

Università degli Studi di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Astronomia dell'Università di Bologna

**Modelli di Universo con
equazioni di stato non standard**

Tesi di Laurea di :
Claudia Battista

Relatore:
Chiaramo Prof.
Fabrizio Bonoli

Co-relatori:
Dott. Luca Ciotti
Dott. Alberto Cappi

Sessione I

Anno Accademico 2001 - 2002

19/07/02

Università degli Studi di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Astronomia dell'Università di Bologna

Modelli di Universo con equazioni di stato non standard

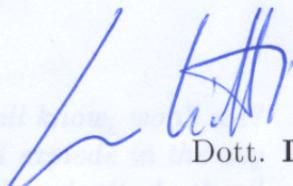
Tesi di Laurea
di:

Claudia Battista

Relatore:
Chiar.mo Prof.

Fabrizio Bonoli

*O we will have to go on
The stars will burn out
but they do
Stars have their moment and then they die*



Co-relatori:
Dott. Luca Ciotti
Dott. Alberto Cappi

Parole chiave: Relatività generale - Cosmologia - Supernovae Ia -
Modelli di Universo - Equazione di stato

Sessione I

Anno Accademico 2001-2002

Indice

Introduzione	3
1 Cosmologia standard	4
1.1 Equazioni del campo gravitazionale	4
1.2 Il principio cosmologico e la metrica di	4
di Robertson-Walker	5
1.3 Le equazioni di Friedmann	7
1.4 Integrazione delle equazioni di	8
1.5 Derivazione newtoniana delle	9
Friedmann	13
1.6 I parametri cosmologici	14
1.7 Universi di radiazione	19
1.8 Universi con costante cosmologica	19
1.9 Energia del vuoto	21
2 Le supernovae di tipo Ia come indici cosmologici	27
2.1 Supernovae di tipo Ia	27
2.2 La supernova 1997ff	29
2.3 Una misura delle distanze	31
2.4 Misurare Ω_0 verso Ω_M delle galassie	31
2.5 $w_0 < -1$	33
2.6 I nostri test	36
2.6.1 Relazione distanza-redshift	36
2.6.2 Interpolazione dei dati sulle SNe	37
con alcuni modelli cosmologici	37

Ai nonni Antonio e Luigi

Ho sognato in una notte
lacrime di rosa
parlarmi
ed io
cogitabonda figura
sulla scogliera
in questa notte

miraggio
senza tempo
lontano dal mondo
mi desto

Una stella
ancora vigile
quando
onde scroscianti
muovono l'eternità di rosso clamore
che ha sapore
di quasi miracolo

Michele Cane

Indice

Introduzione	2
1 Cosmologia standard	4
1.1 Equazioni del campo gravitazionale	4
1.2 Il principio cosmologico e la metrica di Robertson-Walker	5
1.3 Le equazioni di Friedmann	7
1.4 Integrazione delle equazioni di Friedmann	8
1.5 Derivazione newtoniana delle equazioni di Friedmann	13
1.6 I parametri cosmologici	14
1.7 Universi di radiazione	19
1.8 Universi con costante cosmologica	19
1.9 Energia del vuoto	23
2 Le supernovae di tipo Ia come indicatori cosmologici	27
2.1 Supernovae di tipo Ia	27
2.2 La supernova 1997ff	29
2.3 Una misura delle distanze	31
2.4 Misurare Ω_i verso Ω_M dalla relazione $m - z$	34
2.5 $w_i < -1$?	35
2.6 I nostri test	36
2.6.1 Relazione distanza-redshift	36
2.6.2 Interpolazione dei dati sulle SNe con alcuni modelli cosmologici	37

2.6.3	Test di χ^2 ed ellissi di confidenza	45
3	Il nostro modello	54
3.1	Introduzione	54
3.2	Le equazioni del moto: imposizione della condizione $T_{\mu\nu;\nu} = 0$	55
4	Alcune soluzioni per Universi "dissipativi"	58
4.1	Adimensionalizzazione e riduzione al primo ordine	58
4.2	Due casi particolari: come riottenere le soluzioni classiche	60
4.3	Il codice numerico	61
5	Risultati	62
5.1	Caso classico: Universi di materia	62
5.1.1	Soluzione per $E_0 = 0$	64
5.1.2	Soluzione per $E_0 > 0$	64
5.1.3	Soluzione per $E_0 < 0$	65
5.2	Cosa fa μ ?	65
5.3	Soluzioni per $\mu = \dot{\tilde{R}}^2/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\tilde{R}}^2)$	68
5.4	Soluzioni per $\mu = (\dot{\tilde{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4)/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\tilde{R}}^2)^2$	76
6	Conclusioni	94
Appendice A		
Richiami di cosmologia standard		97
Equazioni di Einstein	98	
Costruzione dell'elemento di linea	99	
Equazioni di Friedmann	102	
Appendice B		
Equazioni differenziali del secondo ordine nel piano delle fasi	105	
Equazioni non lineari	107	
Appendice C		
Listato del programma per l'integrazione delle equazioni differenziali	110	

Appendice D	117
Listato del programma per il calcolo della distanza di luminosità	119
Ringraziamenti	126
Bibliografia	126

Introduzione

Scriveva George Orwell nel 1846: "Vedere ciò che ci sta sotto il naso richiede uno sforzo costante". Queste parole si applicano perfettamente alla moderna cosmologia. L'universo è tutto intorno a noi e tuttavia gli scienziati devono talvolta guardare lontanissimo per comprendere i processi che hanno condotto alla nostra vita sulla Terra. E sebbene essi siano convinti che i principi fondamentali della natura sono semplici, decifrarli è tutto un altro discorso. La storia dell'espansione cosmica ha conseguenze rilevanti sia per la geometria dell'universo che per la natura dei suoi costituenti: materia, radiazione e forse altre forme più elusive di energia. La teoria della Relatività Generale collega queste fondamentali proprietà e descrive in che modo esse influenzino il moto della materia e la propagazione della luce consentendo di formulare previsioni su quantità effettivamente misurabili.

Il passo di Orwell è doppiamente vero per quei cosmologi che tentano di spiegare le recenti osservazioni di esplosioni stellari a distanze di centinaia di milioni di anni luce: ciò che viene fuori da queste osservazioni mette in dubbio decenni di nozioni consolidate. Sembra, infatti, che l'universo sia più grande e più vuoto di quanto si immaginasse e la sua continua espansione non stia rallentando, anzi, sembra addirittura che stia diventando più rapida.

Il modo più semplice per spiegare questa accelerazione è quello di introdurre una costante additiva nelle equazioni del campo gravitazionale, un termine che fornisca una sorta di "pressione negativa" che si opponga all'attrazione gravitazionale (la famosa costante cosmologica introdotta e poi ripudiata da Einstein). Questa costante ha, in verità, assunto oggi un nuovo significato alla luce dei progressi fatti in fisica delle particelle: potrebbe essere legata alla cosiddetta *dark energy*, ovvero l'energia di punto zero associata alle fluttuazioni del vuoto. Altri modelli sviluppati, ma non ancora esaustivamente, sono quelli che considerano una "costante" cosmologica variabile nel tempo, i cosiddetti modelli di *quintessenza*. Ognuno di essi si avvale di una diversa equazione di stato per l'universo

$p = w\rho$, con w costante.

Il problema centrale di questa tesi è allora quello di capire quanto e come possono essere modificate le equazioni di stato cosmologiche per poi esplorare il comportamento delle soluzioni.

Ciò è suggerito e legittimato da **tre motivazioni di tipo teorico**:

- innanzitutto la condizione fondamentale $T_{\mu\nu;\nu} = 0$ che corrisponde a richiedere la conservazione dell'energia-impulso, può essere soddisfatta anche da equazioni di stato più generali di quelle comunemente usate;
- utilizzare equazioni di stato del tipo $p = p(\rho)$ corrisponde a considerare l'universo, quando visto come sistema dinamico, come un sistema conservativo, in cui cioè dall'equazione del moto, attraverso la conservazione dell'"energia", si ricava un integrale primo del moto e di qui una soluzione per via analitica. Se, invece, si inserisce nell'equazione di stato una dipendenza, per esempio dalla velocità di espansione dell'Universo, $p = p(\rho, \dot{\mathcal{R}})$, il sistema diventa dissipativo. Ciò è molto interessante da un punto di vista fisico-matematico perché sistemi di questo tipo possono esibire comportamenti anche molto vari (cicli limite);
- si noti, infine, come in realtà siano già stati esposti modelli di universo non conservativi, come quelli di quintessenza.

La **motivazione sperimentale** di questa tesi è fornita dalle supernovae lontane che, come già accennato prima, risultano più deboli di quanto ci si aspetti dal redshift della galassia ospite, e quindi più distanti di quanto previsto da un modello cosmologico "standard". Per spiegare il loro redshift anomalo si ipotizza che l'universo debba aver avuto nel passato un'espansione più lenta che avrebbe impartito un minore "stiramento" al cosmo e alla luce che in esso si propaga.

Capitolo 1

Cosmologia standard

In questo capitolo sono riportati i risultati principali che verranno utilizzati nello svolgimento del lavoro originale nei Capitoli 3-4-5.

1.1 Equazioni del campo gravitazionale

Le equazioni del campo cosmologiche si costruiscono avendo come guida l'equazione che in uno spazio piatto lega i campi gravitazionali alle sorgenti, ovvero l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (1.1)$$

Gli ingredienti essenziali sono, in primo luogo, le grandezze caratteristiche della materia, in questo caso la densità ρ e la pressione p , che sono espresse in termini di un tensore $\binom{0}{2}$ simmetrico (tensore della densità di energia-impulso $T^{\mu\nu}$); questo tensore nel caso di un fluido non viscoso ha la forma

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho c^2) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (1.2)$$

dove u^μ rappresenta la quadrivelocità delle particelle di fluido.

D'altra parte, prendendo l'equazione di Poisson come termine di confronto, si deduce subito che le equazioni cercate dovranno avere la forma $G = kT$ dove G dovrà essere una espressione differenziale delle componenti del tensore metrico e delle sue derivate prime e seconde se si vuole un corrispettivo classico che abbia un significato immediato. $T^{\mu\nu}$ obbedisce alle leggi di conservazione nell'ambito relativistico-ristretto

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.3)$$

che esprimono la conservazione locale dell'energia e dell'impulso; ma queste derivate non sono invarianti in uno spazio-tempo curvo e vanno quindi sostituite con la derivata geometrica, cioè bisogna imporre che $\nabla T = 0$ se si vuole descrivere qualcosa di fisico in uno spazio-tempo non più piatto.

In base a questa posizione sembra chiaro che il miglior candidato a figurare al primo membro delle equazioni del campo è il tensore di Einstein; si ha allora

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

dove la costante viene ricavata calibrando le equazioni sul caso limite newtoniano, ovvero limite non relativistico $-v \ll c$ - di campo debole e statico.

1.2 Il principio cosmologico e la metrica di Robertson-Walker

L'ipotesi da cui si parte (e da cui partì lo stesso Einstein) per la costruzione del modello cosmologico che oggi viene definito "standard" è l' uniformità della distribuzione della materia ed energia, ipotesi che semplifica molto la forma della metrica che, in generale, è composta da 10 elementi indipendenti. Infatti si tratta ora di risolvere le equazioni del campo che devono dar luogo come soluzioni a componenti del tensore metrico in tutto lo spazio -inutile dire nello spazio-tempo perché tanto si aggiunge in partenza che non vi sia dipendenza da un tempo globalmente definito.

In genere il problema viene semplificato drasticamente limitandosi a casi con forte simmetria.

Innanzitutto bisogna individuare le sorgenti della gravitazione e l'idea generale è quella di dire: c'è una distribuzione di materia statica che pervade tutto l'Universo spaziale e lo pervade in modo omogeneo; ciò equivale a dire che $T_{\mu\nu}$ è completamente definito e descritto da una singola componente che è la densità ρ della materia assunta come costante; allora, alla costanza della densità media, deve corrispondere una uniformità di tutte le proprietà fisico-geometriche dello spazio, ovvero si ipotizza che l' Universo sia spazialmente *omogeneo* ed *isotropo*.

Questa è l' essenza del principio cosmologico.

