s^2(1+s)} + 6 \ln \frac{s}{1+s} \right]. \quad (4.17)$$

Per applicazioni future si noti che il valore di $\sigma_*(0)$, nel caso isotropo, è finito e vale

$$\sigma_{r*}^2(0) = \frac{G(1+\mathcal{R})M_*}{2r_*\xi}. \quad (4.18)$$

4.2.2 La parte anisotropa

Considerando anisotropia di tipo OM andiamo a calcolare i due componenti della parte anisotropa $A(r)$ dell'equazione 2.44. il termine dovuto al buco nero A_{BH} è facile da calcolare e abbiamo

$$\begin{aligned} A_{BH} &= G \int_r^\infty \rho_* M_{BH} dr = \frac{GM_*^2\mu}{4\pi r_*^2} \int_s^\infty \frac{dt}{(1+t)^2 t^2} = \\ &= \frac{GM_*^2\mu}{4\pi r_*^2} \left[\frac{1+2s}{s(1+s)} + 2 \ln \frac{s}{1+s} \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

In maniera analoga calcoliamo il termine A_T dovuto alla distribuzione totale e otteniamo (Ciotti et al. 1996) per $\xi \neq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_T &= G \int_r^\infty \rho_*(r) M_T(r) dr = \frac{GM_*^2(1+\mathcal{R})}{4\pi r_*^2} \int_s^\infty \frac{dt}{t(1+t)^2(\xi+t)} = \quad (4.20) \\ &= \frac{GM_*^2(1+\mathcal{R})}{4\pi r_*^2} \left[\frac{\ln(\xi+s)}{\xi(\xi-1)^2} + \frac{(\xi-2)\ln(1+s)}{(\xi-1)^2} - \frac{\ln s}{\xi} - \frac{1}{(1+s)(\xi-1)} \right]. \end{aligned}$$

Analogamente alla parte isotropa, nel caso $\xi = 1$ si ottiene (Ciotti et al. 1996)

$$\mathcal{A}_T = -\frac{GM_*^2(1+\mathcal{R})}{4\pi r_*^4} \left[\frac{2s+3}{2(1+s)^2} + \ln \frac{s}{1+s} \right]. \quad (4.21)$$

Nel caso generale con anisotropia è possibile notare che, se $r_a \neq 0$, allora $\sigma_*^2(0) = \sigma_{*is}^2$ mentre se $r_a = 0$, allora $\sigma_{r*}^2 \propto -\ln s$ e quindi diverge.

4.3 Positività e monotonicità dell'alone

Prima di passare allo studio del comportamento di $\Delta\sigma_*$ in funzione della distanza dal centro e dei parametri della galassia, avendo definito $\rho_{DM} = \rho_T - \rho_*$, è importante studiare le condizioni necessarie per avere positività e monotonicità radiale della distribuzione di densità dell'alone di materia oscura. Curiosamente risulta possibile fare questa analisi per l'intera famiglia di γ -models in maniera analitica. Mentre la richiesta di positività è (chiaramente) naturale un breve commento è necessario per giustificare il calcolo relativo alla monotonicità dell'alone. Infatti, una conseguenza di un teorema relativo a sistemi sferici isotropi (Ciotti & Pellegrini 1992) mostra che la richiesta di monotonicità della densità in funzione del potenziale è necessaria per la positività della funzione di distribuzione nello spazio delle fasi. Poiché per il secondo Teorema di Newton il potenziale gravitazionale di sistemi sferici è necessariamente monotono, ne segue che il profilo di densità debba avere una funzione monotona del raggio, da cui la nostra richiesta.

4.3.1 Positività dell'alone

Il profilo di densità di un γ -model sferico è dato dall'equazione 4.2, con $0 \leq \gamma < 3$. Definiamo in generale un γ -model a due componenti in analogia ai modelli di Jaffe a due componenti in sezione 4.1.1. Pertanto questa famiglia più generale è composta da una parte stellare con $M = M_*$, $r_c = r_*$, in equazione 4.2, mentre la distribuzione *totale* $\rho_T(r) = \rho_*(r) + \rho_{DM}(r)$ è un altro γ model con $M = M_T$, $r_c = r_T$.

Poniamo,

$$M_T = \mathcal{R}_T M_*, \quad \xi = \frac{r_t}{r_*}, \quad s = \frac{r}{r_*}. \quad (4.22)$$

Pertanto la prima condizione richiesta, ovvero che la massa totale sia maggiore della massa stellare, è che

$$\mathcal{R}_T = 1 + \mathcal{R} \geq 1 \quad (4.23)$$

Vogliamo adesso determinare le condizioni per \mathcal{R}_T , ξ e γ tali che $\rho_{DM} = \rho_T(r) - \rho_*(r) \geq 0$ per $r \geq 0$ e per un valore scelto di γ .

$$\begin{aligned} \rho_{DM} &= \frac{3-\gamma}{4\pi} \left[\frac{M_T r_t}{r^\gamma (r_t + r)^{4-\gamma}} - \frac{M_* r_*}{r^\gamma (r_* + r)^{4-\gamma}} \right] \\ &= \frac{3-\gamma M_*}{4\pi r_*^3 s^\gamma} \left[\frac{\mathcal{R} \xi}{(\xi + s)^{4-\gamma}} - \frac{1}{(1+s)^{4-\gamma}} \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

La condizione di positività è quindi

$$\frac{\mathcal{R}_T \xi}{(\xi + s)^{4-\gamma}} \geq \frac{1}{(1+s)^{4-\gamma}}, \quad s \geq 0, \quad (4.25)$$

ovvero

$$\mathcal{R}_T \xi (1+s)^{4-\gamma} \geq (\xi+s)^{4-\gamma}. \quad (4.26)$$

Definiamo

$$A \equiv (\mathcal{R}_T \xi)^{\frac{1}{4-\gamma}}. \quad (4.27)$$

La equazione 4.26 diventa, $A + As \geq \xi + s$, ovvero

$$(A-1)s + A - \xi \geq 0. \quad (4.28)$$

La 4.28 è una retta in funzione di s . Necessariamente $A \geq 1$, perché altrimenti esisterebbe un valore di s tale che valori più grandi di s renderebbero negativa la 4.28 a differenza di quanto richiesto. Perciò dalla 4.27 abbiamo,

$$A \geq 1 \Leftrightarrow \mathcal{R}_T \cdot \xi \geq 1 \Leftrightarrow \mathcal{R}_T \geq \frac{1}{\xi}. \quad (4.29)$$

Una volta soddisfatta la prima condizione, la seconda condizione è determinata dal valore per l'equazione 4.28 per $s = 0$. Dobbiamo quindi avere $A \geq \xi$, ovvero, ancora dalla equazione 4.27

$$\mathcal{R}_T \geq \xi^{3-\gamma}. \quad (4.30)$$

Condizione necessaria e sufficiente per avere $\rho_{DM}(r) \geq 0$ è quindi data dalle equazioni 4.23, 4.29, 4.30

$$\mathcal{R}_T \geq \max \{1, 1/\xi, \xi^{3-\gamma}\}. \quad (4.31)$$

È possibile semplificare ancora la 4.31. Infatti se $\xi > 1$, allora $\xi^{3-\gamma} > 1$ perchè $\gamma < 3$ mentre se $\xi < 1$ allora $1/\xi > 1$, pertanto in tutta generalità

$$\mathcal{R}_T \geq \max \{1/\xi, \xi^{3-\gamma}\}. \quad (4.32)$$

In funzione di \mathcal{R}_T, ξ come definito nel Capitolo 2 e 3, si ha $\mathcal{R}_T = 1 + \mathcal{R}$. Quindi nel caso di modelli di Jaffe a due componenti, la condizione di positività è finalmente

$$\mathcal{R} \geq \max \{1/\xi, \xi\} - 1. \quad (4.33)$$

4.3.2 Monotonicità dell'alone

Ritorniamo all'espressione 4.24, e chiediamo le condizioni su ξ affinchè $d\rho_{DM}/dr \leq 0$ per un scelto valore di γ . Questa richiesta come detto sopra è importante per la positività della phase-space DF per la DM. È possibile mostrare che il caso di γ generico può essere affrontato analiticamente, ma i calcoli sono molto lunghi e per ragioni di spazio non li riportiamo qui, limitandoci al caso di interesse $\gamma = 2$.

Consideriamo quindi la funzione

$$f = \frac{A}{s^2(\xi+s)^2} - \frac{1}{s^2(1+s)^2}, \quad A \equiv \mathcal{R}_T \xi. \quad (4.34)$$

Ora calcoliamo $f' = df/ds$ e imponiamo che $f' \leq 0$. Dopo qualche manipolazione arriviamo alla richiesta

$$A \geq g(s) \equiv \frac{(\xi+s)^3}{(1+s)^3} \frac{1+2s}{\xi+2s}; \quad s \geq 0. \quad (4.35)$$

Si noti che $\lim_{s \rightarrow \infty} g = 1$ per $\xi \geq 0$ certamente quindi dobbiamo avere $A \geq 1$. Affinchè la 4.35 sia soddisfatta è necessario e sufficiente che

$$A \geq \sup_{[0, \infty[} g. \quad (4.36)$$

Studiamo la funzione g . Abbiamo $g(0) = \xi^2$ e

$$g'(s) = \frac{(1-\xi)[10s^2 + 4(1+\xi)s + \xi](\xi+s)^2}{(\xi+2s)^2(1+s)^4}, \quad (4.37)$$

quindi g decresce per $\xi > 1$ e g cresce per $\xi < 1$. Per cui

$$\begin{cases} \xi \leq 1; & A \geq g(\infty) = 1 \iff \mathcal{R}_T \geq 1/\xi \\ \xi \geq 1; & A \geq g(0) = \xi^2 \iff \mathcal{R}_T \geq \xi \end{cases} \quad (4.38)$$

Ma queste sono esattamente le condizioni per la positività 4.32 già ottenute per i modelli JJ, *abbiamo provato quindi che la condizione di positività per l'alone di materia oscura coincide con la condizione di monotonicità decrescente per i modelli JJ*.

4.4 La sfera di influenza spaziale

Ripetendo quanto fatto nel Capitolo 2, considerando adesso nuovamente l'andamento della funzione $\Delta\sigma_*$ restringendoci inizialmente al caso isotropo. Poichè i modelli sono adesso più realistici, non è necessario considerare il caso in cui alone di materia oscura e stelle siano fra loro paralleli. Dall'equazione 2.50 si ottiene,

$$\Delta\sigma_* = \frac{\mathcal{I}_{BH}}{\mathcal{I}_T}, \quad (4.39)$$

dove, sostituendo i due termini \mathcal{I}_{BH} e \mathcal{I}_T , rispettivamente dalle equazioni 4.15 e 4.16. In Figura sono mostrati alcuni casi importanti. Si noti che a differenza di quanto è possibile fare con i modelli power-law, dove l'espressione per $\Delta\sigma_*$ è così semplice che è possibile esplicitare la dipendenza di r_{inf} da $\Delta\Sigma_*$ (e quindi illustrare il valore di r_{inf} per scelto $\Delta\sigma_*$), questo non è adesso possibile per la maggiore complicazione delle funzioni \mathcal{I} e \mathcal{A} che non

sono più invertibili esplicitamente. Pertanto i risultati di questo Capitolo vengono illustrati in maniera diversa, ovvero mostriamo l'andamento di $\Delta\sigma_*$ in funzione di s , nei due casi speciali $r_a = \infty$ (isotropo) ed $r_a = 0$ (caso totalmente radiale). Il confronto con i grafici di Capitolo 2 viene adesso fatto andando a graficare la linea orizzontale $\Delta\sigma_* = 1$ e andando successivamente a leggere il valore corrispondente di s sull'asse delle ascisse.

Si noti come il valore del riferimento $\Delta\sigma_* = 1$ viene raggiunto molto più internamente che nel caso radiale, conseguenza naturale del valore molto più grande della dispersione di velocità nelle regioni centrali per $r_a = 0$.

Sorprendentemente, è possibile calcolare esplicitamente la proiezione della dispersione di velocità nel caso isotropo e nel caso totalmente anisotropo ($r_a = 0$). I risultati sono dati in Ciotti e Ziaeelorzad (in preparation).

4.5 Energetica e teorema viriale

A differenza dei modelli introdotti nei capitoli 2 (per i quali ovviamente queste grandezze divergono), in questo caso è interessante calcolare il valore dell'energia potenziale gravitazionale e dell'energia viriale di interazione.