L'isotropia è stata definitivamente dimostrata da Hubble come conseguenza della scoperta dell' allontanamento delle galassie esterne e della linearità di tale allontanamento

in funzione della loro distanza

$$v_r = H_0 d, \quad (1.5)$$

con v_r velocità radiale, d distanza della galassia dall'osservatore e H_0 costante chiamata *costante di Hubble*. Tale legge indica l'isotropia (oltre a fornire una prova dell'espansione generale dell'Universo) perché se più galassie si trovano alla stessa distanza dalla nostra ma in direzioni diverse hanno tutte la stessa velocità di recessione. Risulta, quindi, evidente come l'isotropia stessa possa essere interpretata come l'invarianza della parte spaziale della metrica per rotazione attorno ad un punto. Per quanto riguarda l'omogeneità, l'idea è che esista una scala di dimensioni lineari abbastanza grandi da far sì che le strutture che la materia forma aggregandosi in corpi celesti, galassie, ammassi e superammassi non siano che un incidente locale e che l'Universo a questa scala raggiunga una certa uniformità.

Ma appena si coglie il fatto che lo spazio non è statico ci si deve porre il problema di cosa voglia dire "omogeneità". E l'omogeneità non può che essere pensata come omogeneità ad un dato istante di *tempo cosmico* (un tempo universale, una coordinata temporale t unica, atta a coordinatizzare temporalmente tutto lo spazio) e perciò non si può far altro che partire dalla opzione di fondo, che in qualche modo è postulata e dire: "il continuo spazio-temporale è foliato da ipersuperfici spaziali che sono omogenee e che all'evolvere del tempo cosmico si applicano l'una nell'altra con in più l'idea che in questa applicazione vi sia un effetto di espansione, espansione che, quindi, non è pensata come un moto effettivo degli oggetti costituenti attraverso lo spazio, ma è lo spazio stesso fra essi che si dilata (salvo, ovviamente, moti locali)".

Un principio cosmologico come questo, enunciato in termini apparentemente vaghi e qualitativi è in realtà assolutamente stringente dal punto di vista matematico e porta come risultato al cosiddetto *elemento di linea di linea di Robertson-Walker*.

In realtà, per giungere a questo risultato c'è bisogno di un'ipotesi generale che riguarda i moti spontanei o liberi dei corpi dell'Universo, cioè quel moto di ogni singolo corpo in quanto non determinato da alcunché di vicino, ma unicamente, globalmente, dal campo gravitazionale generato da tutti gli altri corpi dell'Universo nel loro insieme, corpi che sono trattati in termini di una densità di materia costante su una ipersuperficie spaziale.

Allora la linea di universo seguita da uno di questi corpi sarà perpendicolare alla ipersuperficie spaziale non essendovi ragion sufficiente, data l'omogeneità, perché debba essere obliqua.

Questa sorta di principio calato dall'alto prende il nome di *principio di Weil* e l'insieme dei corpi che si muovono in questo modo viene chiamato *substrato* dell'Universo (ci si può aspettare che i corpi reali si comportino, grosso modo, come elementi del substrato ma mai a stretto rigore perché saranno sempre influenzati da masse vicine).

1.3 Le equazioni di Friedmann

Richiedendo all'elemento di linea di R-W di essere soluzione delle equazioni del campo si ottengono due sole equazioni indipendenti per \mathcal{R} , fattore di scala dipendente solo dal tempo, che descrive l'espansione al tempo t di una delle ipersuperficie spaziali con cui si è scelto di foliare l'Universo (vedi Appendice A):

$$3\ddot{\mathcal{R}}^2 = -4\pi G(\rho c^2 + 3p)\mathcal{R} \quad (1.6)$$

$$\mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} + 2\dot{\mathcal{R}}^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)\mathcal{R}^2 \quad (1.7)$$

Si può fare una combinazione delle due (moltiplicando la prima per \mathcal{R} , aggiungendo la seconda e dividendo il tutto per $2c^2\mathcal{R}^2$)

$$\frac{2\ddot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2c^2} + \frac{\dot{\mathcal{R}}^2}{\mathcal{R}^2c^2} + \frac{k}{\mathcal{R}^2} = -\frac{8\pi Gp}{c^4} \quad (1.8)$$

e ancora (si sottrae la seconda moltiplicata per $\frac{3}{\mathcal{R}}$ dalla prima e si divide per $3c^2\mathcal{R}$)

$$\frac{\dot{\mathcal{R}}^2}{\mathcal{R}^2c^2} + \frac{k}{\mathcal{R}^2} = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} \quad (1.9)$$

che si può riscrivere

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho\mathcal{R}^2 - kc^2 \quad (1.10)$$

e derivando rispetto al tempo (dopo aver moltiplicato per \mathcal{R} e diviso per c^2)

$$\mathcal{R}^2\dot{\mathcal{R}}\left(\frac{2\ddot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2c^2} + \frac{\dot{\mathcal{R}}^2}{\mathcal{R}^2c^2} + \frac{k}{\mathcal{R}^2}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{8\pi G\rho\mathcal{R}^3}{3c^2}\right) \quad (1.11)$$

Il termine in parentesi è il primo membro della (2) e, se non si ha un termine di pressione, si annulla, quindi

$$\frac{8\pi G\rho\mathcal{R}^3}{3c^2} = cost = \frac{2G}{c^2} \frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{R}^3 \quad (1.12)$$

Ciò non stupisce perché $\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{R}^3$ è la massa contenuta all'interno di una sfera di raggio \mathcal{R} ; \mathcal{R} aumenta durante l'espansione, la densità diminuisce ma la massa deve rimanere costante.

Si vede allora che una legge di conservazione deriva direttamente dalle equazioni del campo (ciò era già noto perché $G = KT$, $\nabla G = 0 \Rightarrow \nabla T = 0$ e l'annularsi della quadridivergenza di T esprime leggi di conservazione locali di energia ed impulso).

Moltiplichiamo la (1.10) per \mathcal{R}

$$\dot{\mathcal{R}}^2 \mathcal{R} = \frac{8}{3} \pi G \rho \mathcal{R}^3 - k c^2 \mathcal{R} \quad (1.13)$$

ossia

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{C}{\mathcal{R}} - k c^2 \quad (1.14)$$

che è tradizionalmente chiamata *seconda equazione di Friedmann*. La prima si ottiene invece come conseguenza dell'identità di Bianchi; da $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ risulta

$$\mathcal{R}^3 \frac{dp(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathcal{R}^3 (\rho(t) + \frac{p(t)}{c^2})] \quad (1.15)$$

e, poiché la funzione \mathcal{R} dipende solo da t , si può scrivere $\frac{d}{dt} = \frac{d\mathcal{R}}{dt} \frac{d}{d\mathcal{R}}$ e quindi avere una forma più utile

$$\frac{d(\rho \mathcal{R}^3)}{d\mathcal{R}} = -3 \frac{p}{c^2} \mathcal{R}^2 \quad (1.16)$$

Partendo dall'ipotesi estremamente semplificatrice del principio cosmologico ci si è ridotti a due sole equazioni, per giunta alla derivate totali, invece delle 10 equazioni alle derivate parziali di partenza. Le incognite sono ora $\mathcal{R}, \rho(t), p(t)$ con in più il valore della costante di curvatura k che, potendo assumere solo i valori $k = 1, 0, -1$, origina tre soluzioni topologicamente diverse.

1.4 Integrazione delle equazioni di Friedmann

Prima di integrare le equazioni di Friedmann occorre notare che, essendo due equazioni in tre incognite, per poterle risolvere è necessaria una *equazione di stato*

$$p = w \rho c^2, \quad (1.17)$$

con w costante e compreso nell'intervallo

$$0 \leq w \leq 1. \quad (1.18)$$

La prima equazione di stato che si userà sarà quella adatta alla situazione attuale del nostro universo visibile, in cui le galassie sono sufficientemente lontane da non interagire,

se non gravitazionalmente, tra loro e la densità media di materia misurata è circa 10^{-31} g/cm^3 , mentre la densità di energia della radiazione a tutte le frequenze è dell' ordine di 10^{-35} g/cm^3 ; la dinamica è, quindi, determinata totalmente dalla materia. In questo caso è $p \ll \rho$ e sarà ragionevole porre $p = 0$, ossia $w = 0$, in tutte le equazioni.

Allora, la prima equazione di Friedmann dice subito che

$$\frac{d(\rho\mathcal{R}^3)}{d\mathcal{R}} = 0 \quad (1.19)$$

e cioè che $\rho\mathcal{R}^3 = \text{cost} = \rho_0\mathcal{R}_0^3$ dove si indica con i pedici “0” i valori delle funzioni al tempo attuale t_0

Come già detto -e come si ricaverà dalle equazioni da risolvere- il nostro Universo si sta espandendo. Infatti, riprendendo l' equazione tt di Einstein (vedi Appendice A)

$$3\ddot{\mathcal{R}} = -4\pi G(\rho c^2 + 3p)\mathcal{R}, \quad (1.20)$$

si può notare che, finché la parentesi rimane positiva, dato che $\mathcal{R} > 0$ per definizione, $\ddot{\mathcal{R}} < 0$, cioè si ha un moto di espansione rallentata. Poiché $\dot{\mathcal{R}} > 0$ visto che si osserva un allontanamento globale delle galassie, la curva $\mathcal{R}(t)$ volgerà sempre la concavità verso il basso e quindi, ad un certo punto, intercerterà l'asse dei tempi in un istante t^* in cui si avrà, per l' appunto, $\mathcal{R}(t^*) = 0$.

Conviene fare una traslazione dell'asse dei tempi, cosa sempre possibile in relatività, e porre $\mathcal{R}(0) = 0$.

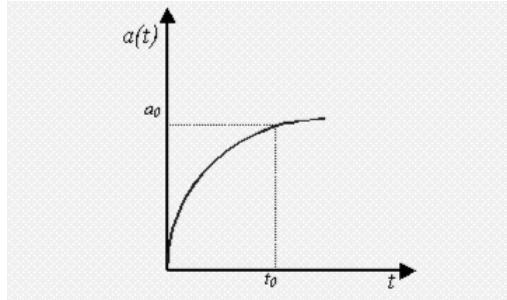


Figura 1.1: Diagramma preliminare di $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t)$

Dalla Figura (1.1), cioè dall' equazione tt di Einstein, si deduce immediatamente che se si va indietro nel tempo, la funzione $\mathcal{R}(t)$ diminuisce e quindi, data la relazione $\rho \propto \mathcal{R}^{-3}$, la $\rho(t)$ aumenta sempre; perciò si arriverà ad una situazione in cui la materia si troverà in

uno stato di plasma e non sarà più possibile usare l'equazione di stato $p = 0$ e bisognerà studiare il modello con un'altra equazione di stato. Quella più semplice per un fluido di particelle ultrarelativistiche in equilibrio termodinamico, com'è il caso di un gas di fotoni, è

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2 \quad (1.21)$$

In questo caso si ricava, sempre dalla prima equazione di Friedmann

$$\rho\mathcal{R}^4 = \text{cost} = \rho_0\mathcal{R}_0^4. \quad (1.22)$$

Date queste premesse, si può integrare le equazioni di Friedmann, cominciando dal caso $p = 0$.

Bisogna mostrare le soluzioni per i tre valori di k .

1. $k = 0$

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{C}{\mathcal{R}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}d\mathcal{R} = C^{\frac{1}{2}}dt \quad (1.23)$$

e integrando

$$\mathcal{R}(t) = at^{\frac{2}{3}} \quad \text{con} \quad a = \left(\frac{9}{4}C\right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.24)$$

con costante di integrazione nulla se si vuole che per $t \rightarrow 0$ anche $\mathcal{R} \rightarrow 0$. Questo modello è detto di *Einstein-de Sitter* ed è il limite tra il modello chiuso e quello aperto. Inoltre descrive un universo che si espande indefinitamente (vedi Figura 1.2) ($\mathcal{R} \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$).

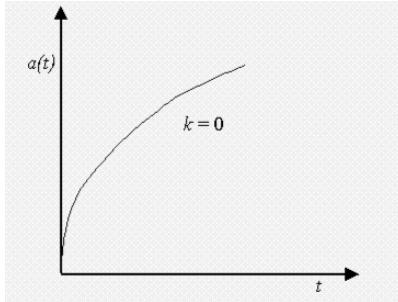


Figura 1.2: Diagramma per un universo a sezione spaziale Euclidea

2. $k = 1$ In questo caso l'equazione da risolvere è

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{C}{\mathcal{R}} - c^2 \quad (1.25)$$

e, esplicitando il valore di $C = 2G\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{R}^3$

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{2GM}{\mathcal{R}} - c^2 \quad (1.26)$$

Si fa ora un cambiamento di variabili definendo $x = \frac{\mathcal{R}}{x_0}$ e $t' = \frac{t}{t_0}$, dove $x_0 = \frac{2GM}{c^2}$ e $t_0 = \frac{2GM}{c^3}$. L'equazione (1.26) diventa

$$\frac{dx}{dt'} = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \quad (1.27)$$

Ponendo $x = \sin^2 \theta$ l'equazione (1.27) può essere riscritta come

$$dt' = 2 \sin^2 \theta d\theta \quad (1.28)$$

da cui

$$\begin{aligned} t' &= 2 \int \sin^2 \theta d\theta = \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}(2\theta - \sin 2\theta) = \frac{1}{2}(\phi - \sin \phi) \\ x &= \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \phi) \end{aligned} \quad (1.29)$$

A questo punto

$$\mathcal{R} = xx_0 = \frac{GM}{c^2}(1 - \cos \phi) \quad (1.30)$$

Analogamente per t si ricava

$$t = \frac{GM}{c^3}(\phi - \sin \phi) \quad (1.31)$$

che è l'espressione parametrica di una cicloide. Questo tipo di Universo è detto

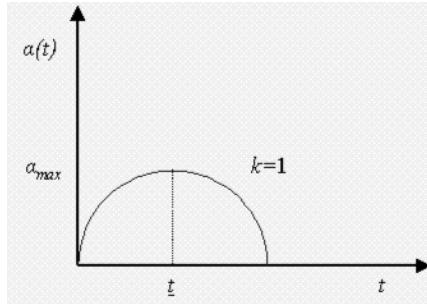


Figura 1.3: Diagramma per un universo spazialmente chiuso

spazialmente *chiuso* in quanto il suo volume è finito in ogni istante $t \neq 0$ ed è pari a $2\pi^2\mathcal{R}^3$. Dal grafico si nota che l'espansione parte dal valore $\mathcal{R} = 0$ e raggiungerà il suo valore massimo per $\phi = \pi$ in cui $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{max} = \frac{2GM}{c^2}$ per poi cominciare una fase di contrazione fino a raggiungere di nuovo il valore $\mathcal{R} = 0$.

3. $k = -1$ Per quanto concerne l'integrazione della seconda equazione di Friedmann questo caso è analogo al precedente, semplicemente la sostituzione da farsi sarà

$$x = \sinh \theta \quad (1.32)$$

e si ottiene

$$\mathcal{R} = \frac{GM}{c^2} (\cosh \phi - 1) \quad (1.33)$$

e

$$t = \frac{GM}{c^3} (\sinh \phi - \phi) \quad (1.34)$$

che ha l'andamento di Figura (1.4) e rappresenta un universo spazialmente *aperto* -

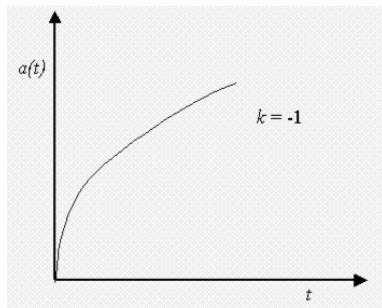


Figura 1.4: Diagramma per un universo spazialmente aperto

nel senso che il suo volume è sempre infinito per ogni $t \neq 0$ -, anch'esso caratterizzato da un'espansione indefinita e, inoltre qui $\dot{\mathcal{R}} > 0$ sempre e non si annulla nemmeno all'infinito.

Come si vede, l'integrazione delle equazioni dinamiche fornisce solo la $\mathcal{R}(t)$, ma non il valore di k che dovrà essere ricavato dalle osservazioni. La relatività generale non è sufficiente da sola a determinare una cosmologia; bisogna fissare una geometria e la relatività generale dice come evolve questa geometria.

Quale modalità di evoluzione segue l'Universo? È possibile individuare qualcosa di osservabile in natura che permetta di rispondere a questa domanda?

Come si vedrà, ciò è potenzialmente possibile: si tratta di determinare con la massima precisione la densità media della materia nell'Universo. In termini qualitativi questa cosa si comprende dicendo che una densità alta vuol dire forte attrazione gravitazionale, quindi forte rallentamento dell'espansione; densità bassa, invece, è sinonimo di debole attrazione gravitazionale e perciò di incapacità a frenare un'espansione indefinita.

1.5 Derivazione newtoniana delle equazioni di Friedmann

Per avere un’ulteriore idea fisica di questi modelli si possono prendere le equazioni di Friedmann e farle derivare da visione puramente newtoniana dell’espansione nella quale, però, si esige la preesistenza di uno spazio euclideo.

In questo spazio si considera una distribuzione sferica di massa M e raggio \mathcal{R} che sta dilatandosi nel tempo; i costituenti elementari di questo “universo” -per esempio le galassie- avranno tutte le possibili velocità in tutte le possibili direzioni e, in un tempo sufficientemente grande, raggiungeranno distanze enormi. Ragionando meccanicamente, ci si può domandare che azione gravitazionale si eserciti su una galassia che si trovi sulla superficie della sfera. La forma della legge di Newton è tale che la forza esercitata a distanze maggiori di \mathcal{R} è equivalente a quella che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel centro della distribuzione

$$\ddot{\mathcal{R}}^2 = -\frac{GM}{\mathcal{R}^2} = -\frac{G\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{R}^3}{\mathcal{R}^2} = -\frac{1}{2}\frac{C}{\mathcal{R}^2} \quad \text{con } C = \frac{8}{3}\pi G\rho\mathcal{R}^3 \quad (1.35)$$

che corrisponde all’equazione tt di Einstein; inoltre, passando all’energia si ha

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{C}{\mathcal{R}} + \text{cost}, \quad (1.36)$$

e la costante si può prendere $\text{cost} = kc^2$.

Una visione completamente classica della dinamica dell’Universo porta allo stesso risultato della trattazione relativistica (ciò non significa che la cosmologia newtoniana abbia un senso reale ma serve semplicemente per una analogia delle interpretazioni); in questo caso, però, il ruolo che si attribuisce a k è concettualmente diverso dal ruolo attribuito alla stessa costante ricavata per via relativistica: ora ha, infatti, un significato energetico. La seconda equazione di Friedmann può essere interpretata come la legge di conservazione dell’energia (en. cinetica+en. potenziale=en. totale=costante). Ciò che determina la velocità con cui il singolo oggetto raggiunge l’infinito è l’energia totale:

- $E_T > 0$ corrisponde ad una descrizione dinamica in cui il corpo di prova raggiunge l’infinito con velocità finale residua non nulla;
- $E_T = 0$ corrisponde ad una velocità residua nulla;
- $E_T < 0$ fa sì che il corpo torni nell’origine, e quindi esiste un valore di t per cui $\dot{\mathcal{R}}$ si annulla e poi cambia segno.

1.6 I parametri cosmologici

Prendiamo in esame un qualsiasi caso che sia contemplato dalla soluzione di Robertson-Walker, quindi un universo con sezioni spaziali a tempo cosmico costante soggetto a dilatazioni.

Se si fa riferimento alla situazione a curvatura costante positiva, si può pensare al fattore di scala come ad un vero e proprio raggio di una sfera tridimensionale che si sta espandendo. In una situazione del genere il raggio va aumentando e si può pensare a due momenti di tempo cosmico t_0 e t_1 in cui \mathcal{R} passa da $\mathcal{R}(t_0)$ a $\mathcal{R}(t_1)$ con $\mathcal{R}(t_0) < \mathcal{R}(t_1)$.

Consideriamo, in questo quadro, due galassie che siano situate in due posizioni A e B nella sezione di tempo cosmico t_0 e che, a causa dell'espansione, andranno a finire in due punti dilatati dello spazio; osserviamo ora la situazione in cui un certo pacchetto d'onda, con una certa lunghezza d'onda caratteristica λ_0 , venga emesso all'istante t_0 dalla galassia in A e si propaghi verso la galassia in B che raggiungerà al tempo t_1 .

Il punto di vista sul redshift dei segnali luminosi emessi da sorgenti cosmiche tipico della cosmologia contemporanea è quello che una dilatazione dello spazio comporta una dilatazione della stessa lunghezza d'onda di propagazione: come già detto, l'espansione è dello spazio e non nello spazio e perciò il redshift non viene visto come dovuto ad un effetto Doppler (non c'è una velocità effettiva di traslazione perché le galassie, di fatto, sono in quiete) e quindi sarà $\lambda_0 \propto \mathcal{R}_0$ e $\lambda_1 \propto \mathcal{R}_1$.

Per studiare meglio la situazione, si ricordi che l'equazione del moto di un raggio luminoso diretto radialmente verso di noi è direttamente ricavabile dalla metrica di R-W in cui bisogna imporre che si tratti di un'onda elettromagnetica, il cui moto è caratterizzato dalla condizione $ds^2 = 0$, e che sia radiale, cioè $d\varphi = d\theta = 0$. Quindi si ottiene

$$dt^2 = \frac{\mathcal{R}(t)^2}{1 - kr^2} dr^2. \quad (1.37)$$

Una cresta d'onda, che parta da una sorgente posta alla coordinata r_1 e all'istante t_1 , giunge a noi, che siamo alla coordinata $r = 0$, all'istante t_0 ; perciò separando le variabili e integrando

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f_k(r_1), \quad (1.38)$$

dove

$$f_k(r_1) = \begin{cases} \arcsin r_1 & \text{se } k = 1 \\ r_1 & \text{se } k = 0 \\ \sinh^{-1} r_1 & \text{se } k = -1, \end{cases} \quad (1.39)$$

è una funzione solo di k e della coordinata comovente r_1 della sorgente.

L'onda successiva lascia la sorgente a r_1 al tempo $t_1 + \Delta t_1$ e arriva a noi al tempo $t_0 + \Delta t_0$, per cui sarà

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} = f_k(r_1), \quad (1.40)$$

in cui il secondo membro non è cambiato perché r_1 è una coordinata comovente e quindi non cambia nel tempo.

Dall'uguaglianza dei secondi membri si ottiene

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)}, \quad (1.41)$$

che può essere riscritta come

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} + \int_{\Delta t_1} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} + \int_{\Delta t_0} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)}. \quad (1.42)$$

Semplificando e notando che nel tempo medio sia dell'emissione che della ricezione di un'onda il fattore di scala può essere considerato costante, si ha

$$\frac{\Delta t_0}{\mathcal{R}(t_0)} = \frac{\Delta t_1}{\mathcal{R}(t_1)}, \quad (1.43)$$

o anche

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta(t_0)} = \frac{\mathcal{R}(t_1)}{\mathcal{R}(t_0)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \quad (1.44)$$

Si definisce allora *parametro di redshift* la quantità

$$z \equiv \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1} \quad (1.45)$$

che rappresenta la variazione percentuale della lunghezza d'onda tra l'emissione e la ricezione. Dalle relazioni ricavate si definisce

$$z \equiv \frac{\mathcal{R}(t_0)}{\mathcal{R}(t_1)} - 1. \quad (1.46)$$

In questo contesto z potrebbe diventare maggiore di 1 senza che questo implichi una violazione del secondo principio della Relatività Ristretta (se z fosse interpretato come dovuto ad effetto Doppler sarebbe, in prima approssimazione, $z \simeq v/c$).

La funzione $\mathcal{R}(t)$ per tempi vicini ad un dato tempo cosmico t_0 si può ovviamente esprimere con uno sviluppo in serie di potenze

$$\mathcal{R}(t) \sim \mathcal{R}(t_0) \left[1 + \frac{\dot{\mathcal{R}}_0}{\mathcal{R}_0} (t - t_0) + \frac{\ddot{\mathcal{R}}_0}{2\mathcal{R}_0} (t - t_0)^2 + \dots \right]; \quad (1.47)$$

definendo

$$H_0 \equiv \frac{\dot{\mathcal{R}}_0}{\mathcal{R}_0} = \text{costante di Hubble}; \quad q_0 \equiv -\frac{\ddot{\mathcal{R}}_0 \mathcal{R}_0}{\dot{\mathcal{R}}_0^2} \quad (1.48)$$

si ottiene

$$\mathcal{R}(t) \sim \mathcal{R}_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right] \quad (1.49)$$

che è l'espressione da inserire in z per ottenere una relazione tra distanza e redshift confrontabile con le osservazioni.