Il teorema del viriale in forma tensoriale è dato da

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk}, \quad (4.40)$$

dove I_{jk}, T_{jk}, W_{jk} e Π_{jk} sono rispettivamente, il tensore del momento di inerzia, il tensore dell'energia cinetica dei moti “ordinati”, il tensore dell'energia potenziale e il tensore dell'energia cinetica dei moti “disordinati”. Tali tensori come ben noto (e.g. Binney e Tremaine 2008) sono definiti da

$$I_{jk} \equiv \int \rho x_i x_k d^3 \mathbf{x}, \quad (4.41)$$

$$K_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3 \mathbf{x} = T_{jk} + \frac{1}{2} \Pi_{jk}, \quad (4.42)$$

dove

$$T_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3 \mathbf{x}, \quad ; \quad \Pi_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \rho \sigma_{jk}^2 d^3 \mathbf{x}. \quad (4.43)$$

Infine,

$$W_{jk} = - \int \rho x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}. \quad (4.44)$$

Nel nostro caso siamo interessati a sistemi all'equilibrio, pertanto il Teorema del Viriale in forma scalare per la componente stellare nella buca di potenziale totale (materia oscura, stelle e buco nero centrale) diventa

$$2K_* = -W_*, \quad (4.45)$$

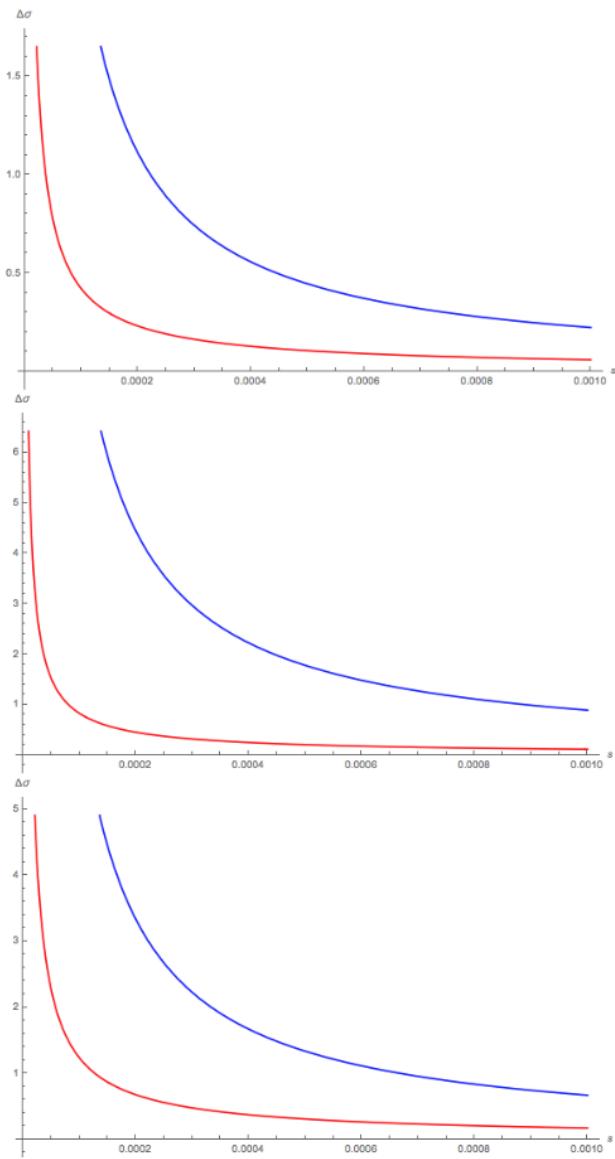


Figura 4.1: Andamento radiale nelle regioni centrali del modello di Jaffe a due componenti dell'indicatore $\Delta\sigma_*$ nei due casi limiti di isotropia ($r_a = \infty$, linea blu) e anisotropia radiale totale ($r_a = 0$, linea rossa). I valori dei parametri sono $\mu = 10^{-3}$, $\mathcal{R} = 5$ e dall'alto verso basso rispettivamente con $\xi = 2$, $\xi = 4$ e $\xi = 6$.

dove

$$W_* = - \int \rho_* \langle \bar{\mathbf{x}}, \nabla \Phi_T + \nabla \Phi_{BH} \rangle d^3 \mathbf{x} = W_{*T} + W_{*BH}. \quad (4.46)$$

Poiché il modello è a simmetria sferica,

$$W_{*T} = -G4\pi \int_0^\infty r \rho_*(r) M_T(r) dr \quad \text{e} \quad W_{*BH} = -4\pi G M_{BH} \int_0^\infty r \rho_*(r) dr. \quad (4.47)$$

Si noti che W_{*BH} diverge, come conseguenza dell'andamento di ρ_* vicino all'origine. Pertanto il Teorema del Viriale implica che anche l'integrale su tutto il volume della dispersione di velocità diverga quando si consideri il contributo del buco nero centrale. Si può infatti dimostrare che l'integrale di $\rho \sigma_{*BH}^2$ diverge nelle regioni centrali. Per tale motivo nel seguito valuteremo i contributi al Teorema del Viriale soltanto della galassia. Una semplice integrazione mostra che per $\xi \neq 1$

$$W_{*T} = -\frac{GM_*^2(1+\mathcal{R})}{r_*^2} \frac{\xi - 1 - \ln \xi}{(\xi - 1)^2}. \quad (4.48)$$

Per $\xi = 1$

$$W_{*T} = -\frac{GM_*^2(1+\mathcal{R})}{2r_*}. \quad (4.49)$$

Con la sostituzione indicata alla fine della Sezione 4.11 e con il limite per $r_t \rightarrow \infty$, è immediato dimostrare che $W_{*T} = -GM_* v_0^2$, come discusso in Ciotti et al. (2009). Ritorneremo su questo punto anche nel caso di modelli ellissoidali nel Capitolo 5, facendo vedere che in realtà questo risultato è più generale di quanto ottenuto qui. Le espressioni 4.48 e 4.49 sono particolarmente interessanti in quanto possono essere applicate a considerazioni dinamiche che si ricavano da osservazioni di galassie ad alta redshift. Infatti dal Teorema del Viriale proiettato (e.g. Ciotti 1994) risulta che la dispersione di velocità di apertura quando estesa a tutto l'oggetto è indipendente dal contenuto di anisotropia e coincidente con la dispersione di velocità viriale. Su questo punto di vista l'espressione 4.48 è il coefficiente da usare per trasformare gli osservabili in informazioni sulla massa del sistema (e.g. Vanzella et.al 2016[26])

Passiamo infine a considerare la possibilità di valutare esplicitamente i vari contributi all'energia potenziale del modello. Questo è uno dei motivi principali per i quali i modelli presenti sono un significativo avanzamento rispetto a quelli isotermi descritti in Ciotti 2009. Innanzitutto ricordiamo che soltanto per un sistema autogravitante si ha in generale

$$W = U = \frac{1}{2} \int \rho \phi d^3 \mathbf{x}. \quad (4.50)$$

Nel nostro caso la densità stellare non è un sistema autogravitante (a meno del caso speciale $\mu = 0$, $\mathcal{R} = 0$), per cui dovremmo considerare altri termini. Quelli di interesse sono qui elencati:

$$U_{**} = \frac{1}{2} \int \rho_* \Phi_* d^3 \mathbf{x} = W_{**}, \quad (4.51)$$

$$U_{*h} = \int \rho_* \Phi_h d^3 \mathbf{x}. \quad (4.52)$$

Si noti che $U_{*BH} = - \int \rho_* \frac{GM_{BH}}{r} d^3 \mathbf{x}$ diverge. Questo avviene perché per una distribuzione qualunque

$$W_{*BH} = - \int 4\pi G \rho_* \frac{M_{BH}}{r^2} r dr = U_{*BH}, \quad (4.53)$$

e già sappiamo che W_{*BH} diverge. Inoltre

$$\begin{aligned} U_{*T} \equiv U_{**} + U_{*h} &= 2U_{**} + U_{*h} - U_{**} = \int \rho_* (\Phi_* + \Phi_h) d^3 \mathbf{x} - \frac{1}{2} \int \rho_* \Phi_* d^3 \mathbf{x} \\ &= \int \rho_* \Phi_T d^3 \mathbf{x} - \frac{1}{2} \int \rho_* \Phi_* d^3 \mathbf{x} = U_{*\Phi_T} - U_{**}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

dove i due contributi $U_{*\Phi_T}$ e U_{**} sono facilmente calcolabili:

$$U_{**} = \frac{1}{2} \frac{GM_*}{r_*^2} \int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^2} \ln \frac{s}{1+s} = -\frac{GM_*^2}{2r_*}, \quad (4.55)$$

$$U_{*\Phi_T} = \frac{GM_*^2}{\xi r_*} \int \ln \frac{s}{\xi+s} \frac{1}{(1+s)^2} ds = -\frac{GM_*^2(1+\mathcal{R})}{r_*} \frac{\ln \xi}{\xi-1}. \quad (4.56)$$

Notiamo che nel caso limite $\mathcal{R} = 0$, la disequazione 4.33 impone $\xi = 1$, da cui ritroviamo il risultato 4.55 (senza ovviamente il fattore $1/2$). Con $\xi = 1$ otteniamo

$$U_{*\Phi_T} = -\frac{GM_*^2(1+\mathcal{R})}{r_*}. \quad (4.57)$$

Sostituendo i valori dei termini $U_{*\Phi_T}$ e U_{**} nell'equazione 4.54, troviamo

$$U_{*T} = -\frac{GM_*^2}{r_*} \frac{\ln \xi}{\xi-1} + \frac{GM_*^2}{2r_*}. \quad (4.58)$$

Abbiamo inoltre $U_{*h} = U_{*T} - U_{**}$, quindi calcoliamo U_{*h} utilizzando le equazioni 4.55 e 4.58

$$U_{*h} = -\frac{GM_*^2(1+\mathcal{R})}{r_*} \frac{\ln \xi}{\xi-1} + \frac{GM_*^2}{r_*}. \quad (4.59)$$

Questa parte finale del capitolo non ha implicazioni dirette per il problema della sfera di influenza, ma è una utile appendice per le proprietà dei

modelli di Jaffe a due componenti, rilevanti per questioni di energetica delle atmosfere gassose in galassie ellittiche. Una trattazione completa di questi aspetti è in Ciotti e Ziaeelorzad (in preparazione).

Capitolo 5

Modelli assisimmetrici II: modelli di Jaffe a due componenti

In questo Capitolo finale introduciamo la famiglia più generale e realistica di modelli considerati in questo lavoro di tesi, ovvero modelli di Jaffe ellisoidali a due componenti, nei quali la distribuzione di densità totale segue una legge di Jaffe, con schiacciamento e massa totale considerati parametri liberi. La parte stellare segue un'altra legge di Jaffe con massa e schiacciamento che possono anche variarsi arbitrariamente.

Il potenziale gravitazionale di questi modelli, così come per quelli del Capitolo 3, è ottenuto col metodo dell'espansione omeoidale e le equazioni di Jeans sono risolte nell'ipotesi di funzione di distribuzione a due integrali. Il contributo della dispersione di velocità azimutale e della velocità di rotazione ordinata è ancora definito usando la decomposizione di Satoh.

Data la complessità di questi ultimi modelli, che sono l'analogo ellisoidale dei modelli sferici del Capitolo 4 e i vincoli naturali posti da un lavoro di Tesi, per questa famiglia di modelli presentiamo soltanto una analisi generale del problema, limitandoci allo studio della positività dell'alone di materia oscura¹e della sua monotonicità in funzione dei parametri del modello. Mostriamo poi come sia possibile risolvere le equazioni di Jeans per schiacciamento qualunque nel caso di nel caso di galassia ellisoidale di Jaffe con buco nero centrale dominante in assenza di materia oscura. Questa situazione è applicabile ai modelli con materia oscura quando ci si limita alle regioni centrali.

¹Per quanto riguarda la monotonicità, il problema è molto più complesso che non nel caso sferico, poiché le isodense della materia oscura *non* sono in genere ellisoidali e considerazioni geometriche non elementari sono richieste. Abbiamo risolto il problema ma la trattazione è troppo complessa per questo lavoro di Tesi (Ciotti e Ziaeelorzad, in preparazione).

Per questi modelli calcoliamo inoltre alcune quantità globali di interesse generali, come l'energia gravitazionale e la quantità W che compare nel Teorema del Viriale. Questo Capitolo deve quindi essere considerato come un lavoro preparatorio per uno studio più approfondito che è già in corso.

5.1 I modelli

Come anticipato, trattiamo i “ γ -models” ellisoidali a due componenti nel caso particolare $\gamma = 2$, ovvero i modelli di Jaffe con schiacciamento. La distribuzione di densità stellare in questo caso è

$$\rho_* = \frac{M_*}{4\pi q_*} \frac{r_*}{m_*^2(r_* + m_*)^2}, \quad (5.1)$$

dove $q_* = 1 - \eta_*$, $m_* = R^2 + z^2/q_*^2$ e con M_* e r_* intendiamo rispettivamente la massa stellare e una lunghezza di scala.

La distribuzione di densità totale $\rho_g = \rho_* + \rho_{DM}$ è data da una forma funzionale simile a quella stellare (un altro modello di Jaffe schiacciato), ma ovviamente con parametri diversi

$$\rho_g = \frac{M_t}{4\pi q_t} \frac{r_t}{m_t^2(r_t + m_t)^2}, \quad (5.2)$$

con $q_t = 1 - \nu$, $m_t^2 = R^2 + z^2/q_t^2$, e in analogia con la parte stellare, M_t e r_t indicano la massa totale e il raggio di scala totale del modello.

È importante notare che mentre ρ_* e ρ_g sono stratificati su ellisoidi, la distribuzione di densità di materia oscura ρ_{DM} non lo è, a meno che $q_t = q_*$. Questo aspetto del problema rende lo studio della monotonicità non elementare.