Dato che le osservazioni sono compiute al tempo attuale, è importante conoscere le relazioni che ci sono tra i parametri che oggi si possono misurare.

Scriviamo allora la seconda equazione di Friedmann valutata all'epoca presente

$$\dot{\mathcal{R}}_0^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \mathcal{R}_0^2 \quad (1.50)$$

da cui si può ricavare ρ_0

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{\mathcal{R}}_0^2}{\mathcal{R}_0^2} + \frac{k}{\mathcal{R}_0^2} \right) = \frac{3}{8\pi G} \left(H_0^2 + \frac{k}{\mathcal{R}_0^2} \right) = \rho_{oc} + \frac{3k}{8\pi G \mathcal{R}_0^2} \quad (1.51)$$

essendo $\rho_{oc} = 3H_0^2/8\pi G$ la densità attuale per avere un universo con sezione spaziale piatta e cioè con $k = 0$. Il suo valore è circa 10^{-29} g/cm^3 (se $H_0 = 100 \text{ km/s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$) ed è chiamata *densità critica* in quanto rappresenta la separazione tra i modelli chiusi e quelli aperti.

Inoltre le equazioni *ii* e *tt* di Einstein, sempre valutate oggi e con $p = 0$

$$3\ddot{\mathcal{R}}_0 = -4\pi G \rho_0 \mathcal{R}_0 \quad (1.52)$$

$$\mathcal{R}_0 \ddot{\mathcal{R}}_0 + 2\dot{\mathcal{R}}_0^2 + 2k = 4\pi G \rho_0 \mathcal{R}_0^2 \quad (1.53)$$

forniscono, dividendo membro a membro la seconda per la prima e tenendo conto delle definizioni di H_0 e q_0 ,

$$\frac{k}{\mathcal{R}_0^2} = (2q_0 - 1)H_0^2 \quad (1.54)$$

da cui

$$2q_0 = 1 + \frac{k}{\mathcal{R}_0^2 H_0^2} \quad (1.55)$$

Confrontando tra loro le relazioni ricavate sopra si ottiene

$$\frac{\rho_0}{\rho_{0c}} = 2q_0 \quad (1.56)$$

Infatti ρ_0 può essere scritto come

$$\rho_0 = \rho_{0c} \left(1 + \frac{3k}{8\pi G \mathcal{R}_0^2 \rho_{0c}} \right) = \rho_{0c} \left(1 + \frac{k}{\mathcal{R}_0^2 H_0^2} \right) \quad (1.57)$$

Conviene anche introdurre il *parametro di densità* definito da

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}} \quad (1.58)$$

Si hanno così le relazioni

$$\rho_0 > \rho_{0c} \Rightarrow \Omega_0 > 1 \Rightarrow q_0 > \frac{1}{2} \Rightarrow k = 1 \quad (1.59)$$

$$\rho_0 = \rho_{0c} \Rightarrow \Omega_0 = 1 \Rightarrow q_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 0 \quad (1.60)$$

$$\rho_0 < \rho_{0c} \Rightarrow \Omega_0 < 1 \Rightarrow q_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow k = -1 \quad (1.61)$$

Date tutte queste premesse, si può vedere che forma assumono le equazioni di Friedmann e le loro soluzioni nei tre casi.

La prima equazione afferma che $\rho(t) = \rho_0 \mathcal{R}_0^3 \mathcal{R}(t)^{-3}$; la seconda si scrive allora come

$$\left(\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}_0} \right)^2 = -\frac{k}{\mathcal{R}_0^2} + \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}} \quad (1.62)$$

e, usando le relazioni viste prima tra i parametri

$$\left(\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}_0} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}} \right) + (1 - \Omega_0) \right] \quad (1.63)$$

Nel caso dell'Einstein-de Sitter ($\Omega_0 = 1$) l'equazione diventa

$$\left(\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}_0} \right)^2 = H_0^2 \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}} \quad (1.64)$$

che integrata da

$$\frac{2}{3} \mathcal{R}^{\frac{3}{2}} = H_0 \mathcal{R}_0^{\frac{3}{2}} t \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}} \mathcal{R}_0 \quad (1.65)$$

e, dividendo per $\mathcal{R}_0 = (\frac{3}{2} H_0 t_0)^{\frac{2}{3}}$

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.66)$$

che è equivalente a

$$t = t_0 (1+z)^{-\frac{3}{2}}. \quad (1.67)$$

Per gli altri parametri si ha

$$H(t) \equiv \frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = \frac{2}{3t} = H_0 \frac{t_0}{t} = H_0(1+z)^{\frac{3}{2}} \quad (1.68)$$

$$q = \frac{1}{2} \quad (1.69)$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad (1.70)$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2} = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (1.71)$$

dove, nell'ultimo passaggio si è usata la relazione $\rho_0 t_0^2 = \rho_{0c} t_{0c}^2 = 3H_0^2/8\pi G [2/3H_0]^2 = 1/6\pi G$.

Nel caso del modello chiuso ($\Omega > 1$), si è trovata come soluzione

$$\mathcal{R}(t) = \frac{GM}{c^2} (1 - \cos \phi) \quad (1.72)$$

Se si opera la sostituzione $M = 4/3\pi\rho_0\mathcal{R}_0^3$ e si divide per ρ_{0c} si ottiene

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \frac{\Omega_0}{2} \frac{H_0^2 \mathcal{R}_0^2}{c^2} (1 - \cos \phi) \quad (1.73)$$

e, dato che qui $k = 1 \Rightarrow -c^2/H_0^2 \mathcal{R}_0^2 = 1 - \Omega_0$

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R}_0}{2} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} (1 - \cos \phi) \quad (1.74)$$

e lo stesso per t

$$t = \frac{GM}{c^3} (\phi - \sin \phi) = \frac{1}{2} \Omega_0 \frac{H_0^2 \mathcal{R}_0^3}{c^3} (\phi - \sin \phi) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} (\phi - \sin \phi) \quad (1.75)$$

perciò anche i loro valori massimi si possono riscrivere così

$$\mathcal{R}_{max} = \mathcal{R}_0 \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \quad (1.76)$$

$$t = \frac{\pi}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.77)$$

Se il modello che si considera è quello aperto si ottengono equazioni analoghe

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R}_0}{2} \frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0} (\cosh \phi - 1) \quad (1.78)$$

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{\frac{3}{2}}} (\sinh \phi - \phi) \quad (1.79)$$

1.7 Universi di radiazione

Continuando l'analisi dei modelli, si può notare che, in ogni caso, andando indietro nel tempo, la densità aumenta fino ad arrivare ad una situazione in cui predomina dinamicamente la densità di energia della radiazione. Occorre quindi usare la relazione $p = \frac{1}{3}\rho$ che, come già detto, comporta che $\rho \propto \mathcal{R}^{-4}$. In tal caso si nota come nell'equazione di Friedmann

$$\dot{\mathcal{R}}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 \mathcal{R}_0^4}{\mathcal{R}^2} \quad (1.80)$$

il secondo termine è costante mentre gli altri divergono al tendere di t (e quindi di \mathcal{R}) a 0. Dunque il modello di universo antico è insensibile al valore della curvatura spaziale e pertanto è lecito studiarlo con $k = 0$.

Integrando l'equazione si ha la soluzione

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.81)$$

o anche

$$t = t_0(1+z)^{-2} \quad (1.82)$$

e i corrispondenti valori dei parametri risultano

$$H = \frac{1}{2t} = H_0(1+z)^2 \quad (1.83)$$

$$q = 1 \quad (1.84)$$

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \quad (1.85)$$

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2} \quad (1.86)$$

1.8 Universi con costante cosmologica

Consideriamo nuovamente le equazioni del campo gravitazionale

$$G_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu}. \quad (1.87)$$

Un teorema generale attribuito a Cartan afferma che il tensore $\binom{0}{2}$ simmetrico, che ha derivata geometrica nulla e contiene linearmente derivate fino alla seconda del tensore metrico è una combinazione lineare del tensore di Einstein e del tensore metrico, cioè $G + \Lambda g$ (infatti g è covariantemente costante).

Una costante di questo tipo fu introdotta dallo stesso Einstein a modificare le sue equazioni per ottenere delle soluzioni che fossero statiche (ossia con $\ddot{\mathcal{R}} = 0 = \dot{\mathcal{R}}$ in accordo con l'idea che si aveva nel 1917 riguardo alla struttura dell'universo).

Questa costante, detta appunto *costante cosmologica* ha la proprietà di simulare una sorta di repulsione cosmica. Tale forza può essere ipotizzata se è sufficientemente piccola da non influenzare il moto dei corpi di prova nel campo del sole in quanto qui le equazioni senza Λ forniscono risultati in perfetto accordo con le osservazioni. Se si riesce a dimostrare questo si può ottenere un modello a curvatura costante positiva. Le equazioni diventano

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - \Lambda g^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \quad (1.88)$$

Trasportando l'ultimo termine del primo membro a secondo membro e interpretandolo non più come un fattore geometrico ma come un elemento del tensore energia-impulso, quest'ultimo diventa

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}g^{\mu\nu} = (\tilde{p} + \tilde{\rho})u^\mu u^\nu - \tilde{p}g^{\mu\nu} \quad (1.89)$$

dove

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad \text{e} \quad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad (1.90)$$

In queste condizioni la seconda equazione di Friedmann, che ha la forma

$$\dot{\mathcal{R}}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\tilde{\rho}\mathcal{R}^2 \quad (1.91)$$

e l'equazione *tt* di Einstein

$$3\ddot{\mathcal{R}} = -4\pi G(\tilde{\rho} + \frac{3\tilde{p}}{c^2})\mathcal{R}^2 \quad (1.92)$$

permettono una soluzione statica quando

$$k = \frac{8\pi G}{3c^2}\tilde{\rho}\mathcal{R}^2 \quad (1.93)$$

con

$$\tilde{\rho} = -3\tilde{p} = \frac{3kc^2}{8\pi G\mathcal{R}^2} \quad (1.94)$$

Per $p = 0$ si ottiene

$$\Lambda = \frac{k}{\mathcal{R}^2} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{kc^2}{8\pi G\mathcal{R}^2} \quad (1.95)$$

dato che $\rho > 0 \Rightarrow k = 1$ e $\Lambda > 0$.

Queste relazioni ci forniscono anche il valore di Λ che renderebbe statico l'universo

$$\Lambda_E = \frac{4\pi G\rho}{c^2} \quad (1.96)$$

Se $\rho \sim 10^{-30}$ g/cm³ $\Rightarrow \Lambda \sim 10^{-57}$ cm⁻².

In questo modello si può identificare \mathcal{R} col raggio dell'Universo; determinando \mathcal{R} si determina il volume dell' ipersfera ($2\pi^2\mathcal{R}^3$) e, moltiplicandolo per ρ , la massa totale $M = 10^{55}$ g.

È interessante analizzare l'insieme dei modelli evolutivi che si possono costruire con l'introduzione della costante cosmologica, sempre usando la metrica di R-W.

La seconda equazione di Friedmann diventa

$$\dot{\mathcal{R}}^2 + kc^2 - \frac{\Lambda c^2}{3}\mathcal{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho\mathcal{R}^2 \quad (1.97)$$

mentre la prima resta identica.

Questa equazione ci dice che l'espansione dell'Universo è guidata da tre termini: un termine di materia, uno contenente la costante cosmologica ed uno di curvatura. Conviene poi definire i loro rispettivi contributi all'epoca attuale come già fatto per il termine di materia

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad \Omega_k \equiv -\frac{k}{\mathcal{R}_0^2 H_0^2} \quad (1.98)$$

L'equazione 1.97 implica che

$$\Omega_M + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1$$

Si definisce poi $\Omega_{tot} \equiv \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k$ Ricavando $\dot{\mathcal{R}}$ dalla 1.97 si ha

$$\dot{\mathcal{R}} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho\mathcal{R}^2 + \frac{\Lambda c^2}{3}\mathcal{R}^2 - kc^2} \quad (1.99)$$

Utilizzando l'equazione di stato $p = \rho/3$ e cioè $\rho\mathcal{R}^4 = \rho_0\mathcal{R}_0^4$, la condizione che $\dot{\mathcal{R}}$ sia reale è

$$\Lambda \geq \frac{3k}{\mathcal{R}^2} - \frac{8\pi G\rho_0\mathcal{R}_0^4}{c^2\mathcal{R}_0^4} \quad (1.100)$$

I risultati sarebbero un po' diversi, ma qualitativamente analoghi, se si fosse usata l'equazione $p = 0$.

Studiando allora il piano (\mathcal{R}, Λ) si ha una visione d'insieme di tutti i modelli omogenei ed isotropi con costante cosmologica.

Il caso $k = 1$ fornisce la curva di Figura 1.5

in cui i possibili modelli sono le linee orizzontali (con $\Lambda = cost$).

Si nota che, per $\Lambda = 0$, il tratto permesso, da $\mathcal{R} = 0$ a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_m$ rappresenta l'universo chiuso di Friedmann; per valori positivi di Λ sono possibili universi chiusi fino a Λ_E , che è circa il valore previsto da Einstein (non è proprio quello perché non si è fatto uso di

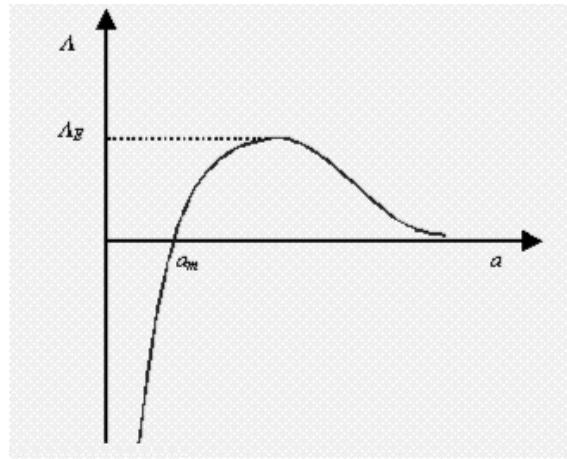


Figura 1.5: Curva $\Lambda = \Lambda(\mathcal{R})$ per $k = 1$

$p = 0$). Ma sono possibili anche universi aperti se $\Lambda > \Lambda_E$ e modelli sempre aperti e senza singolarità a partire dalle estremità destre della curva; per valori di Λ minori di zero, invece, possono esistere solo universi chiusi, il che appare ovvio dall'interpretazione della costante cosmologica come forza gravitazionale repulsiva (e quindi attrattiva se negativa). Per i valori di $k \neq 1$ sono possibili gli universi aperti di Friedmann quando $\Lambda \geq 0$; se $\Lambda < 0$ esistono solo universi chiusi perché entrambe le curve di Figura (1.6) tendono asintoticamente a $\Lambda = 0$.

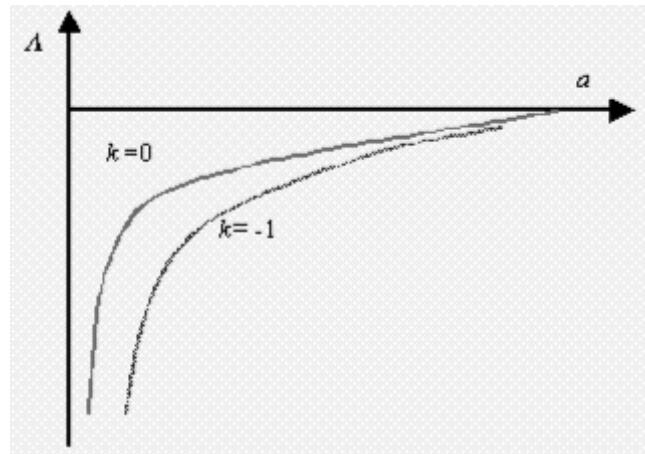


Figura 1.6: Curve $\Lambda = \Lambda(\mathcal{R})$ per $k \neq 1$

La scoperta dell'espansione dell'Universo aveva eliminato la necessità di un modello statico, ma ciò non toglie il fatto che la costante cosmologica rimane un termine aggiuntivo

legittimo alle equazioni del campo. L'unico modo per eliminare la Λ dalla cosmologia serebbe quello di misurare tutti gli altri termini nella seconda equazione di Friedmann con una precisione tale da poter affermare che il termine $\Lambda c^2/3$ è trascurabile, cosa che va ben al di là degli attuali mezzi di ricerca. In realtà oggi c'è una ragione più profonda per credere che Λ sia una costante non nulla e che quindi giochi un ruolo importante nella dinamica dell'Universo.

1.9 Energia del vuoto

La costante cosmologica è un parametro dimensionale con unità di $[L]^{-2}$. Dal punto di vista della relatività generale non c'è una scelta privilegiata per la lunghezza di scala definita da Λ . Tuttavia, i fisici delle particelle guardano al problema da una diversa prospettiva. Il *principio di indeterminazione di Heisenberg* permette la creazione spontanea di coppie particella-antiparticella. Come Ω_M è associata alla densità delle particelle reali, così Ω_Λ è associata agli stati virtuali, di "vuoto" delle stesse particelle, cioè alla densità di energia-impulso dei loro stati di vuoto. Gli effetti gravitazionali di queste particelle virtuali conferiscono al vuoto una densità di energia ρ_{vac} . Il termine "vuoto" non sta ad indicare uno *spazio* vuoto ma lo stato fondamentale, di minima energia di una particella.

In generale, lo stato fondamentale deve essere Lorentz-invariante (cioè deve apparire lo stesso per ogni osservatore). Ciò implica che il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ del vuoto deve essere proporzionale, in ogni sistema di riferimento inerziale, alla metrica minkowskiana, diag(-1,1,1,1), dato che questa è la sola matrice 4×4 che è invariante sotto trasformazioni di Lorentz in relatività ristretta.

Come sappiamo, un fluido perfetto con densità ρ e pressione p ha il tensore energia-impulso nella forma diag(ρ, p, p, p). Confrontandolo con la metrica di Minkowski si deduce che

- il vuoto è un fluido perfetto
- e ha equazione di stato

$$p_{vac} = -\rho_{vac} \tag{1.101}$$

Non è una coincidenza che l'equazione di stato trovata sia esattamente quella per cui, applicando la prima legge della termodinamica, ρ_{vac} rimane costante se il volume è compresso o espanso adiabaticamente: il lavoro $p dV$ fornisce esattamente l'ammontare di massa-energia necessario per riempire il nuovo volume della stessa densità ρ_{vac} . In questo

modo ρ_{vac} è veramente una costante e il suo legame con Λ è semplicemente $\Lambda = 8\pi G\rho_{vac}$. Questa equivalenza è all'origine dell'identificazione della costante cosmologica con l'energia del vuoto.

In meccanica classica l'energia del vuoto è irrilevante; infatti si parla di particelle con energia $E = T + V$, dove T è l'energia cinetica e V l'energia potenziale. La forza che agisce su una particella è data dal gradiente di V , per cui possiamo aggiungere una costante arbitraria a V senza alterarne il moto; spesso sceglieremo questa costante in modo che il minimo di V sia zero e diciamo che la particella ha energia nulla nel suo stato fondamentale. La meccanica quantistica aggiunge un altro contributo, dalle energie di punto zero associate alle fluttuazioni del vuoto. Si consideri, per esempio, un oscillatore armonico frequenza ω , ossia una particella di massa m che si muove sotto l'azione di un potenziale unidimensionale $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Classicamente il "vuoto" per questo sistema è lo stato in cui la particella è ferma nel minimo del potenziale ($x = 0$), per cui l'energia in questo caso si annulla. Tuttavia, in meccanica quantistica il principio di indeterminazione ci impedisce di isolare la particella in uno stato con posizione e momento fissati e si trova che lo stato di minima energia ha un'energia $E_0 = \hbar\omega/2$.

Una situazione analoga si ha in teoria dei campi: un campo quantistico può essere pensato come l'insieme di un numero infinito di oscillatori armonici con tutte le possibili frequenze. Per un campo scalare di massa m l'energia di punto zero è semplicemente la somma dei vari contributi

$$E_0 = \sum_j \frac{1}{2}\hbar\omega_j \quad (1.102)$$

in cui la somma è fatta su tutti i possibili modi del campo, per esempio su tutti i vettori d'onda \mathbf{k} . La somma può essere eseguita mettendo il sistema in una scatola di volume L^3 e mandando L all'infinito. Se imponiamo delle condizioni al contorno ponendo $\lambda_i = \frac{L}{n_i}$ per qualche intero n_i , allora, dato che $k_i = 2\pi/\lambda_i$, ci saranno $dk_i L/2\pi$ valori discreti di k_i nell'intervallo $(k_i, k_i + dk_i)$. In questo modo la somma diventa

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar L^3 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{k}}. \quad (1.103)$$

La densità di energia si ottiene per $L \rightarrow \infty$ e dividendo per il volume L^3 . Per calcolare l'integrale bisogna usare la relazione $\omega_{\mathbf{k}}^2 = k^2 + \frac{m^2}{\hbar^2}$ e impostare un taglio ad un certo vettore d'onda $k_{max} \gg \frac{m}{\hbar}$. Allora l'integrale fornisce

$$\rho_{vac} \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{E_0}{L^3} = \hbar \frac{k_{max}^4}{16\pi^2}. \quad (1.104)$$

Quando $k_{max} \rho_{vac}$ tende all'infinito ρ_{vac} diverge, ma sappiamo che nessuna semplice teoria valida alle basse energie può essere vera ad alte energie; quindi possiamo stimare k_{max} come la scala di energia alla quale la teoria quantistica dei campi non è più valida, che corrisponde all'energia di Planck $E^* \sim 10^{19} \text{Gev} \sim 10^{16} \text{erg}$. Scegliendo allora $k_{max} = \frac{E^*}{\hbar}$ otteniamo

$$\rho_{vac} \approx 10^{74} \text{Gev}^4 \hbar^{-3} \approx 2 \times 10^{110} \text{erg/cm}^3 \quad (1.105)$$

mentre le osservazioni implicano

$$|\rho_{vac}^{(obs)}| \leq 2 \times 10^{-10} \text{erg/cm}^3. \quad (1.106)$$

Il rapporto tra questi due valori è all'origine della famosa discrepanza di 120 ordini di grandezza tra il valore teorico e quello osservato della costante cosmologica.

Come in meccanica classica, l'energia del vuoto non produce effetti misurabili all'interno della meccanica quantistica non gravitazionale. Però, uno dei postulati della relatività generale è che la gravitazione si accoppia ad ogni forma di energia e momento; poichè la gravità è la sola forza per cui questo è vero, l'unica manifestazione della dark energy sarà attraverso la sua azione gravitazionale. Ovviamente, per una densità così elevata tale manifestazione sarebbe drammatica. Allora si potrebbe postulare una costante cosmologica aggiuntiva $\Lambda' = -8\pi G \rho_{vac}$ in modo che la costante "netta" sia esattamente zero. Tuttavia, l'energia del vuoto non risulta solo dalle fluttuazioni di un singolo campo; nella realtà esistono diverse particelle ciascuna col suo diverso contributo e con i contributi derivanti dalle loro interazioni, perciò, dato l'elevato numero di campi presenti nel modello standard, è molto improbabile che essi cospirino per produrre una costante cosmologica nulla.

Bisogna inoltre sottolineare che l'introduzione di una costante cosmologica è perfettamente compatibile con lo scenario inflazionario. L'inflazione postula una espansione iniziale esponenziale causata dalla dark energy di un campo scalare intrappolato in un "falso vuoto", lontano dal vero minimo del suo potenziale. Durante la fase esponenziale, questa dark energy è per l'appunto una costante cosmologica non nulla.

Capitolo 2

Le supernovae di tipo Ia come indicatori cosmologici

In questo capitolo si descrivono le recenti indicazioni osservative, in particolare quelle derivate dalle supernovae Ia, che sembrano suggerire la necessità di cosmologie più complesse di quelle classiche descritte nel capitolo precedente.

2.1 Supernovae di tipo Ia

Come sappiamo, è facile misurare la magnitudine apparente di un oggetto lontano, ma è notoriamente difficile dedurne quella assoluta. Recentemente sono stati fatti progressi significativi usando le supernovae di tipo Ia come "candele standardizzabili".

Le supernovae sono eventi rari, ma i telescopi moderni permettono agli osservatori di spingersi molto in profondità in piccole regioni di cielo, potendo così esaminare un gran numero di galassie in un singolo ciclo di osservazione. Le supernovae sono anche oggetti molto brillanti, e quelle di tipo Ia in particolare sembrano avere la stessa luminosità intrinseca ($M \sim -19.5$, paragonabile alla brillanza dell'intera galassia che le ospita). Perciò possono essere osservate anche ad alti redshift ($z \sim 1$), fornendo in teoria un buon mezzo per verificare gli effetti cosmologici.