5.2 Positività e monotonicità dell’alone di materia oscura

Data la definizione della distribuzione della materia oscura ($\rho_{DM} = \rho_g - \rho_*$), ci domandiamo quali siano le condizioni che devono soddisfare i parametri per avere una distribuzione non negativa. L’analisi di monotonicità (che può essere eseguita analiticamente), verrà illustrata in un articolo in preparazione (Ciotti e Ziaeelorzad, in preparazione). Ricordiamo infatti che nel caso sferico la richiesta di monotonicità è conseguenza della positività della funzione di distribuzione.

5.2.1 Positività dell’alone

Trattiamo in modo generale la positività del profilo di densità ρ_{DM} , considerando la famiglia più generale di modelli $\gamma\gamma$ schiacciati (ponendo $\gamma = 2$ otteniamo i risultati per i modelli di JJ). Partiamo dalle equazioni 5.1 e 5.2 e abbiamo,

$$\begin{aligned}\rho_{DM} &= \frac{3-\gamma}{4\pi} \left[\frac{M_T r_t}{q_t m_t^\gamma (r_t + m_t)^{4-\gamma}} - \frac{M_* r_*}{q_* m_*^\gamma (r_* + m_*)^{4-\gamma}} \right] \\ &= \frac{(3-\gamma)M_*}{4\pi r_*^3} \left[\frac{\mathcal{R}_t a}{q_t s_t^\gamma (a + s_t)^{4-\gamma}} - \frac{1}{q_* s_*^\gamma (1 + s_*)^{4-\gamma}} \right]\end{aligned}\quad (5.3)$$

dove $s_t = m_t/r_*$ ed $s_* = m_*/r_*$. Poniamo inoltre

$$M_t = \mathcal{R}_T M_*, \quad a = \frac{r_t}{r_*}, \quad s = \frac{r}{r_a} \quad (5.4)$$

Procediamo adesso allo studio della positività. Passando a coordinate sferiche

$$R = r \sin \theta \quad , \quad z = r \cos \theta, \quad (5.5)$$

si ha

$$s_t = s \Omega_t \quad , \quad s_* = s \Omega_*, \quad (5.6)$$

dove le due funzioni angolari sono date da

$$\Omega_t^2 \equiv \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{q_t^2} \quad , \quad \Omega_*^2 \equiv \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{q_*^2}. \quad (5.7)$$

Notiamo che $\Omega_t \neq 0$, $\Omega_* \neq 0$ e la ?? può essere scritta come

$$\rho_{DM} = \frac{(3-\gamma)M_*}{4\pi r_*^3 s^\gamma} \left[\frac{\mathcal{R}_T a}{q_t \Omega_t^\gamma (a + s \Omega_t)^{4-\gamma}} - \frac{1}{q_* \Omega_*^\gamma (1 + s \Omega_*)^{4-\gamma}} \right]. \quad (5.8)$$

La condizione di positività $\rho_{DM} \geq 0$ diventa quindi

$$\mathcal{R}_T \left(\frac{q_*}{q_t} \right) \left(\frac{\Omega_*}{\Omega_t} \right)^\gamma (1 + s \Omega_*)^{4-\gamma} \geq (a + s \Omega_t)^{4-\gamma}, \quad \text{per } s \geq 0, \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (5.9)$$

Per procedere con lo studio della 5.9 definiamo

$$A \equiv \mathcal{R}_T a \frac{q_*}{q_t} \left(\frac{\Omega_*}{\Omega_t} \right)^\gamma, \quad B \equiv A^{\frac{1}{4-\gamma}}, \quad (5.10)$$

da qui richiediamo che

$$B(1 + s \Omega_*) \geq (a + s \Omega_t), \quad (5.11)$$

ovvero

$$(B \Omega_* - \Omega_t)s + B - a \geq 0 \quad , \quad s \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (5.12)$$

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento usato per discutere l'equazione 4.28, ottenendo adesso per le due condizioni di positività del termine noto e del coefficiente angolare

$$B \geq \frac{\Omega_t}{\Omega_*} \Rightarrow \mathcal{R}_t a \frac{q_*}{q_t} \left(\frac{\Omega_*}{\Omega_t} \right)^\gamma \geq \left(\frac{\Omega_t}{\Omega_*} \right)^{4-\gamma} \Rightarrow \mathcal{R}_T a \frac{q_*}{q_t} \geq \max_{0 \leq \theta \leq \pi} \left(\frac{\Omega_t}{\Omega_*} \right)^4, \quad (5.13)$$

Inoltre,

$$B \geq a \Rightarrow \mathcal{R}_T a \frac{q_*}{q_t} \left(\frac{\Omega_*}{\Omega_t} \right)^\gamma \geq a^{4-\gamma} \Rightarrow \mathcal{R}_T a^{\gamma-3} \frac{q_*}{q_t} \geq \max_{0 \leq \theta \leq \pi} \left(\frac{\Omega_t}{\Omega_*} \right)^\gamma. \quad (5.14)$$

Una volta determinati i massimi delle due equazioni precedenti, il valore di \mathcal{R}_T per assicurare la positività di ρ_{DM} è data da

$$\mathcal{R} \geq \max \{1, \mathcal{R}_T[5.13], \mathcal{R}_T[5.14]\}. \quad (5.15)$$

Poichè dobbiamo valutare il massimo delle funzioni $(\Omega_t/\Omega_*)^\gamma$ e $(\Omega_t/\Omega_*)^4$ studiamo il problema più generale della determinazione del massimo di $f = (\omega_t/\Omega_*)^\alpha$, con $\alpha \geq 0$, in generale

$$\frac{\Omega_t}{\Omega_*} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta / q_t^2}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta / q_*^2}} = \sqrt{\frac{1 + e_t^2 \cos^2 \theta}{1 + e_*^2 \cos^2 \theta}}, \quad (5.16)$$

dove,

$$e_t^2 \equiv \frac{1}{q_t^2} - 1, \quad e_*^2 \equiv \frac{1}{q_*^2} - 1. \quad (5.17)$$

Calcoliamo la derivata della funzione f rispetto a θ e otteniamo,

$$\frac{df}{d\theta} = \alpha \left(\frac{\Omega_t}{\Omega_*} \right)^{\alpha-1} \frac{d}{dt} \frac{\Omega_t}{\Omega_*}, \quad (5.18)$$

dove,

$$\frac{d}{dt} \frac{\Omega_t}{\Omega_*} = \frac{-2 \sin \theta \cos \theta e_t^2 (1 + e_*^2 \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta e_*^2 (1 + e_t^2 \cos^2 \theta)}{(1 + e_*^2 \cos^2 \theta)^2}. \quad (5.19)$$

Lo studio del segno di $\frac{df}{d\theta}$ si riduce allo studio del segno di,

$$\sin \theta \cos \theta (q_t^2 - q_*^2), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (5.20)$$

Quindi abbiamo,

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} \left(\frac{\Omega_t}{\Omega_*} \right)^\alpha = \begin{cases} \left(\frac{\Omega_t}{\Omega_*} \right)^\alpha_{\theta=\pi/2} = 1, & q_t > q_* \\ \left(\frac{\Omega_t}{\Omega_*} \right)^\alpha_{\theta=0, \theta=\pi} = \left(\frac{q_*}{q_t} \right)^\alpha, & q_t < q_* \end{cases} \quad (5.21)$$

Dunque,

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} \left(\frac{\Omega_t}{\Omega_*} \right)^\alpha = \max \left\{ 1, \left(\frac{q_*}{q_t} \right)^\alpha \right\}. \quad (5.22)$$

Combinando le equazioni 5.22, 5.13, 5.14 otteniamo la relazione analoga all'equazione 4.32 per i sistemi $\gamma\gamma$ ellissoidali.

Dall'equazione 5.13 e 5.14 abbiamo,

$$\mathcal{R}_t(5.13) = \frac{1}{a} \frac{q_t}{q_*} \max \left[\left(\frac{\Omega_t}{\Omega_*} \right)^4 \right] = \frac{1}{a} \max \left(\frac{q_t}{q_*}, \left(\frac{q_*}{q_t} \right)^3 \right], \quad (5.23)$$

$$\mathcal{R}_t(5.14) = \frac{1}{a} \frac{q_t}{q_*} \max \left[\left(\frac{\Omega_t}{\Omega_*} \right)^\gamma \right] = a^{3-\gamma} \max \left(\frac{q_t}{q_*}, \left(\frac{q_*}{q_t} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (5.24)$$

Da cui la 5.15 diventa

$$\mathcal{R}_t \geq \max \left\{ 1, \frac{q_t/q_*}{a}, \frac{(q_t/q_*)^3}{a}; a^{3-\gamma}(q_t/q_*), a^{3-\gamma}(q_*/q_t)^{\gamma-1} \right\}, \quad (5.25)$$

Per $q_t = q_*$ (anche diversi da 1), la condizione è uguale a quella dei modelli sferici (equazione 4.32). Dunque se $q_t \geq q_*$ (materia totale più rotonda della materia stellare) l'equazione 5.25 si riduce a:

$$\mathcal{R}_T \geq \max \left\{ 1, \frac{q_t/q_*}{a}, a^{3-\gamma}(q_t/q_*) \right\}. \quad (5.26)$$

ora se $a \leq 1$, $\frac{q_t/q_*}{a} \geq a^{3-\gamma}(q_t/q_*)$, ed inoltre $\frac{q_t/q_*}{a} \geq 1$, quindi $\mathcal{R}_T = \frac{q_t/q_*}{a}$. Se invece, $a \geq 1$, $\frac{q_t/q_*}{a} \leq a^{3-\gamma}(q_t/q_*)$, ed inoltre $a^{3-\gamma}(q_t/q_*) \geq 1$, quindi $\mathcal{R}_T = (q_t/q_*)a^{3-\gamma}$. Pertanto si ha il seguente risultato:

$$q_t \geq q_* \Rightarrow \mathcal{R}_T = \frac{q_t}{q_*} \max \left\{ \frac{1}{a}, a^{3-\gamma} \right\} \quad (5.27)$$

Invece $q_t \leq q_*$, rappresenta caso meno realistico, con una distribuzione di materia totale più schiacciata dalla materia barionica. In questo caso la 5.25 si riduce a

$$\mathcal{R}_T \geq \max \left\{ 1, \frac{(q_t/q_*)^3}{a}, a^{3-\gamma}(q_*/q_t)^{\gamma-1} \right\}. \quad (5.28)$$

Abbiamo infine che

$$q_* \geq q_t \Rightarrow \mathcal{R}_T = \max \left\{ \frac{(q_t/q_*)^3}{a}, a^{3-\gamma} \left(\frac{q_*}{q_t} \right)^{\gamma-1} \right\}, \quad (5.29)$$

Con,

$$\mathcal{R}_T = \begin{cases} \frac{(q_t/q_*)^3}{a} & q_*/q_t \geq a, \\ a^{3-\gamma} \left(\frac{q_*}{q_t}\right)^{\gamma-1}, & 1 \leq q_*/q_t \leq a. \end{cases} \quad (5.30)$$

Questo completa la discussione della positività, riassunta dalle condizioni 4.32; 5.27; 5.29. Per semplicità noi consideriamo soltanto il caso $q_t \geq q_*$.

5.2.2 Espansione omeoidale

Applichiamo il metodo dell'espansione omeoidale al nostro modello e troviamo la coppia di densità-potenziale data delle seguenti espressioni (Ciotti e Bertin[27]),

$$\rho_* = \rho_n [\tilde{\rho}_0(\tilde{r}) + \tilde{z}^2 \tilde{\rho}_1(\tilde{r})], \quad (5.31)$$

con

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_0(\tilde{r}) = \frac{1+\eta}{\tilde{r}^2(1+\tilde{r})^2} \\ \tilde{\rho}_1(\tilde{r}) = -2\eta \frac{(1+2\tilde{r})}{\tilde{r}^4(1+\tilde{r})^3} \end{cases} \quad (5.32)$$

dove $\rho_n = M_*/4\pi r_*^3$, $\tilde{r} = r/r_*$.

Il potenziale della componente stellare può essere scritto in questo modo,

$$\Phi_* = \Phi_n \left[\tilde{\Phi}_0(\tilde{r}) + \eta \tilde{\Phi}_1(\tilde{r}) + \eta \tilde{z}^2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{r}) \right] \quad (5.33)$$

dove $\Phi_n = GM_*/r_*$

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_0(\tilde{r}) = \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}\right) \\ \tilde{\Phi}_1(\tilde{r}) = \frac{\tilde{r}-2}{3\tilde{r}^2} + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}\right) + \frac{2\ln(1+\tilde{r})}{3\tilde{r}^3} \\ \tilde{\Phi}_2(\tilde{r}) = \frac{2+\tilde{r}}{\tilde{r}^4(1+\tilde{r})} - \frac{2\ln(1+\tilde{r})}{\tilde{r}^5} \end{cases} \quad (5.34)$$

Si noti che per $\eta_* = 0$ troviamo le espressioni già ottenute per il modello sferico di Jaffe discusso nel Capitolo 4.

Ovviamente in analogia con le espressioni ottenute sopra per la componente stellare, si scrive la coppia di densità-potenziale $\rho_g - \Phi_g$, (dove $\Phi_g = \Phi_* + \Phi_{DM}$) per la densità e il potenziale totale del sistema.

5.2.3 Teorema viriale

Prima di studiare le soluzioni delle equazioni di Jeans, è utile ottenere l'espressione analitica dell'energia cinetica totale della componente stellare utilizzando il teorema Viriale, $2K_* = -W_{*t}$, dove K_* è il tensore di energia cinetica delle stelle e W_{*t} è il tensore dell'energia viriale delle stelle nella buca di potenziale totale. Come noto tale quantità coincide con l'energia potenziale nel caso di sistemi ad una componente.

Cominciamo con il calcolo del termine W_{*t} , utilizziamo la definizione data dall'equazione 4.44

$$W_{*t} = - \int \rho x_k \frac{\partial \Phi_t}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x} = W_{*g} + W_{*BH}, \quad (5.35)$$

abbiamo che $\Phi_t = \Phi_g + \Phi_{BH}$, dove $\Phi_{BH} = -GM_{BH}/r$. È facile da dimostrare che per questi modelli il termine W_{*BH} diverge risultando

$$W_{*BH} = - \int \rho_* \frac{GM_{BH}}{r} d^3 \mathbf{x} = U_{*BH}. \quad (5.36)$$

È interessante inoltre notare che il termine W_* nel caso di una sfera isoterma con il potenziale $\Phi_{is} = \frac{v_0^2}{2} \ln r$, vale,

$$W_{*is} = - \frac{v_0^2}{2} \int \rho_* d^3 \mathbf{x} = - \frac{v_0^2 M_*}{2}, \quad (5.37)$$

Torniamo al nostro modello, considerando le coppie di densità-potenziale ottenute dalle equazioni 5.31, 5.33 e 5.34 andiamo a sostituire le espressioni relative a ρ_* e Φ_g per calcolare il termine W_{*g} .

È conveniente riscrivere la coppia densità-potenziale nella seguente forma,

$$\rho_* = \rho_n [A(\tilde{r}) + \tilde{z}^2 B(\tilde{r})], \quad (5.38)$$

$$\Phi_g = \Phi_n [C(\tilde{r}) + \tilde{z}^2 D(\tilde{r})], \quad (5.39)$$

dove i termini $A(\tilde{r})$ e $B(\tilde{r})$ sono noti dall'equazione 5.31,

$$A(\tilde{r}) = \tilde{\rho}_0(\tilde{r}), \quad B(\tilde{r}) = \tilde{\rho}_1(\tilde{r}), \quad (5.40)$$

e $C(\tilde{r}_t)$ e $D(\tilde{r}_t)$ sono dati dall'equazione 5.34

$$C(\tilde{r}_t) = \tilde{\Phi}_0(\tilde{r}_t) + \eta \tilde{\Phi}_1(\tilde{r}_t), \quad D(\tilde{r}_t) = \eta \tilde{\Phi}_2(\tilde{r}_t). \quad (5.41)$$

Possiamo esprimere questi termini in funzione di r tramite queste trasformazioni:

$$\begin{cases} \rho_n \cdot A(\tilde{r}) = A(r) \\ \rho_n \cdot \frac{B(\tilde{r})}{r_*^2} = B(r) \end{cases} \quad (5.42)$$

$$\begin{cases} \Phi_n \cdot C(\tilde{r}_t) = C(r) \\ \Phi_n \cdot \frac{D(\tilde{r}_t)}{r_t^2} = D(r). \end{cases} \quad (5.43)$$

Quindi, sostituendo i vari termini nell'equazione 5.35 otteniamo nella seguente forma generale

$$W_{*g} = - \int [A(r) + z^2 B(r)] \langle \nabla \Phi_g, \mathbf{x} \rangle d^3 \mathbf{x}, \quad (5.44)$$

dove

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_g &= (\nabla_R + \nabla_z) [C(r) + z^2 D(r)] \\ &= \nabla C(r) + z^2 \nabla_R D(r) + \hat{e}_z \left[2D(r) + 4z \frac{\partial D(r)}{\partial z} \right] + z^2 \nabla_z D, \end{aligned}$$

Si noti che il termine dentro la parentesi è una funzione pari in z , perciò l'integrale in z uguale a zero. Quindi ponendo coordinate sferiche, si ottiene

$$W_{*g} = -2\pi \int_0^\pi r^3 [A(r) + r^2 \cos^2 \theta B(r)] [C'(r) + r^2 \cos^2 \theta D'(r)] \sin \theta d\theta dr. \quad (5.45)$$

Effettuando il cambiamento del variabile $\cos \theta = t$, otteniamo

$$W_{*g} = -4\pi \int_0^\infty r^3 \left\{ A(r)C'(r) + \frac{r^2}{3} [A(r)D'(r) + B(r)C'(r)] + \frac{r^4}{5} B(r)D'(r) \right\} dr, \quad (5.46)$$

Pertanto

$$W_{*g} = -\frac{GM_* M_g}{r_t} (\tilde{W}_1 + \tilde{W}_2 + \tilde{W}_3), \quad (5.47)$$

con

$$\begin{cases} \tilde{W}_1 = \frac{1}{s} \int_0^\infty \tilde{r}^3 A(\tilde{r}) C'(\tilde{r}/s) d\tilde{r}, \\ \tilde{W}_2 = \frac{1}{3s} \int_0^\infty \tilde{r}^5 \left[B(\tilde{r}) C'(\tilde{r}) + \frac{A(\tilde{r}) D'(\tilde{r}/s)}{s^2} \right] d\tilde{r}, \\ \tilde{W}_3 = \frac{1}{5s} \int_0^\infty \tilde{r}^7 B(\tilde{r}) D'(\tilde{r}/s) d\tilde{r}, \end{cases} \quad (5.48)$$

ricordiamo che $s = r_t/r_*$, e

$$\tilde{W}_1 = \frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{s^2(1+\eta) [\tilde{r}(\tilde{r}^2 + \tilde{r}s\eta + 2s^2\eta) - 2s^2(\tilde{r}+s)\eta \ln \frac{\tilde{r}+s}{s}]}{\tilde{r}^6(1+\tilde{r})^2(\tilde{r}+s)} d\tilde{r} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned}\tilde{W}_2 = & \frac{1}{3s} \int_0^\infty \frac{s^2\eta}{\tilde{r}^3(1+\tilde{r})^3(\tilde{r}+s)^2} \left\{ (1+\tilde{r})s^3(1+\eta) \right. \\ & \left[-\tilde{r}(4\tilde{r}+15\tilde{r}s+10s^2) + 10s(\tilde{r}+s)^2 \ln \frac{\tilde{r}+s}{s} \right] \\ & \left. - 2(1+2\tilde{r})(\tilde{r}+s) \left[\tilde{r}(\tilde{r}^2+\tilde{r}s\eta+2s^2\eta) - 2s^2(\tilde{r}+s)\eta \ln \frac{\tilde{r}+s}{s} \right] \right\} d\tilde{r}\end{aligned}\quad (5.50)$$

$$\tilde{W}_2 = \frac{1}{5s^3} \int_0^\infty \frac{2(1+2\tilde{r})s^5\eta^2 [\tilde{r}(4\tilde{r}^2+15rs+10s^2) - 10s(\tilde{r}+s)^2 \ln \frac{\tilde{r}+s}{s}]}{\tilde{r}^3(1+\tilde{r})^3(\tilde{r}+s)^2} d\tilde{r}\quad (5.51)$$

Si noti che una parte del termine \tilde{W}_1 è diverso da zero per $\eta = 0$ e quindi coincide con i risultati già ottenuti nel Capitolo 4. Si noti inoltre che la parte sferica è algebrica, mentre la parte di flattening coinvolge le funzioni di PolyLog. Non riportiamo qui tali espressioni per semplicità e considerata la natura esplorativa di questo capitolo

5.3 Le equazioni di Jeans

In questa sezione, studiamo le equazioni di Jeans per la coppia densità-potenziale data dalle equazioni 5.38 e 5.39. La coppia densità-potenziale appartiene alle famiglie generali di coppie densità-potenziale

$$\rho_{*[R]} = \rho_n \left[A_{[R]}(\tilde{r}) + \tilde{R}^2 B_{[R]}(\tilde{r}) \right], \quad (5.52)$$

$$\Phi_{g[R]} = \Phi_n \left[C_{[R]}(\tilde{r}_t) + \tilde{R}^2 D_{[R]}(\tilde{r}_t) \right], \quad (5.53)$$

dove il pedice $[R]$ indica che la coppia è costruita esplicitamente rispetto a R utilizzando, se necessario, identità $z^2 = r^2 - R^2$. La possibilità di spostarsi ad una rappresentazione alternativa (ad esempio da $\rho_{[R]}$ e $\Phi_{[R]}$ a $\rho_{[z]}$ e $\Phi_{[z]}$) è utile per risolvere le equazioni di Jeans. Se non compare nessun pedice, significa entrambe le forme possono essere considerate.

I termini $A_{[R]}(\tilde{r})$, $B_{[R]}(\tilde{r})$ e $C_{[R]}(\tilde{r}_t)$, $D_{[R]}(\tilde{r}_t)$ sono

$$\begin{cases} A_{[R]}(\tilde{r}) = \tilde{\rho}_0(\tilde{r}) - 2\eta r^2 \tilde{\rho}_1(\tilde{r}), \\ A_{[R]}(\tilde{r}) = -2\eta R^2 \tilde{\rho}_1(\tilde{r}), \end{cases} \quad (5.54)$$

e

$$\begin{cases} C_{[R]}(\tilde{r}_t) = \tilde{\Phi}_0(\tilde{r}) + \eta \tilde{\Phi}_1(\tilde{r}) + 2\eta r^2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{r}), \\ D_{[R]}(\tilde{r}_t) = -2\eta R^2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{r}). \end{cases} \quad (5.55)$$

l'integrazione può essere fatta seguendo l'approccio illustrato nel Capitolo 3, ma qui non procediamo oltre. questi modelli saranno completamente descritti in Ciotti e Ziaeelorzad (in preparazione).

Capitolo 6

Discussione e Conclusioni

In questo lavoro di tesi si è impostato in maniera ben definita e quantitativa il problema della definizione e dipendenza dalle proprietà della galassia ospite dal cosiddetto “raggio di influenza” di un buco nero supermassiccio centrale. Infatti è ormai accettato che le galassie ellittiche e più in generale gli sferoidi stellari ospitano al loro centro buchi neri (Kormendy & Richstone 1995 [28]; van der Marel 1999 [29]; de Zeeuw 2001 [30]), con massa dell’ordine di 10^{-3} la massa in stelle del sistema ospite [1]. Una delle metodologie osservative più utilizzate per la misura di massa del buco nero M_{BH} è attraverso l’influenza sulla dispersione di velocità delle stelle nelle regioni centrali in vicinanza del buco nero. È ovvio che stime robuste debbano tener conto del fatto che la “risposta” delle orbite stellari al campo di gravità del buco nero dipende dalle proprietà specifiche (strutturali e dinamiche) della galassia ospite e quindi che l’utilizzo di formule basate su modelli troppo semplificati (ad esempio sistemi sferici isotropi ad una componente) possa originare bias sistematici nelle stime ottenute. Scopo di questa Tesi non è di affrontare a questo stadio l’importantissimo problema delle osservazioni ma di iniziare a costruire ed esplorare alcune famiglie di modelli analitici, che siano più realistici di quelli comunemente usati, e che al tempo stesso siano sufficientemente semplici da poter essere in futuro utilizzati anche in lavori osservativi. Infine, poichè alcuni effetti che in principio possono essere presenti sono stati considerati molto parzialmente in letteratura, con questa Tesi vogliamo anche esplorare qualitativamente in quale direzione tali effetti vadano. In genere una indicazione dell’importanza della massa del buco nero sulle orbite stellari viene quantificata introducendo il concetto di “sfera di influenza” e del “raggio di influenza”, ovvero la dimensione caratteristica all’interno della quale le orbite stellari sono sensibilmente alterati dalla presenza del buco nero.

In particolare in questa Tesi, si è investigata la dipendenza della dimensione del raggio di influenza (r_{inf}) dalla forma e dal profilo di densità

della galassia ospite, dall'anisotropia (radiale e tangenziale) del tensore di dispersione di velocità stellari, e dall'ammontare relativo di materia oscura e materia stellare. L'approccio adottato è stato una progressiva generalizzazione dei modelli, considerati in maniera tale da poter quantificare l'impatto percentuale di ciascun parametro nel valore di r_{inf} . Dopo aver introdotto una definizione operativa per la determinazione teorica di r_{inf} , abbiamo iniziato (Capitolo 2) considerando modelli sferici a due componenti (stelle e materia oscura) con profilo di densità power-law. La scelta di una power-law è dovuta sia al fatto che i profili di luce di galassie ellittiche sono ben descritti da una legge di potenza (almeno su intervalli radiali non eccessivamente grandi), sia perché l'uso di una power-law elimina dei parametri di scala (“*scale free models*”). L'approssimazione di power-law ben si addice alle regioni centrali delle galassie. Tali modelli sono inoltre stati dotati di una quantità variabile di anisotropia orbitale radiale usando la prescrizione (ampiamente utilizzata in letteratura) di Osipkov-Merritt ([9]).