Anche se esiste ancora una dispersione del 40% circa nel picco di brillanza osservato per le supernovae vicine, probabilmente indice delle differenze nella composizione delle atmosfere della nana bianca da cui derivano, queste differenze sono, in realtà, strettamente correlate alla forma della curva di luce: le SNe più deboli presentano un declino più rapido dopo il massimo, mentre le più brillanti declinano più lentamente. Le SNe si presentano così come una famiglia di eventi ad un parametro, e quindi, misurando la magnitudine apparente e

analizzando l’andamento della curva di luce si possono correggere le differenze intrinseche di luminosità, riducendo la dispersione dal 40% a meno del 15%, una precisione sufficiente per discriminare tra i vari modelli cosmologici.

Due gruppi indipendenti hanno intrapreso la ricerca di supernovae lontane allo scopo di determinare i parametri cosmologici, l’High-Z Supernova Team e il Supernova Cosmology Project: le SNe individuate appaiono più deboli delle loro controparti locali. Considerando i modelli di Friedmann, esse risultano troppo poco luminose anche per un Universo vuoto caratterizzato da un’espansione libera. Ciò implica un cambiamento significativo nel nostro modo di vedere l’Universo lontano: i risultati ottenuti possono essere spiegati solo con dei modelli che implicino qualche forma di accelerazione. I più semplici reintroducono la costante cosmologica con equazione di stato $p = -\rho$. Insieme alle misure recenti effettuate sul CMB che indicano una geometria piatta, e ad una bassa densità di materia, come dedotto dall’evoluzione degli ammassi di galassie, le SNe Ia individuano una regione di confidenza piuttosto stretta sul piano $\Omega_M - \Omega_\Lambda$. Con questi nuovi valori dei parametri sembra anche essere risolto il problema dell’età dinamica dell’Universo.

D’altra parte, l’ampiezza dell’accelerazione, se interpretata come costante cosmologica, è in netta contraddizione con le previsioni delle teorie particellari. In più noi staremmo vivendo in un periodo privilegiato in cui la densità di materia e la costante cosmologica contribuiscono in ugual misura all’espansione cosmica.

Possibili spiegazioni non cosmologiche potrebbero essere ricercate nella polvere intergalattica, con caratteristiche tali da non modificare significativamente il colore degli oggetti, nell’evoluzione delle esposizioni, o nella deamplificazione causata da lenti gravitazionali. Tutte le indicazioni correnti conducono alla conclusione che nessuna di queste alternative è in grado di spiegare da sola la debolezza delle SNe. Il colore intrinseco delle SNe Ia lontane è più blu di quello del campione locale. Già questo rende l’ipotesi della polvere poco probabile. D’altra parte l’evoluzione degli oggetti potrebbe influenzare il picco di brillanza, ma ancora ciò è in contraddizione con le osservazioni locali, in cui gli oggetti più blu sono tipicamente anche i più brillanti. Per quanto concerne la deamplificazione causata da strutture a larga scala è stato stimato che questa sia dell’ordine dello 0.15% a $z = 0.5$ e dell’ 1% a $z = 1$ e, anche se l’effetto ha la stessa influenza di una costante cosmologica, la sua ampiezza è del tutto trascurabile.

2.2 La supernova 1997ff

Nella figura 2.1 sono mostrati i dati distanza-redshift per le SNe Ia presentati dal Supernova Cosmology Project e dal High-z Supernova Search Team insieme a dei modelli cosmologici che differiscono per i diversi valori di Ω_M e Ω_Λ . Sia gli uni che gli altri sono graficati in base alla loro differenza da un universo vuoto ($\Omega_M = 0.0, \Omega_\Lambda = 0.0$). Si può notare come tutti i modelli siano equivalenti nel limite di $z = 0$, mentre le differenze cominciano ad essere cospicue a $z > 0.1$. La presenza di un'alta densità di energia del vuoto e dell'attuale accelerazione è messa in evidenza dalla debole luminosità delle SNe con $0.3 < z < 0.8$ confrontata con quella prevista per un modello aperto da cui differisce per circa 0.25 mag.

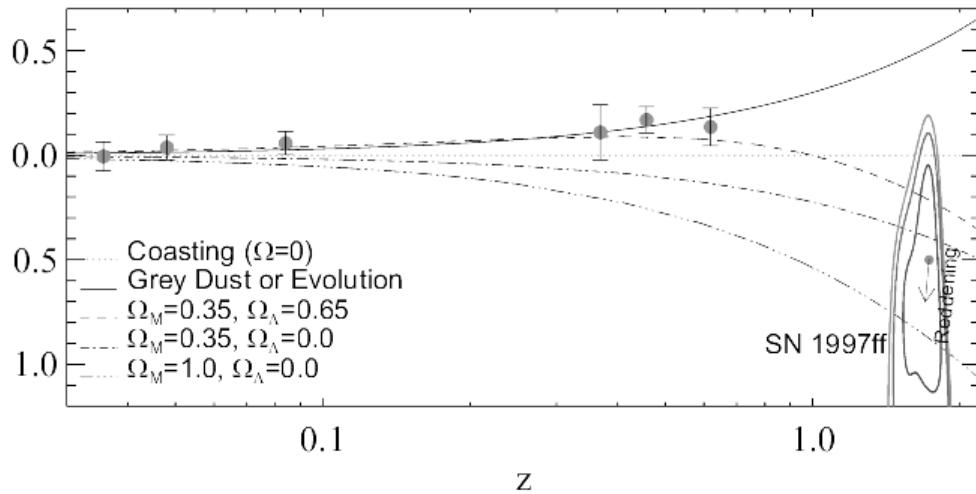


Figura 2.1: Diagramma di Hubble delle SNe Ia meno un universo vuoto ($\Omega_{TOT} = 0$) confrontato con modelli cosmologici e astrofisici. I punti rappresentano i dati sul redshift del HZT e del SCP. Sono anche indicati gli intervalli di confidenza (68%, 95%, 99%) per la SN 1997ff. Le misure sulla SN 1997ff sono inconsistenti con l'ipotesi di effetti astrofisici che potrebbero simulare l'accelerazione dell'universo che risulta dai dati sulle SNe a $z \approx 0.5$

Si è già detto che una spiegazione alternativa alla debolezza delle SNe a $z \approx 0.5$ potrebbe

essere la contaminazione da due effetti astrofisici in particolare: l’evoluzione delle stesse SNe e la polvere intergalattica. Anche se i test diretti per verificare la validità di queste due ipotesi rendono le stesse poco probabili, un test più potente per poter verificare l’esistenza di un effetto astrofisico che continua ad indebolire le SNe anche a z maggiori, sarebbe quello di osservare SNe a $z > 1$. A questi redshift l’universo era più compatto e perciò la gravità dovrebbe dominare la repulsione cosmica. La decelerazione risultante dovrebbe portare ad un aumento della luminosità delle SNe rispetto ad un’espansione libera o alla contaminazione di qualche effetto astrofisico. Il redshift della SN 1997ff, la supernova più lontana osservata attualmente, è abbastanza alto, $z = 1.7$, per sondare questa epoca più antica e per discriminare tra le ipotesi precedenti.

Nella figura 2.1 sono anche mostrati i limiti derivanti da questa supernova, anche se, essendo l’unico oggetto osservato in questo intervallo di redshift così alti, la figura stessa deve essere interpretata con cautela.

La SN 1997ff risulta più brillante di $\sim 1.1mag$ (e quindi più vicina) rispetto a quanto ci si aspetterebbe da un effetto astrofisico che indebolisce le sorgenti a $z \approx 0.5$ e oltre. Il livello di confidenza di questa affermazione è alquanto alto ($> 99.99\%$) e porta a concludere che l’accelerazione dell’universo a $z \approx 0.5$ sia reale e ad escludere le altre più semplici alternative.

Nello stesso modo sono esclusi i modelli con un’alta dark energy e una bassa densità di materia (per esempio $\Omega_M = 0.0, \Omega_\Lambda = 1$). Inoltre, se assumiamo una geometria piatta per l’universo come suggerito dalle misure sul CMB, le osservazioni della SN 1997ff eliminano i casi in cui $\Omega_\Lambda > 0.85$ o anche $\Omega_M < 0.15$ e suggeriscono il fatto che l’universo stava decelerando all’epoca dell’esplosione. Per comprendere meglio ciò, in figura 2.2 è mostrata la relazione distanza-redshift per le SNe confrontate con una famiglia di modelli piatti e contenenti il termine cosmologico. Per questi, il redshift di transizione fra l’epoca di accelerazione e quella di decelerazione è dato dalla relazione $z = (2\Omega_\Lambda/\Omega_M)^{1/3} - 1$. Per valori crescenti di Ω_Λ , il punto di transizione si sposta a redshift più alti. Il valore più alto di Ω_Λ che ancora si accorda, anche se marginalmente, con i dati sulla SN1997ff è $\Omega_\Lambda = 0.85$, per il quale la transizione si verifica a $z = 1.25$, significativamente al di sotto del redshift della SN1997ff. L’ipotesi che l’universo abbia cominciato ad accelerare prima dell’esplosione richiederebbe un’ $\Omega_\Lambda > 0.9$, ampiamente in disaccordo con la luminosità della supernova, mentre l’aumento della distanza di luminosità misurata delle SNe Ia tra

$z \approx 0.5$ e $z \approx 1.7$ di un fattore 4.0 è molto minore che nella maggior parte delle cosmologie con espansione libera (per esempio $\Omega_\Lambda = 0.0, \Omega_M = 0.0$) e favorisce, invece, l'ipotesi di una decelerazione oltre questo range di redshift. Tuttavia un test rigoroso per verificare la decelerazione richiede delle considerazioni più approfondite sulla natura della dark energy (costante cosmologica, campo scalare oscillante, ecc.). Un campione più grande di SNe nel range $0.5 < z < 2.0$ permetterebbe di discernere tra questi modelli, distinguendo tra le diverse equazioni di stato $w = p/\rho c^2$

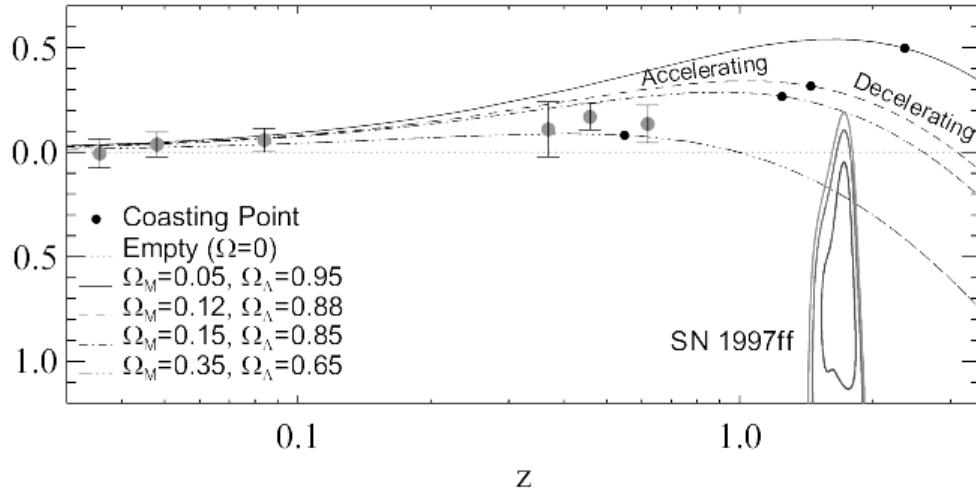


Figura 2.2: Diagramma di Hubble delle SNe Ia meno un universo vuoto ($\Omega_{TOT} = 0$) confrontato con modelli cosmologici piatti e comprendenti ognuno un diverso contributo di Ω_Λ . È indicato il redshift di transizione tra la fase accelerata e quella decelerata che è dato da $[2\Omega_\Lambda/\Omega_M]^{1/3} - 1$. La SN 1997ff giace all'interno dell'epoca di decelerazione. La sua luminosità apparente è inconsistente con valori di $\Omega_\Lambda \geq 0.9$ e perciò con un redshift di transizione maggiore di quello della SN stessa.