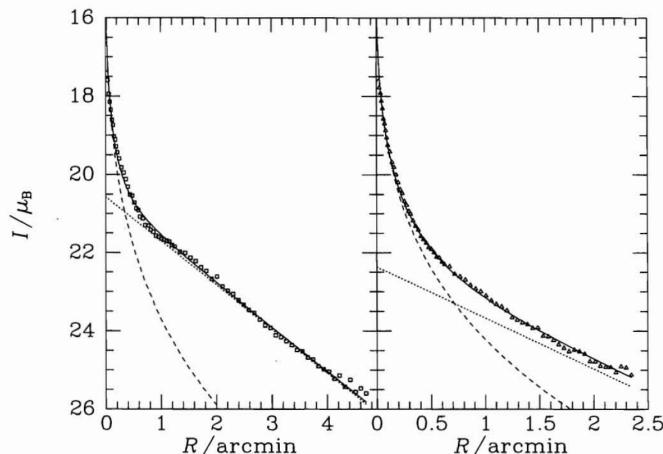


Figura 6.1: Fit dei profili di luminosità superficiale delle galassie NGC 2841 (pannello di sinistra) e NGC 3898 (destra). Le curve puntinate rappresentano fit esponenziali per i dischi mentre le curve tratteggiate identificano i fit $R^{1/4}$ per i bulge. Le curve continue corrispondono alla composizione di queste due elaborazioni. I dati provengono da Boroson (1981) [31], l'elaborazione da Binney & Merrifield (1998) [32].

Successivamente (Capitolo 3) si è rilassata l'ipotesi di simmetria sferica e si sono considerati modelli power-law oblati a due componenti, per considerare una rappresentazione più realistica di galassie ellittiche e studiare l'effett dello schiacciamento su r_{inf} . Tali modelli assisimmetrici sono stati dotati della possibilità di avere un grado variabile di anisotropia tangenziale, usando la decomposizione di Satoh [33]. Come noto, molto raramente il potenziale gravitazionale di un sistema assisimmetrico può essere espresso in

maniera esplicita, pertanto abbiamo usato la tecnica dell’espansione omeoidale [27] per ottenere un’espressione del potenziale gravitazionale corretta al primo ordine nello schiacciamento della galassia. Questa approssimazione è molto migliore di quanto possa sembrare, poichè come ben noto il potenziale gravitazionale di un sistema qualsiasi è in genere “più rotondo” della distribuzione che lo produce, come può essere facilmente osservato considerando l’espansione in armoniche sferiche.

I campi di dispersione di velocità risultanti sono poi stati analizzati in maniera da poter avere una prima idea degli effetti di proiezione dei campi una volta osservati *face-on* ed *edge-on*. Nel Capitolo 4 abbiamo considerato nuovamente una famiglia di modelli sferici più realistici dei modelli power-law, ovvero modelli di Jaffe a due componenti, nei quali la distribuzione stellare segue una legge di Jaffe, e la materia *totale* segue anch’essa una distribuzione di Jaffe con differente legge di scala e massa totale (stelle con materia oscura). Tali modelli, oltre a rappresentare la naturale generalizzazione di quelli discussi in Ciotti et al. 2010 [34] (dove la materia totale è una sfera isoterma singolare), permettono di considerare l’effetto di una doppia legge di potenza ($\alpha = 2$ all’interno e $\alpha = 4$ all’esterno del raggio di core) sulla dinamica del modello, sono di grande interesse per il set-up di simulazioni numeriche ed infine possono essere utilizzati non soltanto per lo studio delle regioni centrali ma della dinamica della galassia su scale globali. Per questa famiglia di modelli, è possibile ottenere anche i campi proiettati di dispersione di velocità nel caso isotropo e nel caso totalmente (radialmente) anisotropo, nonché le grandezze Viriali e il valore della dispersione di velocità proiettata centrale. Questa famiglia di modelli è originale ed una pubblicazione è in corso di completamento (Ciotti, Ziaeelorzad).

Nel Capitolo 5, in uno sviluppo parallelo a quello dei capitoli 2 e 3, abbiamo considerato la generalizzazione ellisoidale dei modelli sferici del Capitolo 4, studiando espansione omeoidale dei modelli JJ. Questi modelli (per i quali è in via di scrittura un secondo lavoro) sono i più complessi di quelli considerati in questa Tesi, ed il lavoro svolto è essenzialmente di tipo preparatorio. Si è in ogni caso riusciti a completare in maniera rigorosa l’analisi delle condizioni di positività e monotonicità per gli aloni di materia oscura dei modelli ellisoidali $\gamma\gamma$ ed importare la soluzione delle equazioni di Jeans nel Caso di espansione omeoidale.

Per quel che riguarda l’effetto dello schiacciamento (che verrà indagato come sviluppo naturale di questo lavoro di tesi mediante la costruzione dei modelli ellisoidali a 2 componenti illustrati nel Capitolo 5 in maniera preliminare) i modelli a due componenti power-law hanno rivelato come il raggio di influenza, definito a partire dalla dispersione di velocità verticale, diminuisca all’aumentare dello schiacciamento. Pertanto questo effetto, se non corretto, porterebbe a sottostimare la massa dei buchi neri centrali in lavori osservativi che usassero il raggio di influenza come “proxy” per la misura del-

la massa dei buchi neri centrali. Si è visto inoltre che tale effetto è presente anche usando la velocità di rotazione nelle vicinanze del buco nero centrali. Questi effetti saranno quantificati in un lavoro futuro dove si considereranno anche gli effetti di proiezione.

Appendice **A**

Le equazioni di Jeans

In questa Appendice introduciamo la funzione di distribuzione e deriviamo le equazioni di Jeans partendo dall'equazione non collisionale di Boltzmann[35].

A.1 Funzione di distribuzione

Consideriamo un sistema fatto di N stelle. Se N è un numero molto grande e se il sistema è non collisionale (seguiamo cioè l'evoluzione del nostro sistema in un scala di tempo più piccola del tempo di rilassamento a due corpi t_{2b}) allora siamo autorizzati a descriverlo in modo continuo invece che discreto, come il sistema intrinsecamente sarebbe. Introduciamo il concetto fondamentale di funzione di distribuzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$:

$$f : \gamma \times \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}^+ \cup 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{\mathfrak{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} = n(\mathbf{x}, t),$$

dove $n(\mathbf{x}, t)$ è la distribuzione di densità numerica continua del sistema N -body discreto. Data questa definizione, il numero di stelle al tempo t , assumendo le posizioni nel volume \mathfrak{R}^3 centrato in \mathbf{x} e le velocità contenute nell'intervallo $d^3\mathbf{v}$ centrato in \mathbf{v} , è:

$$dN = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}. \quad (\text{A.2})$$

È facile da dedurre che il numero totale delle stelle N del sistema è l'integrale di dN su tutto lo spazio delle fasi γ

$$N = \int_{\mathfrak{R}^3} n(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} = \int_{\gamma} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}. \quad (\text{A.3})$$

Perciò, f è anche chiamata densità nello spazio delle fasi e fornisce, ad ogni tempo t , una descrizione completa dello stato di un sistema non

collisionale qualunque, definendo il numero di stelle in ogni punto dello spazio delle fasi. La funzione di distribuzione è dunque correlata ad una funzione continua di densità di probabilità; più precisamente, la quantità $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}$ rappresenta la probabilità di trovare una stella al tempo t nel volume infinitesimale $d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}$ attorno al punto (\mathbf{x}, \mathbf{v}) nello spazio delle fasi.

Nel regime non collisionale la funzione di distribuzione evolve secondo l'equazione non collisionale di Boltzmann:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi_T}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (\text{A.4})$$

dove Φ_T è il potenziale gravitazionale totale del sistema e

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}; t) = 4\pi G \int_{\mathfrak{R}^3} f d^3\mathbf{v}, \quad (\text{A.5})$$

con

$$\Phi_{ext} = \Phi_{ext}(\mathbf{x}; t), \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; 0) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (\text{A.6})$$

dove Φ_{ext} indica il potenziale esterno (un potenziale cioè generato da una distribuzione di densità distinta dal sistema considerato, come ad esempio una distribuzione di gas o di materia oscura: si noti che le due densità saranno in genere spazialmente sovrapposte). In altre parole, da un punto di vista tecnico, assumiamo che ogni elemento di volume dello spazio delle fasi γ si muova sotto l'azione di un campo di forza generato dal potenziale totale $\Phi_T = \Phi + \Phi_{ext}$ (quando $\Phi_{ext} = 0$ il sistema è allora autogravitante).

Ci sposteremo adesso alla discussione di alcuni metodi sviluppati per estrarre *informazioni* dall'equazione non collisionale di Boltzmann. Tali metodi possono essere suddivisi, con accettabile approssimazione, in due grandi categorie: quelli per estrarre informazioni dall'equazione A.4 nel suo caso generale (il cosiddetto *metodo dei momenti*), e quelli mirati alla costruzione di soluzioni esatte in casi particolari (in genere sotto l'ipotesi aggiuntiva di stazionarietà). Naturalmente i risultanti più interessanti si ottengono nei casi in cui i due metodi possono essere utilizzati insieme: *in questi casi saremo autorizzati a ritenere di avere un modello accettabile per la dinamica delle stelle all'interno di una galassia*.

L'idea che sta alla base del metodo dei momenti è di costruire (in maniera rigorosa, ed a partire dall'equazione non collisionale di Boltzmann), delle equazioni differenziali più semplici dell'equazione A.4 stessa. Tali equazioni (che per motivi storici sono dette *equazioni di Jeans*), descrivono le relazioni che intercorrono fra alcune funzioni chiamate appunto «momenti» della funzione di distribuzione sullo spazio delle velocità. Si possono poi usare le equazioni di Jeans come punto di partenza sul quale sviluppare un ulteriore insieme di equazioni dei momenti, definiti questa volta sullo spazio delle

configurazioni, che costituiscono la gerarchia delle *equazioni viriali in forma tensoriale*.

Partendo dalla funzione di distribuzione possiamo derivare le funzioni macroscopiche che descrivono sistemi continui e sono legati a quantità osservabili: sono delle medie f -pesate sullo spazio delle velocità delle corrispondenti funzioni microscopiche:

$$\overline{F}(\mathbf{x}; t) = \frac{1}{\rho} \int_{\mathfrak{R}^3} F(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v}, \quad (\text{A.7})$$

dove $F = F(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$, $F : \gamma \times \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$ è una funzione microscopica (ovvero, definita sullo spazio delle fasi) e $\overline{F} = \overline{F}(\mathbf{x}; t)$, $\overline{F} : \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$ è la funzione macroscopica (ovvero definita sullo spazio delle configurazioni) associata a F .

Inoltre ricordiamo che dalla definizione della funzione di distribuzione abbiamo,

$$\rho(\mathbf{x}; t) = \int_{\mathfrak{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v}.$$

Da un punto di vista fisico, le funzioni macroscopiche più interessanti sono quelle relative ai momenti delle velocità, di primo e di secondo ordine, definiti come (per $i, j = 1, 2, 3$),

$$\overline{v}_i(\mathbf{x}; t) \equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathfrak{R}^3} v_i f d^3 \mathbf{v}, \quad (\text{A.8})$$

$$\overline{v_i v_j}(\mathbf{x}; t) \equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathfrak{R}^3} v_i v_j f d^3 \mathbf{v}, \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{ij}^2 \overline{v_i v_j}(\mathbf{x}; t) \equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathfrak{R}^3} (v_i - \overline{v}_i)(v_j - \overline{v}_j) f d^3 \mathbf{v}, \quad (\text{A.10})$$

La linea sopra l'espressione indica che stiamo calcolando una media pesata con la funzione di distribuzione nello spazio delle fasi. La prima funzione è la i -esima componente della velocità stellare media ed è chiamata velocità di streaming. La terza funzione è la componente ij del tensore simmetrico di dispersione di velocità e rappresenta le velocità random delle stelle attorno alla loro velocità media.

Dalle le tre definizioni date sopra abbiamo

$$\sigma_{ii}^2 = \overline{(v_i - \overline{v}_i)^2}, \quad (\text{A.11})$$

ed è facile da dimostrare che

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j}. \quad (\text{A.12})$$

Data la manifesta simmetria di questo tensore, esiste una matrice ortogonale di rotazione (che dipenderà nel caso generale da x e t) tale che la

rappresentazione di σ_{ij}^2 in tale sistema è diagonale. Dalla definizione stessa di σ_{ij}^2 è immediato provare che si tratta di una matrice positiva definita. Questa semplice constatazione algebrica porta a rappresentarci una galassia, quando vista sotto l'aspetto cinematico, come qualcosa di abbastanza interessante: un campo continuo di densità non collisionale, caratterizzato da un campo (vettoriale) di velocità medie che varia da punto a punto ed in funzione del tempo. In aggiunta, in ogni punto è associato anche un campo tensoriale, che può essere rappresentato da un ellissoide con orientamento e lunghezza degli assi diversa da punto a punto e variabile col tempo. Questi ellissoidi (nello spazio delle velocità) sono dati dalla forma quadratica associata al tensore di dispersione delle velocità

$$\sigma^2 = \sigma_{ij}^2 n_i n_j, \quad (\|n\|), \quad (\text{A.13})$$

Inoltre il tensore di dispersione di velocità si dice isotropo se per ogni x

$$\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}, t) = \sigma^2(\mathbf{x}, t) \delta_{ij}, \quad (\text{A.14})$$

Ovvero l'ellissoide di dispersione di velocità in questo caso è ovunque una sfera.