2.3 Una misura delle distanze

In un generico spaziotempo curvo non esiste una nozione privilegiata di distanza tra due oggetti. Nella metrica di Robertson-Walker si è scelto di foliare lo spaziotempo con delle

ipersuperfici spaziali, quindi è possibile definire la distanza tra due oggetti comovingi - quelli le cui linee di universo sono perpendicolari alle ipersuperfici spaziali. Ponendo noi stessi nell'origine delle coordinate $r = 0$, la distanza coordinata r da un altro oggetto comovingo risulta indipendente dal tempo. Questa può essere convertita in una distanza fisica ad un tempo fissato t_* moltiplicando per il fattore di scala $\mathcal{R}(t_*)$; si ottiene così un numero che varia con l'espansione dell'Universo. Tuttavia, gli intervalli sulle sezioni spaziali non sono accessibili alle osservazioni e perciò è più conveniente usare misure di distanza che si possano dedurre da quantità osservate.

Queste includono la *distanza di luminosità*,

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (2.1)$$

dove L è la luminosità intrinseca della sorgente e F il flusso misurato; nelle comologie di FRW d_L è valutata calcolando la superficie della sfera su cui è distribuito il flusso proveniente da una sorgente posta a distanza z ; la *distanza propria*,

$$d_M \equiv \frac{u}{\dot{\theta}}, \quad (2.2)$$

dove u è la velocità propria e $\dot{\theta}$ la velocità angolare osservata; e la *distanza angolare*,

$$d_A \equiv \frac{D}{\theta}, \quad (2.3)$$

dove D è la dimensione propria dell'oggetto e θ la sua dimensione angolare apparente. Tutte queste definizioni si riducono alla usuale nozione di distanza in uno spazio euclideo. In un universo di FRW la distanza propria diventa la distanza fisica su una sezione spaziale a $t = t_0$:

$$d_M = \mathcal{R}_0 r. \quad (2.4)$$

Le tre misure sono legate da

$$d_L = (1 + z)d_M = (1 + z)^2 d_A \quad (2.5)$$

e sono indipendenti dalla dinamica di $\mathcal{R}(t)$. Ciò è probabilmente uno svantaggio dato che non possiamo conoscere nulla riguardo a Ω_M e Ω_Λ o altre forme di energia solo confrontando due tipi di distanza relativi ad uno stesso oggetto. Piuttosto, questa informazione è contenuta nella dipendenza della distanza dal redshift. Se consideriamo un raggio di luce, \mathcal{R}, r e t sono legati dall'equazione per una geodetica nulla

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(1 - kr^2)^{1/2}}{\mathcal{R}}. \quad (2.6)$$

Noi adottiamo un modello convenzionale in cui il contenuto di energia dell'Universo è composto dalla somma di diverse componenti, ciascuna avente una frazione Ω_i della densità critica ρ_c ed una diversa equazione di stato $p_i = w_i \rho_i$. Inserendola nell'equazione che esprime la conservazione dell'energia-impulso $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, troviamo che la densità di energia dipende da una potenza del fattore di scala

$$\rho_i \propto \mathcal{R}^{-n_i} \quad (2.7)$$

in cui l'esponente è legato al parametro dell'equazione di stato da

$$n_i = 3(1 + w_i). \quad (2.8)$$

Moltiplicando la (2.12) per \mathcal{R} , e usando le definizioni di lookback time, $\Omega_K = \sum \Omega_i - 1$ e z otteniamo la formula per la distanza al redshift z_1

$$d_M = \frac{1}{H_0 |\Omega_K|^{1/2}} \text{sinn}\{|\Omega_K|^{1/2} \int_0^{z_1} [\sum \Omega_i (1+z)^{3(1+w_i)} - \Omega_K (1+z)^2]^{-1/2} dz\}, \quad (2.9)$$

dove "sinn" è definito come \sinh se $\Omega_K > 0$ e \sin se $\Omega_K < 0$. L'integrale può essere risolto analiticamente solo in alcuni casi particolari (p.e. $\Omega_{tot} = 1$), mentre, in generale, deve essere valutato numericamente.

A causa della dipendenza di $\Omega_K = 1 - \Omega_{tot}$ nella funzione sinn, non è completamente ovvia un'analisi qualitativa della precedente equazione. Se consideriamo due sole componenti, per esempio Ω_M e Ω_Λ , per Ω_{tot} fissato, o quando $\Omega_\Lambda = 0$ la distanza cresce man mano che Ω_M diminuisce e ciò avviene per ogni z . Fissato Ω_M , invece, si perde la monotonicità al crescere di Ω_Λ : la distanza crescerà a piccoli redshift ma tenderà a diminuire a z maggiore di un valore particolare.

Alternativamente, passando alla distanza di luminosità, l'equazione (2.13) si può espandere in z :

$$d_L H_0 = z + z^2 \left(\frac{1 - q_0}{2} \right) + \mathcal{O}(z^3), \quad (2.10)$$

che è valida per qualunque modello considerato. Il termine lineare rappresenta la legge di Hubble che è già stata verificata con grande precisione nell'Universo vicino usando le SNe Ia e gli ammassi di galassie. Il dibattito attuale sul valore di H_0 punta ad ottenere una calibrazione assoluta per questi indicatori attraverso una misura accurata della loro distanza. Le stime della curvatura e della decelerazione, invece, richiedono solo delle

distanze relative per ricavare la forma della funzione (d_L, z) e perciò non sono affette dall'incertezza sul valore di H_0 .

L'equazione (2.14) mostra che gli scostamenti nella distanza di luminosità dalla pura legge di Hubble, nell'ordine più basso in z , sono proporzionali a q_0 , cioè dipendono solo dalla decelerazione e non dalla curvatura.

2.4 Misurare Ω_i verso Ω_M dalla relazione $m - z$

Il classico diagramma magnitudine-redshift per una candela campione rimane probabilmente l'approccio più diretto per la misura dei parametri cosmologici che caratterizzano l'espansione dell'Universo. All'interno dei modelli di Friedmann-Lemaître la magnitudine apparente $m(z)$ di una candela standard ad un dato redshift è funzione sia della densità di materia Ω_M che delle altre componenti della densità di energia:

$$\begin{aligned} m(z) = & M + 5 \log d_L(z; \Omega_M, \Omega_i, H_0) + 25 \equiv M + \\ & + 5 \log \mathcal{D}_L(z; \Omega_M, \Omega_i) - 5 \log H_0 + 25 \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove $\mathcal{D}_L \equiv H_0 d_L$ è quella parte dell'espressione della distanza di luminosità che resta dopo aver messo in evidenza la dipendenza dalla costante di Hubble.

Nel limite di bassi redshift questa relazione si riduce alla classica relazione lineare tra m e $\log cz$:

$$m(z) = M + 5 \log cz - 5 \log H_0 + 25 = \mathcal{M} + 5 \log cz \quad (2.12)$$

dove con $\mathcal{M} \equiv M - 5 \log H_0 + 25$ si è indicata la magnitudine di punto zero. Questa quantità può essere ricavata dalla magnitudine apparente e dal redshift di candele standard a basso z senza conoscere H_0 .

In questo modo, con un set di misure di magnitudine apparente e redshift ($m(z)$) per candele campione ad alto z ed un altro a basso redshift per la misura di \mathcal{M} , si può trovare un best fit di valori di Ω_M e Ω_i per risolvere l'equazione

$$m(z) - \mathcal{M} = 5 \log \mathcal{D}_L(z; \Omega_M, \Omega_i). \quad (2.13)$$

Con un modulo di distanza, $m - M = 5 \log(\mathcal{D}_L/10pc)$, misurato con una precisione di Δm mag per un oggetto a redshift z , l'equazione (2.14) mostra, usando $\Delta m = 5 \Delta \log \mathcal{D}_L$ come sia possibile ricavare q_0 con una incertezza $\Delta q_0 \approx 0.9 \Delta m/z$; quindi, una singola supernova a $z = 0.5$ con $\sigma = 0.15$ mag fornirebbe un $\Delta q_0 = 0.27$ che permetterebbe di discriminare un

Universo aperto ($q_0 = 0$) da uno piatto ($q_0 = 0.5$). Tuttavia bisogna tener presente che già a $z = 0.5$ i temini di ordine superiore in z non possono più essere trascurati, specialmente nei modelli in cui si considera un grosso contributo della costante cosmologica o di altre forme di energia.

2.5 $w_i < -1$?

Come già visto precedentemente numerosi metodi di osservazione indipendenti indicano che la maggior parte della densità di energia nell'Universo debba trovarsi in una componente che fornisca una pressione negativa. Nonostante la possibilità più semplice sia quella di inserire nell'equazione del moto una costante cosmologica con equazione di stato $p = -\rho$, nulla vieta di considerare una dark energy rappresentata da un'equazione di stato dipendente dal tempo, $p_Q = w_Q(t)\rho_Q$. Una siffatta componente è già stata invocata dai modelli di *quintessenza* per spiegare il problema della coincidenza, ossia il fatto che la densità di energia contenuta nella dark energy e quella contenuta nella materia siano all'epoca attuale dello stesso ordine di grandezza. Infatti, accoppiando un campo scalare alla materia si possono ottenere delle soluzioni per la dipendenza temporale della dark energy tali che questa segua sempre l'andamento col tempo della componente dominante della densità di energia.

Una caratteristica comune a tutti i candidati proposti per l'energia oscura è quella di avere $w_Q > -1$ ad ogni tempo, perciò la regione con $w_Q < -1$ è stata tagliata fuori da ogni tipo di analisi probabilistica atta alla ricerca di w_Q . Da un punto di vista puramente fenomenologico questa esclusione non è giustificata e costituisce una condizione particolarmente infelice se si pensa che i dati più recenti fissano un limite superiore per $w_Q < -0.85$ ma non un limite inferiore.

Allora, ciò che ci proponiamo di fare con i nostri fits è rianalizzare i dati sulle SNe Ia considerando anche modelli che ammettono equazioni di stato con $w_Q < -1$. Inoltre, per semplicità, facciamo l'approssimazione $w_Q(t) = \text{cost}$. Anche se ciò non è valido per la maggior parte dei modelli di dark energy, quasi tutti possono essere approssimati da un modello con $w_{Q,\text{eff}}$ costante, calcolato facendo una media pesata di $w_Q(t)$ ad ogni tempo. In questo modo otteniamo che anche la dark energy evolva semplicemente come $\rho_Q \propto \mathcal{R}^{-3(1+w_Q)}$.

2.6 I nostri test

2.6.1 Relazione distanza-redshift

Come già visto precedentemente, è necessario integrare numericamente l'equazione (2.14) nei casi di modelli a due o più componenti. Il programma *dislum*, riportato in Appendice D, calcola la distanza di luminosità per diversi modelli cosmologici svolgendo l'integrazione col metodo di Simpson e assumendo in input il numero di componenti la densità di energia, il loro valore e l'equazione di stato corrispondente, il redshift al quale si vuole terminare l'integrazione e il passo in z .

La figura (2.3) mostra la relazione distanza-redshift per alcuni modelli piatti ad una componente con diversa equazione di stato anche minore di -1 , assumendo $H_0 = 70 \text{ km/s Mpc}^{-1}$. Com'è ovvio, una equazione di stato più negativa implica una distanza maggiore ad un redshift fissato.

Dalla figura (2.4), invece, si nota come, inserendo anche una componente di materia le differenze fra i vari modelli si riducono notevolmente in quanto questa parte della densità di energia domina la relazione distanza-redshift.