A.2 Le equazioni di Jeans

Con le definizioni introdotte ed i risultati ottenuti possiamo scrivere le equazioni di Jeans (limitandoci ai momenti di ordine secondo), che rappresentano probabilmente le equazioni più utilizzate in dinamica stellare nell'interpretazione fenomenologica delle osservazioni di sistemi stellari come le galassie e gli ammassi globulari. Partiamo integrando l'equazione A.4 sullo spazio della velocità,

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \mathbf{v} + \int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3 \mathbf{v} - \frac{\partial \Phi_T}{\partial x_i} \int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.15})$$

dove abbiamo usato la convenzione di Einstein per gli indici sommati. Possiamo portare fuori dall'integrale le derivate rispetto al tempo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (n \bar{v}_i)}{\partial \bar{x}_i} = 0, \quad (\text{A.16})$$

questa è l'equazione di continuità. Ora procediamo, moltiplicando l'equazione A.4 per v_j e integrando su tutte le velocità, e otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f v_j d^3 \mathbf{v} + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3 \mathbf{v} - \frac{\partial \Phi_T}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Assumendo che f si annulli per valori grandi di $|\mathbf{v}|$, applicando il teorema di divergenza al terzo termine, abbiamo

$$\int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} = - \int f \frac{\partial v_j}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} = - \int \delta_{ij} f d^3 \mathbf{v} = \delta_{ij} \rho. \quad (\text{A.18})$$

quindi l'equazione A.17 può essere riscritta come

$$\frac{\partial(\rho \bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \Phi_T}{\partial x_j} = 0. \quad (\text{A.19})$$

Moltiplichiamo ora l'equazione sopra per \bar{v}_j e utilizzando l'equazione A.16 avremo

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \bar{v}_j \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial(n \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi_T}{\partial x_j}. \quad (\text{A.20})$$

ora sostituendo l'equazione A.12 nel terzo termine, abbiamo il seguente risultato,

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho \bar{v}_i \frac{\partial(\bar{v}_i)}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi_T}{\partial x_j} - \frac{\partial(\rho \sigma_{ij})}{\partial x_i}, \quad (\text{A.21})$$

Questo è un analogo delle equazioni di Eulero per i fluidi, dove al posto della densità di massa c'è la densità numerica e al posto della velocità del fluido abbiamo la velocità stellare media. Il secondo termine a destra dell'uguale dell'equazione A.21 è simile ad un termine di pressione, anche se più esattamente è un tensore degli sforzi che descrive una pressione anisotropa.

Siccome le equazioni A.16 e A.21 erano applicate in origine da Jeans (1919) [?] alla dinamica stellare, esse sono state chiamate equazioni di Jeans, nonostante fossero state scritte da Maxwell. Le equazioni di Jeans sono molto utili per interpretare quantità osservabili ed introdurle in modelli teorici, correlando ad esempio la velocità di streaming e la dispersione di velocità con concetti quali il potenziale e la densità di campo di una data galassia. Purtroppo però, restano quattro equazioni in nove incognite, quindi sono necessarie altre condizioni per chiudere il sistema. Queste condizioni sono spesso piuttosto arbitrarie. Ad esempio, se consideriamo un sistema sferico e costante nel tempo, con una funzione di distribuzione della forma $f = f(H, L)$, dove H è l'Hamiltoniana ed L il momento angolare, le equazioni di Jeans si possono semplificare nella forma seguente:

$$\frac{d(\rho \sigma_r^2)}{dr} + \rho \left(\frac{2\sigma_r^2 - \sigma_\theta^2 - \sigma_\varphi^2}{r} \right) = -\rho \frac{d\Phi_T}{dr}, \quad (\text{A.22})$$

dove (r, θ, φ) sono le coordinate sferiche.

Nel caso di un sistema assisimmetrico con la funzione di distribuzione $f = f(H, L_z)$, dove L_z è il componente verticale del momento angolare e (R, z, φ) sono le coordinate cilindriche, abbiamo che $\sigma_z = \sigma_R \equiv \sigma$ e le equazioni di jeans sono

$$\frac{\partial(\rho\sigma^2)}{\partial z} = -\rho\frac{\partial\Phi_T}{\partial z}, \quad (\text{A.23})$$

e

$$\frac{\partial(\rho\sigma^2)}{\partial R} - \rho\frac{\overline{v_\varphi^2} - \sigma^2}{R} = -\rho\frac{\partial\Phi_T}{\partial R}. \quad (\text{A.24})$$

A.3 Anisotropia Radiale

Come ben noto, sistemi stellari realistici difficilmente sono ben descritti da una distribuzione perfettamente isotropa della dispersione di velocità stellare. Purtroppo non esistono criteri fisici di base che possano indicare in maniera univoca il tipo di anisotropia (il ben noto problema della “chiusura” delle espressioni della dinamica stellare). Vengono in genere usate perciò varie descrizioni fenomenologiche dell’andamento dell’anisotropia orbitale. Una delle più utili, sia per il buon accordo con le osservazioni che per la relativa semplicità matematica, è l’anisotropia di tipo Osipkov-Merritt.

Secondo il teorema di Jeans la funzione di distribuzione f per un sistema non collisionale con simmetria sferica in stato stazionario è una funzione degli integrali regolari del moto. Usando l’equazione di Boltzmann non collisionale per questo sistema otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial f}{\partial L} \frac{dL}{dt} = 0 \quad (\text{A.25})$$

dove $\varepsilon = \Phi_0 - \Phi - (1/2)v^2$ è l’energia relativa per unità di massa e L è il modulo del momento angolare totale. Nel caso di isotropia abbiamo che la funzione di distribuzione dipende solo dall’energia relativa $f(\varepsilon, L) = f(\varepsilon)$. Inoltre, risolvendo l’equazione di Poisson $\nabla\Phi = 4\pi G\rho$ per la funzione di distribuzione, otteniamo questa relazione ben nota fra il potenziale totale del sistema e la funzione di distribuzione:

$$\rho(x) = \int d^3v f(\varepsilon, L). \quad (\text{A.26})$$

I sistemi stellari sferici sono caratterizzati da un certo grado di anisotropia orbitale definito tramite il parametro di anisotropia

$$\beta(r) = 1 - \frac{\sigma_t^2(r, f)}{2\sigma_r^2(r, f)}, \quad (\text{A.27})$$

dove $\sigma_t^2(r, f)$ e $\sigma_r^2(r, f)$ sono rispettivamente dispersione di velocità tangenziale e radiale ottenute dalla funzione di distribuzione f . Dalla relazione precedente segue che dove $\beta = 0$ il sistema è isotropo, dove $\beta = 1$ è totalmente radialmente anisotropo, e per $\beta \rightarrow -\infty$ il sistema è tangenzialmente anisotropo, ovvero:

$$\begin{cases} \beta(r) = 0, & \sigma_t^2 = 2\sigma_r^2, \\ \beta(r) \simeq 1, & \sigma_t^2 \ll 2\sigma_r^2, \\ \beta(r) \rightarrow \infty, & \sigma_t^2 \gg 2\sigma_r^2. \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

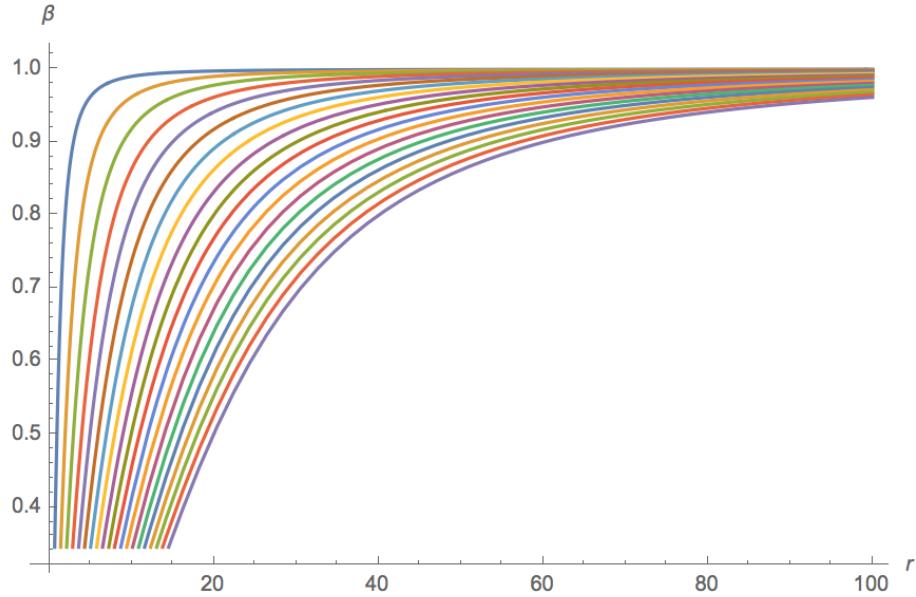


Figura A.1: $\beta(r)$ con diversi valori di r_a

Come anticipato, nel seguito utilizzeremo la funzione di distribuzione di Osipkov-Merrit (OM) definita come

$$f(\varepsilon, L) = f_{OM}(Q) \quad Q = \varepsilon - \frac{L^2}{2r_a^2} \quad (\text{A.29})$$

dove r_a è una lunghezza di scala detta “raggio di anisotropia”. Per $r \ll r_a$ abbiamo che $Q \rightarrow \varepsilon$ e la funzione di distribuzione di OM è isotropa. Dove $r \gg r_a$ abbiamo anisotropia radiale con $\beta(r) = 1$. Si può dimostrare che il parametro di anisotropia associato alla f_{OM} è dato da

$$\beta(r) = \frac{r^2}{r^2 + r_a^2}. \quad (\text{A.30})$$

Pertanto per $r \rightarrow 0$ i sistemi OM sono isotropi, mentre nelle regioni esterne da r_a diventano sempre di più radialmente anisotropi, una proprietà spesso mostrata da sistemi stellari reali. Inoltre, per $r \rightarrow \infty$ i sistemi diventano globalmente isotropi in quanto $\beta \rightarrow 0$ a tutti i raggi.

L'equazione di Jeans in simmetria sferica in questo caso diventa [9]

$$\frac{d\rho_*\sigma_*^2}{dr} + \frac{2\rho_*\beta(r)}{r^2} = -\rho_* \frac{d\Phi_T}{dr}. \quad (\text{A.31})$$

Appendice **B**

Espansione omeoidale

B.1 Il metodo

Riportiamo qui un riassunto del metodo di espansione omeoidale (Ciotti e Bertin 2005), usato per costruire i potenziali assisimmetrici per la soluzione delle equazioni di Jeans nei Capitoli 3 e 5.

Consideriamo una distribuzione di densità stratificata su una superficie omeoidale

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 \tilde{\rho}(m), \quad (\text{B.1})$$

dove $\mathbf{x} = (x, y, z)$, ρ_0 è una densità di scala, e

$$m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\epsilon)^2} + \frac{z^2}{a^2(1-\eta)^2}, \quad (\text{B.2})$$

con $a \geq b \geq c > 0$, $b/a \equiv 1 - \epsilon$ e $c/a \equiv 1 - \eta$. Si noti che per $\epsilon = \eta < 1$ abbiamo il caso prolato (con asse di simmetria attorno all'asse x) mentre per $\epsilon = 0$ e $0 < \eta < 1$ il caso oblato (con asse di simmetria z).

Nei modelli di interesse astrofisico, la densità ρ può estendersi fino all'infinito (con o senza massa infinita) oppure può essere troncata. Per semplicità noi consideriamo solo il primo caso, ovvero una distribuzione di densità non troncata. Il potenziale associato ad una distribuzione di densità omeoidale (e.g. Kellogg 1953 [36]; Chandrasekhar 1969 [37]) è

$$\phi(\mathbf{x}) = -\pi abc \rho_0 G \int_0^\infty \frac{\Delta \tilde{\Psi}(\mathbf{x}; \epsilon, \eta)}{\Delta(\tau)} d\tau, \quad (\text{B.3})$$

dove

$$\Delta(\tau) = \sqrt{(a^2 + \tau)(b^2 + \tau)(c^2 + \tau)}, \quad (\text{B.4})$$

$$\Delta \tilde{\Psi}(\mathbf{x}; \epsilon, \eta) = 2 \int_{m(\mathbf{x}; \tau)}^\infty \tilde{\rho}(m) m dm, \quad (\text{B.5})$$

e

$$m^2(\mathbf{x}; \tau) = \frac{x^2}{a^2 + \tau} + \frac{y^2}{b^2 + \tau} + \frac{z^2}{z^2 + \tau}. \quad (\text{B.6})$$

Ora espandiamo la densità $\tilde{\rho}(m)$ e il potenziale ϕ fino al primo ordine significativo in ϵ ed η

$$\tilde{\rho}(m) = \tilde{\rho}(\tilde{r}) + \frac{\epsilon \tilde{y}^2 + \eta \tilde{z}^2}{\tilde{r}} \tilde{\rho}'(\tilde{r}) + O(\epsilon^2 + \eta^2), \quad (\text{B.7})$$

dove $\tilde{\rho}'(\tilde{r}) \equiv d \tilde{\rho}(m)/dm$ con $\epsilon = \eta = 0$. Inoltre,

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0(\tilde{r}) + (\epsilon + \eta) \left[\tilde{\phi}_1(\tilde{r}) + \tilde{\phi}_0(\tilde{r}) \right] + (\epsilon \tilde{y}^2 + \eta \tilde{z}^2) \tilde{\phi}_2(\tilde{r}) + O(\epsilon^2 + \eta^2), \quad (\text{B.8})$$

dove

$$\tilde{\phi}_i(\tilde{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{\rho}(m) m^2 dm - \int_{\tilde{r}}^{\infty} \tilde{\rho}(m) m dm, & (i = 0) \\ -\frac{1}{3\tilde{r}^3} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{\rho}(m) m^4 dm - \frac{1}{3} \int_{\tilde{r}}^{\infty} \tilde{\rho}(m) m dm, & (i = 1) \\ -\frac{1}{\tilde{r}^5} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{\rho}(m) m^4 dm. & (i = 2) \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$\phi = 4\pi G a^2 \tilde{\phi}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{a}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{a}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{a}. \quad (\text{B.10})$$

Si noti che $\phi_0(r)$ è il potenziale associato alla densità $\rho(r)$. Inoltre, per la linearità dell'equazione di Poisson, ϕ nella B.8 è il potenziale generato dalla densità nell'equazione B.7 a tutti gli ordini in ϵ ed η . Si noti che è possibile ottenere diverse famiglie di coppie non sferiche densità-potenziale a partire dalle equazioni B.7 e B.8 (oppure le equazioni B.1 e B.13). Per ragione di ordinamento e dalla linearità dell'equazione di Poisson abbiamo che, troncando le suddette equazioni fino al primo ordine nel parametro di *flattening*, otteniamo le coppie esatte densità-potenziale, indipendenti dai parametri ϵ e η . Per essere fisicamente accettabile la distribuzione di densità troncata al primo ordine in ϵ e η deve essere definita positiva. Questa richiesta non avviene sempre per valori finiti di ϵ ed η , dato che generalmente ρ' è negativa.

B.1.1 Espansione a massa totale finita

Supponiamo ora che la densità ρ sia caratterizzata da una massa totale finita

$$M = 4\pi abc \rho_0 \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} \equiv \int_0^{\infty} \rho(m) m^2 dm. \quad (\text{B.11})$$

In questo caso possiamo riscrivere la densità e il potenziale in una nuova forma conveniente:

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{M}{4\pi a^3 \mathcal{M}} \frac{\tilde{\rho}(m)}{(1-\epsilon)(1-\eta)}, \quad \phi(\mathbf{x}) = \frac{GM}{a\mathcal{M}} \frac{\tilde{\phi}}{(1-\epsilon)(1-\eta)}. \quad (\text{B.12})$$

La procedura dello sviluppo in serie (espansione) è simile quella fatta precedentemente e otteniamo:

$$\frac{\tilde{\rho}(m)}{(1-\epsilon)(1-\eta)} = (1+\epsilon+\eta)\tilde{\rho}(\tilde{r}) + \frac{\epsilon\tilde{y}^2 + \eta\tilde{z}^2}{\rho}(\tilde{r}) + O(\epsilon^2 + \eta^2), \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\tilde{\phi}(m)}{(1-\epsilon)(1-\eta)} = \tilde{\phi}_0(\tilde{r}) + (\epsilon + \eta)\tilde{\phi}_1(\tilde{r}) + (\epsilon\tilde{y}^2 + \eta\tilde{z}^2)\tilde{\phi}_2(r) + O(\epsilon^2 + \eta^2). \quad (\text{B.14})$$

Si noti che la massa associata alla distribuzione di densità nell'equazione B.13, è la stessa dell'equazione completa B.12, come dimostrabile effettuando l'integrale di volume della B.12. Infatti, siccome per costruzione la massa totale è mantenuta costante per ogni coppia di (ϵ, η) , l'integrale dell'espansione all'ordine zero, il limite sferico dunque, deve essere uguale alla massa totale. Questo implica che l'integrale di volume di ciascun elemento dell'espansione asintotica (in potenze dei parametri di appiattimento) di ordine superiore allo zero è identicamente nullo. Questa proprietà ricorda da vicino una caratteristica simile delle espansioni in armoniche sferiche.

Si noti che è possibile ottenere diverse famiglie di coppie non sferiche densità-potenziale a partire dalle equazioni B.7 e B.8 (oppure le equazioni B.1 e B.13). Per ragione di ordinamento e dalla linearità dell'equazione di Poisson abbiamo che, troncando le suddette equazioni fino al primo ordine nel parametro di *flattening*, otteniamo le coppie esatte densità-potenziale, indipendenti dai parametri ϵ e η . Per essere fisicamente accettabile la distribuzione di densità troncata al primo ordine in ϵ e η deve essere definita positiva. Questa richiesta non avviene sempre per valori finiti di ϵ ed η , dato che generalmente ρ' è negativa. La discussione sui limiti per ϵ ed η è data in [27].

B.2 Verifica diretta di equazione 3.52

L'equazione 3.52 è stata ottenuta utilizzando la relazione di commutazione 3.13. Mostriamo adesso come lo stesso risultato possa essere ottenuto per via diretta, richiedendo però un lavoro molto più impegnativo. allo stesso tempo, i conti seguenti ? una verifica delle formule riportate nel Capitolo 3. Iniziamo calcolando le due derivate $\rho_* \frac{\partial \phi}{\partial R}$ e $\frac{\partial \rho_* \sigma^2}{\partial R}$. La prima delle due derivate è immediata ovvero

$$\rho_* \frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{A_*}{m^\alpha} \frac{GM_{BH}}{r^2} \frac{R}{r} = \frac{GA_* M_{BH} R}{m^\alpha r^3}. \quad (\text{B.15})$$

Trasformiamo la coordinata in come già effettuato nel Capitolo 3,

$$m^2 = \frac{r^2}{q_*^2} \left[1 - \frac{(1 - q_*^2)R^2}{r^2} \right] = \frac{r^2(1 - y^2)}{q_*^2}, \quad m^\alpha = \frac{r^\alpha}{q_*^\alpha} (1 - y^2)^{\alpha/2}, \quad (\text{B.16})$$

dove y è definito dalla equazione 3.38. Si ha perciò:

$$\rho_* \frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{GA_* M_{BH} q_*^\alpha R}{(1 - y^2)^{\alpha/2} r^{3+\alpha}}. \quad (\text{B.17})$$

Per quanto riguarda la seconda derivata, dalla 3.41

$$\frac{\partial \rho_* \sigma^2}{\partial R} = \frac{GA_* M_{BH} q_*^\alpha}{2(1 - q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{1}{R^{\alpha+1}} \cdot B \left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2} \right] \right\} \quad (\text{B.18})$$

Dobbiamo dimostrare quindi che l'equazione 3.52 può essere ottenuta dalla combinazione della B.17 e B.18, secondo la 3.12, ovvero

$$\begin{aligned} & \frac{GA_* M_{BH} \alpha q_*^\alpha}{2(1 - q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} R^{\alpha+1}} B \left[y^2; \frac{\alpha+3}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right] = \\ & R \left[\frac{GA_* M_{BH} q_*^\alpha}{2(1 - q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{1}{R^{\alpha+1}} B \left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2} \right] \right\} \right. \\ & \left. + \frac{GA_* M_{BH} q_*^\alpha R}{(1 - y^2)^{\alpha/2} r^{3+\alpha}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Semplificando i fattori costanti nell'equazione B.19 il nostro problema si riduce a dimostrare la seguente identità

$$B \left[y^2; \frac{\alpha+3}{2}, -\frac{\alpha}{2} \right] = \frac{R^{\alpha+2}}{\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{1}{R^{\alpha+1}} B \left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2} \right] \right\} + \frac{2(1 - q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} R}{(1 - y^2)^{\alpha/2} r^{3+\alpha}} \right]. \quad (\text{B.20})$$

Per poter proseguire con la dimostrazione occorrono alcune proprietà non banali della funzione Beta incompleta. In particolare

$$\frac{d}{dx} B [x; a, b] = x^{a-1} (1 - x)^{b-1}, \quad (\text{B.21})$$

ed integrando per parti si ha inoltre che

$$B [x; a, b] = \frac{x^a (1 - x)^{b-1}}{a} + \frac{b-1}{a} B [x; a+1, b-1]. \quad (\text{B.22})$$

Da ispezione dell'equazione B.20 è evidente che sono necessari due risultati. Intanto

$$\frac{\partial}{\partial R} B\left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2}\right] = \frac{\partial y^2}{\partial R} \frac{d}{dy^2} B\left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2}\right], \quad (\text{B.23})$$

dove

$$\frac{\partial y^2}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{R^2(1-q_*^2)}{r^2} = 2y^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{r^2} \right). \quad (\text{B.24})$$

e dalla B.21

$$\frac{d}{dy^2} B\left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2}\right] = \frac{y^{\alpha-1}}{(1-y^2)^{\alpha/2}}. \quad (\text{B.25})$$

Perciò,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{1}{R^{\alpha+1}} B\left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2}\right] \right\} &= -\frac{\alpha+1}{R^{\alpha+2}} B\left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2}\right] \\ &\quad + \frac{2}{R^{\alpha+1}} \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{r^2} \right) \frac{y^{\alpha+1}}{(1-y^2)^{\alpha/2}} = \\ &= -\frac{\alpha+1}{R^{\alpha+2}} B\left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2}\right] \\ &\quad + \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{r^2} \right) \frac{2(1-q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{r^{\alpha+1}(1-y^2)^{\alpha/2}} = \\ &= -\frac{\alpha+1}{R^{\alpha+2}} B\left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2}\right] \\ &\quad + \frac{2(1-q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{Rr^{\alpha+1}(1-y^2)^{\alpha/2}} - \frac{2R(1-q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{r^{\alpha+3}(1-y^2)^{\alpha/2}}. \end{aligned}$$

Inserendo l'espressione appena trovato nella B.20 il termine rosso si cancella con l'ultimo termine e dobbiamo adesso dimostrare

$$\begin{aligned} B\left[y^2; \frac{\alpha+3}{2}, -\frac{\alpha}{2}\right] &= -\frac{\alpha+1}{\alpha} B\left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2}\right] + \frac{2R^{\alpha+1}(1-q_*^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{r^{\alpha+1}(1-y^2)^{\alpha/2}} = \\ &= -\frac{\alpha+1}{\alpha} B\left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2}\right] + \frac{2y^{\alpha+1}}{\alpha(1-y^2)^{\alpha/2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Applicando la B.22 si ottiene

$$B\left[y^2; \frac{\alpha+1}{2}, \frac{2-\alpha}{2}\right] = \frac{2y^{\alpha+1}}{(1-y^2)^{\alpha/2}(\alpha+1)} + \frac{-\alpha}{\alpha+1} B\left[y^2; \frac{\alpha+3}{2}, -\frac{\alpha}{2}\right]. \quad (\text{B.27})$$

Ora sostituiamo questa espressione in B.27, e l'identità è finalmente dimostrato. Q.E.D. Si noti che l'utilizzo di equazione 3.12 in generale produrrà risultati molto meno compatti ed eleganti dell'equazione 3.13.

Dinamica proiettata

Quando osserviamo gli oggetti astronomici (per esempio le galassie ellittiche), le loro proprietà dinamiche vengono proiettate sul piano del cielo. In conseguenza è importante studiare la relazione fra dinamica intrinseca e proiettata degli oggetti osservati. In generale dinamica intrinseca di un sistema non collisionale di stelle viene descritto in un sistema di riferimento inerziale cartesiano S_0 , con le coordinate (x_1, x_2, x_3) , mentre le proprietà proiettate sono espressi in sistema di riferimento S' , con le coordinate (x'_1, x'_2, x'_3) , dove la linea della vista (l.o.s.) è stato scelto lungo la direzione l'asse di x'_3 . Con questa scelta il piano del cielo e la direzione dell l.o.s. vengono definite rispettivamente come $\pi' = (x'_1, x'_2)$ e $\mathbf{n} \perp \pi'$ e i due sistemi di riferimento sono in relazione fra di loro tramite una matrice di rotazione generica $\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi)$:

$$x' = \mathcal{R}x. \quad (\text{C.1})$$

$$v' = \mathcal{R}v. \quad (\text{C.2})$$

ogni proprietà dinamica del nostro sistema puoèssere espresso nel nuovo sistema di riferimento S' , e poi proiettata sul piano del cielo integrando lungo la linea di vista la sua componente n . è facile da dimostrare che il campo di velocità streaming e il tensore della dispersione di velocità lungo la linea di vista sono:

$$\bar{v}_n \equiv \bar{v}_i \bar{n}_i = \bar{v}_i n_i, \quad (\text{C.3})$$

$$\sigma_n^2 \equiv \overline{(v_i n_i - \bar{v}_i \bar{n}_i)(v_j n_j - \bar{v}_j \bar{n}_j)} \quad (\text{C.4})$$

$$= \overline{(v_i n_i - \bar{v}_n)(v_j n_j - \bar{v}_n)} \quad (\text{C.5})$$

$$= \sigma_{ij}^2 n_i n_j. \quad (\text{C.6})$$

La corrispondenti quantità proiettate sono ottenute passando al sistema S' ed integrando su x'_3

$$\Sigma(x'_1, x'_2) \bar{v}_p(x'_1, x'_2) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') \bar{v}_n(x') dx'_3, \quad (\text{C.7})$$

$$\Sigma(x'_1, x'_2) \bar{V}_p^2(x'_1, x'_2) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') \bar{v}_n^2(x') dx'_3, \quad (\text{C.8})$$

e

$$\Sigma(x'_1, x'_2) \sigma_p^2(x'_1, x'_2) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') \sigma_p^2(x') dx'_3, \quad (\text{C.9})$$

dove

$$\Sigma(x'_1, x'_2) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') dx'_3. \quad (\text{C.10})$$

In generale, quando osserviamo un sistema, σ_p^2 non coincide con la dispersione di velocità osservata lungo la linea di vista. Infatti le osservazioni misurano la dispersione di velocità lungo la linea di vista rispetto al campo di velocità streaming osservato lungo la linea di vista \bar{v}_p mentre σ_p^2 è stato definito rispetto a \bar{v}_n . Per aggirare questo problema definiamo la dispersione di velocità lungo la linea di vista come,

$$\Sigma(x'_1, x'_2) \sigma_{los}^2(x'_1, x'_2) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') (\bar{v}_n - \bar{v}_p)^2 dx'_3, \quad (\text{C.11})$$

che può essere espresso in termini di σ_p^2 , \bar{v}_p^2 e \bar{V}_p^2 (Ciotti 2000):

$$\sigma_{los}^2 = \sigma_p^2 + \bar{V}_p^2 - (\bar{v}_p)^2. \quad (\text{C.12})$$

Si noti che in un sistema con la dispersione di velocità intrinseca uguale a zero ($\sigma_p^2 = 0$), σ_{los}^2 può essere maggiore di zero, per il contributo dovuto ai campi di velocità lungo la linea di vista \bar{V}_p^2 e $(\bar{v}_p)^2$. Definiamo inoltre la dispersione di velocità misurata all'interno in una data apertura come,

$$M(R) \sigma_{ap}^2(R) \equiv \int_{R \leq \sqrt{x'_1^2 + x'_2^2}} \Sigma(x'_1, x'_2) \sigma_{los}^2(x'_1, x'_2) dx'_1, dx'_2, \quad (\text{C.13})$$

dove $M(R)$ è la massa misurata all'interno di un dato raggio di apertura R .

C.1 Dinamica proiettata dei sistemi assisimmetrici

Ora consideriamo il nostro sistema assisimmetrico, è facile da dimostrare che in questo caso la matrice generica di rotazione $\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi)$, introdotto all'inizio di questa sezione, può essere ad un semplice matrice di rotazione $\mathcal{R}(\theta)$ attorno all'asse $x_1 \equiv x'_1$:

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

dove $0 \leq \theta \leq \pi/2$, e $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ corrispondono rispettivamente al sistema vista di faccia (face-on) e edge-on. In figura vediamo la relazione fra il sistema di riferimento S_0 e S' . È facile da dimostrare inoltre che possiamo scrivere $\mathbf{n} = (0, -\sin \theta, \cos \theta)$. Le relazioni che ci permette di trasformare le velocità dalle coordinate cilindriche (R, φ, z) alle coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) sono:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_R \cos \varphi - \bar{v}_\varphi \sin \varphi, \quad (\text{C.15})$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_R \sin \varphi + \bar{v}_\varphi \cos \varphi, \quad (\text{C.16})$$

$$\bar{v}_3 = \bar{v}_z, \quad (\text{C.17})$$

e utilizzando $\bar{v}_R = \bar{v}_z = 0$, le espressioni dati sopra diventano:

$$\bar{v}_1 = -\bar{v}_\varphi \sin \varphi, \quad (\text{C.18})$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_\varphi \cos \varphi, \quad (\text{C.19})$$

$$\bar{v}_3 = 0. \quad (\text{C.20})$$

Nella stessa maniera possiamo ricavare le espressioni esplicite per le componenti del tensore della dispersione di velocità ,

$$\sigma_{11}^2 = \sigma_R^2 \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi^2 \sin^2 \varphi, \quad (\text{C.21})$$

$$\sigma_{22}^2 = \sigma_R^2 \sin^2 \varphi + \sigma_\varphi^2 \cos^2 \varphi, \quad (\text{C.22})$$

$$\sigma_{33}^2 = \sigma_R^2, \quad (\text{C.23})$$

$$\sigma_{12}^2 = (\sigma_R^2 - \sigma_\varphi^2) \sin \varphi \cos \varphi, \quad (\text{C.24})$$

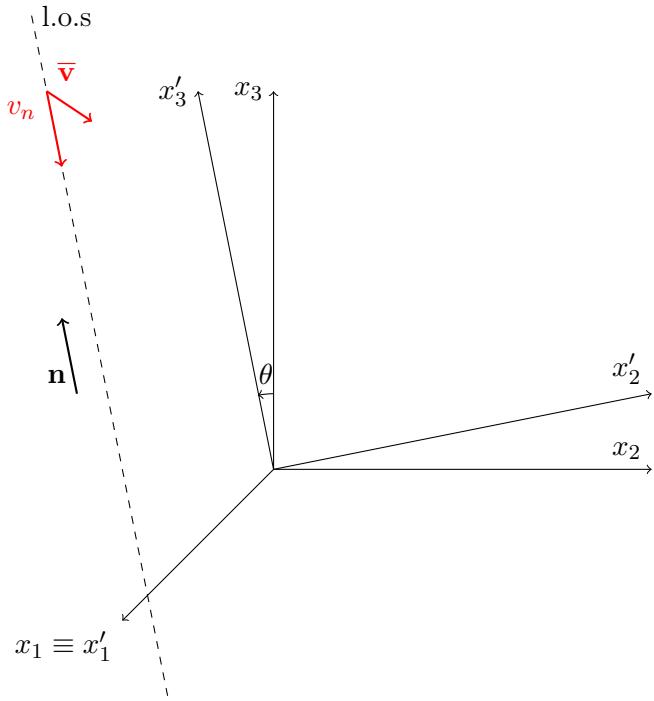
$$\sigma_{12}^2 = \sigma_{23}^2 = 0, \quad (C.25)$$

e quindi le espressioni esplicite per le equazioni C.1 e C.2 possono essere scritte come:

$$\bar{v}_p = -v_\varphi \cos \varphi \sin \theta, \quad (C.26)$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_R^2 \cos^2 \theta + (\sigma_R^2 \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta. \quad (C.27)$$

Con questi risultati ottenuti possiamo mettere direttamente in relazione la dinamica intrinseca della nostra galassia con la sua dinamica osservata. Pertanto le due proiezioni più importanti (in quanto tutti i casi intermedi sono compresi tra i valori che si ottengono) nel caso *face-on* con $\theta = 0$ e *edge-on* con $\theta = \pi/2$.



Bibliografia

- [1] J. Magorrian, S. Tremaine, D. Richstone, R. Bender, G. Bower, A. Dressler, S. M. Faber, K. Gebhardt, R. Green, C. Grillmair, J. Kormendy, and T. Lauer. The demography of massive dark objects in galaxy centers. *The Astronomical Journal*, 115:2285–2305, 1998.
- [2] K. Gebhardt, R. Bender, G. Bower, A. Dressler, S. M. Faber, A. V. Filippenko, R. Green, C. Grillmair, L. C. Ho, J. Kormendy, T. R. Lauer, J. Magorrian, J. Pinkney, D. Richstone, and S. Tremaine. A Relationship between Nuclear Black Hole Mass and Galaxy Velocity Dispersion. *The Astrophysical Journal*, 539:L13–L16, 2000.
- [3] L. Ferrarese and D. Merritt. A Fundamental Relation between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies. *The Astrophysical Journal*, 539:L9–L12, 2000.
- [4] S. M. Faber and R. E. Jackson. Velocity dispersions and mass-to-light ratios for elliptical galaxies. *The Astrophysical Journal*, 204:668–683, 1976.
- [5] S. Djorgovski and M. Davis. Fundamental properties of elliptical galaxies. *Astrophysical Journal*, 313:59–68, 1987.
- [6] A. Dressler, D. Lynden-Bell, D. Burstein, R. L. Davies, S. M. Faber, R. Terlevich, and G. Wegner. Spectroscopy and photometry of elliptical galaxies. I - A new distance estimator. *Astrophysical Journal*, 313:42–58, 1987.
- [7] N. Häring and H.-W. Rix. On the Black Hole Mass-Bulge Mass Relation. *The Astrophysical Journal*, 604:L89–L92, 2004.
- [8] A. Marconi and L. K. Hunt. The Relation between Black Hole Mass, Bulge Mass, and Near-Infrared Luminosity. *The Astrophysical Journal*, 589:L21–L24, 2003.

- [9] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics: (Second Edition)*. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press, 2011.
- [10] L. Ciotti, L. Morganti, and P. T. De Zeeuw. Two-component galaxies with flat rotation curve. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 393(2):491–500, 2009.
- [11] M. Barnabè, L. Ciotti, F. Fraternali, and R. Sancisi. Hydrostatic models for the rotation of extra-planar gas in disk galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 446:61–69, 2006.
- [12] C. O. Smet, S. Posacki, and L. Ciotti. Miyamoto-Nagai discs embedded in the Binney logarithmic potential: analytical solution of the two-integrals Jeans equations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 448:2921–2933, 2015.
- [13] J.L. Sersic. *Atlas de galaxias australes*. 1968.
- [14] L. Ciotti. Stellar systems following the $R^{-1/m}$ luminosity law. *Astronomy and Astrophysics*, 249:99–106, 1991.
- [15] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. The assembly of galaxies in a hierarchically clustering universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 275:56–66, 1995.
- [16] W. Dehnen. A Family of Potential-Density Pairs for Spherical Galaxies and Bulges. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 265:250, 1993.
- [17] S. Tremaine, D. O. Richstone, Y.-I. Byun, A. Dressler, S. M. Faber, C. Grillmair, J. Kormendy, and T. R. Lauer. A family of models for spherical stellar systems. *Astronomical Journal*, 107:634–644, 1994.
- [18] W. Jaffe. A simple model for the distribution of light in spherical galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 202:995–999, 1983.
- [19] L. Hernquist. An analytical model for spherical galaxies and bulges. *Astrophysical Journal*, 356:359–364, 1990.
- [20] G. de Vaucouleurs. Recherches sur les Nebuleuses Extragalactiques. *Annales d'Astrophysique*, 11:247, 1948.
- [21] M. D'Onofrio, M. Capaccioli, and N. Caon. On the Shape of the Light Profiles of Early Type Galaxies - Part Two - the - Diagram. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 271:523, 1994.

- [22] M. Capaccioli, N. Caon, and M. D’Onofrio. The $(\log r_e, \mu_e)$ Plane of Hot Stellar Systems. In I. J. Danziger, W. W. Zeilinger, and K. Kjär, editors, *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, volume 45 of *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, page 43, 1993.
- [23] M. Capaccioli, N. Caon, and M. D’Onofrio. Families of galaxies in the $\mu(e)$ - $R(e)$ plane. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 259:323–327, 1992.
- [24] A. W. Graham and R. Guzmán. HST Photometry of Dwarf Elliptical Galaxies in Coma, and an Explanation for the Alleged Structural Dichotomy between Dwarf and Bright Elliptical Galaxies. *The Astrophysical Journal*, 125:2936–2950, 2003.
- [25] D. Merritt and L. Ferrarese. The $M_{\text{BH}}-\sigma$ Relation for Supermassive Black Holes. *The Astrophysical Journal*, 547:140–145, 2001.
- [26] E. Vanzella, F. Calura, M. Meneghetti, A. Mercurio, M. Castellano, G.B. Caminha, I. Balestra, P. Rosati, P. Tozzi, S. De Barros, A. Grazian, A. D’Ercole, L. Ciotti, K. Caputi, C. Grillo, E. Merlin, L. Pentericci, A. Fontana, S. Cristiani, and D. Coe. Paving the way for the JWST: witnessing globular cluster formation at $z > 3$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2016.
- [27] L. Ciotti and G. Bertin. A simple method to construct exact density-potential pairs from a homeoidal expansion. *Astronomy & Astrophysics*, 437:419–427, 2005.
- [28] J. Kormendy and D. Richstone. Inward Bound—The Search For Supermassive Black Holes In Galactic Nuclei. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 33:581, 1995.
- [29] R. P. van der Marel. The Black Hole Mass Distribution in Early-Type Galaxies: Cusps in Hubble Space Telescope Photometry Interpreted through Adiabatic Black Hole Growth. *Astrophysical Journal*, 117:744–763, 1999.
- [30] T. de Zeeuw. Evidence for Massive Black Holes in Nearby Galactic Nuclei. In L. Kaper, E. P. J. V. D. Heuvel, and P. A. Woudt, editors, *Black Holes in Binaries and Galactic Nuclei*, page 78, 2001.
- [31] J. Binney and M. Merrifield. *Galactic Astronomy*. Princeton paperbacks. Princeton University Press, 1998.
- [32] T. Boroson. The distribution of luminosity in spiral galaxies. *Astrophysical Journal Supplement Series*, 46:177–209, 1981.

- [33] C. Satoh. Dynamical models of axisymmetric galaxies and their applications to the elliptical galaxy ngc4697. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 32:41, 1980.
- [34] L. Ciotti and L. Morganti. Consistency criteria for generalized Cuddeford systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 401:1091–1098, 2010.
- [35] L. Ciotti. *Lecture notes on stellar dynamics*. 2000.
- [36] O. D. Kellogg. *Foundations of Potential Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967.
- [37] S. Chandrasekhar. *Ellipsoidal figures of equilibrium*. 1969.