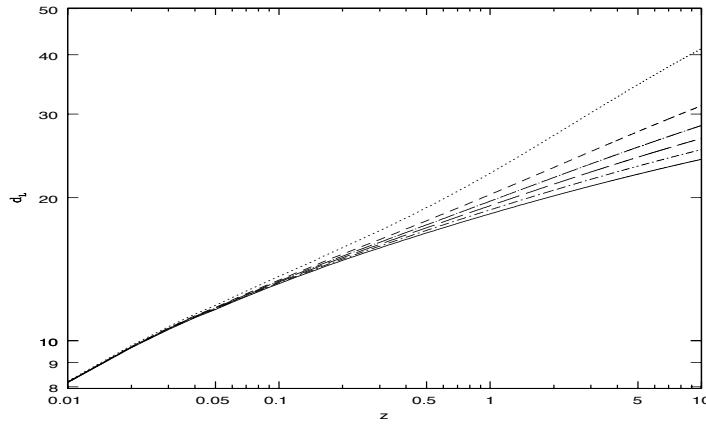


Figura 2.3: Distanza di luminosità in funzione del redshift per alcuni modelli piatti ad una componente: $\Omega_Q = 1$ con $w_P = -3/2$ (linea a tratteggio corto), $w_Q = -2/3$ (linea a tratteggio lungo), $w_Q = -1/3$ (linea tratteggio corto-punto), $w_Q = -3$ (linea punteggiata), $w_Q = -1$ (linea tratto lungo-punto) e un Einstein-de Sitter (linea continua)

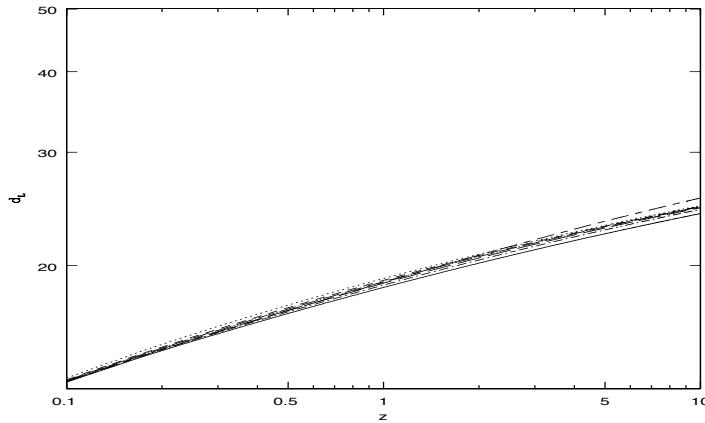


Figura 2.4: Distanza di luminosità in funzione del redshift per un modello aperto ad una componente di materia e 5 modelli piatti in cui, alla materia si è aggiunta una componente a pressione negativa : $\Omega_M = 0.5$ (linea tratto corto-lungo), $\Omega_M = 0.5$ e $\Omega_Q = 0.5$ con $w_Q = -3/2$ (linea tratto corto), $w_Q = -2/3$ (linea tratto lungo), $w_Q = -1/3$ (linea tratto corto-punto), $w_Q = -3$ (linea punteggiata), $w_Q = -1$ (linea tratto lungo-punto) e un Einstein-de Sitter (linea continua)

2.6.2 Interpolazione dei dati sulle SNe con alcuni modelli cosmologici

Il set di dati utilizzato è composto dal campione di 60 SNe (di cui 20 fanno parte del campione locale) già analizzato dal Supernova Cosmology Project, cui è stata aggiunta la SN 1997ff posta a $z = 1.7$.

Ci siamo serviti dei dati suddetti per fissare Ω_i e w_Q attraverso la relazione distanza-redshift:

$$m(z) - \mathcal{M} = 5 \log[\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(z_i, \Omega_i, w_i)], \quad (2.14)$$

che diventa un'equazione di primo grado lineare in $\log \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ e perciò è possibile calcolarne i coefficienti col metodo dei minimi quadrati.

Col programma *cosmosup* si è calcolata la distanza di luminosità delle SNe del campione a seconda del modello considerato e la si è utilizzata per trovare i coefficienti dell'equazione $y = A + Bx$ tramite un opportuno programma di fit, fissando a priori il valore di B che sappiamo essere 1. Lo stesso programma ci ha fornito anche il valore del χ^2 che nel nostro

caso è dato da

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[m_i - 5 \log[\mathcal{D}_L(z_i, \Omega_i, w_Q)] - \mathcal{M}]^2}{\sigma_i^2}, \quad (2.15)$$

dove σ_i comprende tutti gli errori sperimentalni sulla misura delle magnitudini.

I risultati sono riportati nelle figure (2.5-6-7-8). Abbiamo considerato alcuni tipi di Universo tra i più rappresentativi, fittando dei modelli piatti a due o tre componenti con diverse equazioni di stato e dei modelli chiusi, questi ultimi ispirati dalla luminosità di nuovo elevata della SN1997ff. Come ci aspettavamo, un modello chiuso con una elevata quantità di materia riesce a riprodurre la magnitudine osservata di questa stella, ma è completamente inconsistente col campione a $0.5 < z < 1$. La ragione sperimentale che ci ha spinto ad analizzare soprattutto modelli piatti, invece, è fornita dai dati recenti sulla misura delle fluttuazioni nello spettro di potenza del fondo cosmico che risultano nettamente a favore dell'ipotesi $\Omega_{TOT} = 1$. Inoltre ci si è messi nella condizione $\Omega_M = 0.3 - \Omega_Q = 0.7$ per tenere in considerazione i dati derivanti dagli ammassi di galassie, la cui dinamica risulta più sensibile alla densità di materia che ad una eventuale costante cosmologica, che porgono un' $\Omega_M \sim 0.3$. Come si può notare i dati sulle SNe sono fortemente in contrasto con il modello classico di Einstein-de Sitter, mentre si rende necessaria l'introduzione di una componente ad energia negativa in grado di accelerare l'Universo. Oltre a considerare una componente tipo costante cosmologica, modello già analizzato dal SN Cosmology Project e dal H-z SN Search Team, i dati sono stati fittati con modelli caratterizzati da diverse equazioni di stato comprendenti anche $w < -1$. È evidente che nessun Universo è da scartare a priori nel senso che i dati sono ancora troppo dispersi per poter discriminare tra le diverse equazioni di stato e che diventa necessario disporre di un campione a z maggiori dove l'influenza del parametro di decelerazione è maggiore. Tuttavia si vede come, considerando un Universo la cui espansione è guidata da tre componenti (materia, costante cosmologica e quintessenza con diversi valori di w), le curve si avvicinano l'una all'altra rendendo ancora più difficoltosa l'individuazione di un modello più adatto e, comunque, ancora nessuna di queste risulta essere completamente inconsistente. Tuttavia, una considerazione importante da fare è che nessuno dei modelli graficati in figura (2.7) è in grado di ridare la magnitudine osservata per la SN a $z = 1.7$, a meno che non si aumenti il contributo della materia e proporzionalmente si riduca la densità di energia oscura, come mostrato nella figura (2.9), da cui si deduce anche che più è negativa l'equazione di stato, più il contributo della materia deve essere maggiore perché la curva passi entro la barra

d'errore della suddetta SN, ma, a questo punto, la grossa quantità di materia è in contrasto con i dati forniti dalla dinamica degli ammassi e dal CMB.

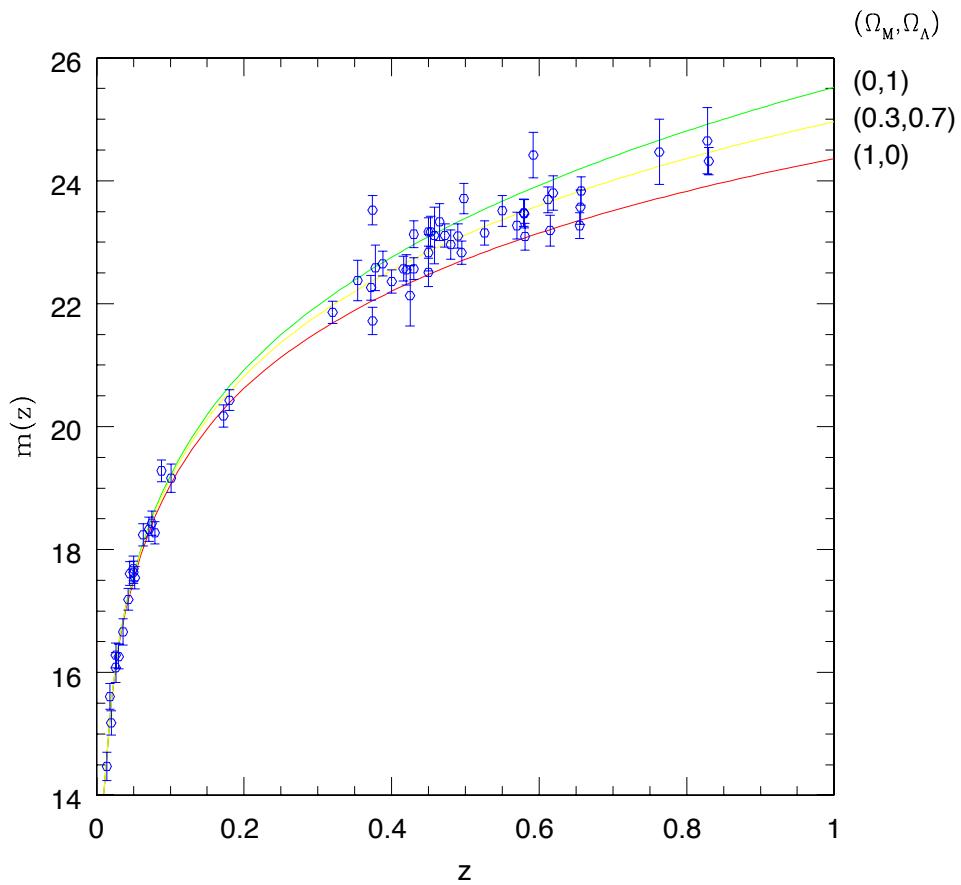


Figura 2.5: Relazione magnitudine apparente-redshift per 42 SNe ad alto z dal Supernova Cosmology Project e 18 a basso z dal Calan/Tololo Supernova Survey plottate con tre modelli piatti con costante cosmologica

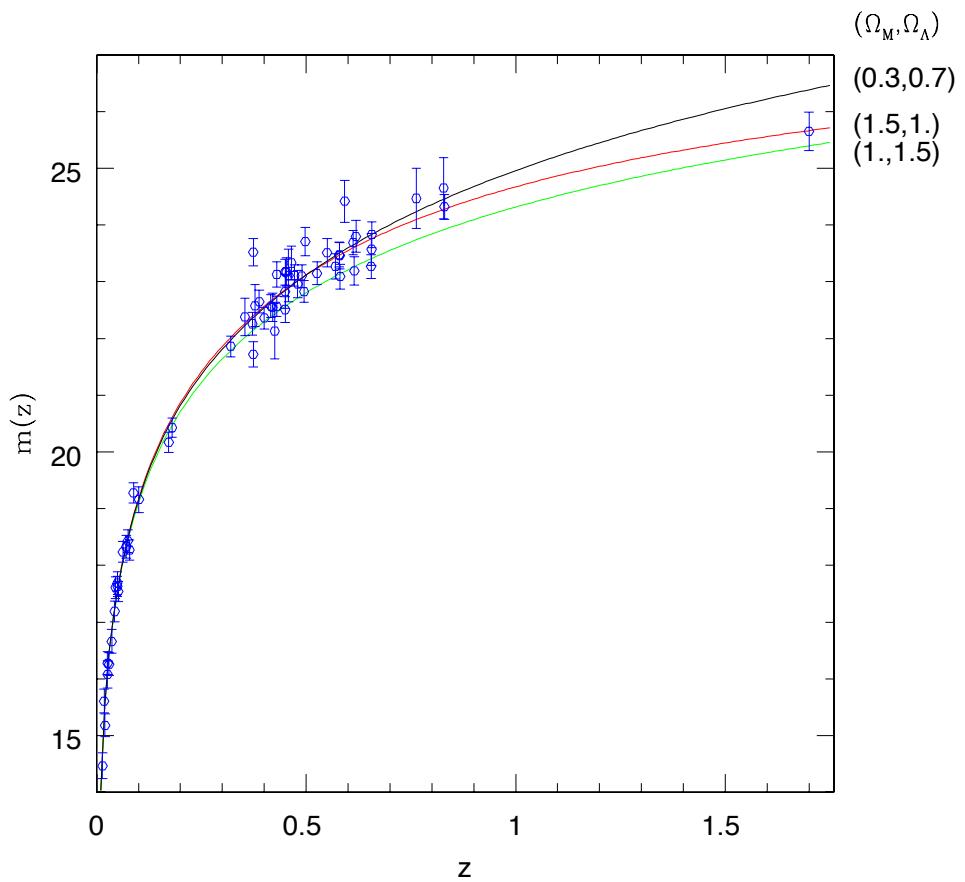


Figura 2.6: Relazione magnitudine apparente-redshift per 42 SNe ad alto z dal Supernova Cosmology Project, 18 a basso z dal Calan/Tololo Supernova Survey e la SN1997ff dal High- z SN Search plottate con due modelli chiusi con costante cosmologica

$$\Omega_M = 0.3 \quad \Omega_Q = 0.7$$

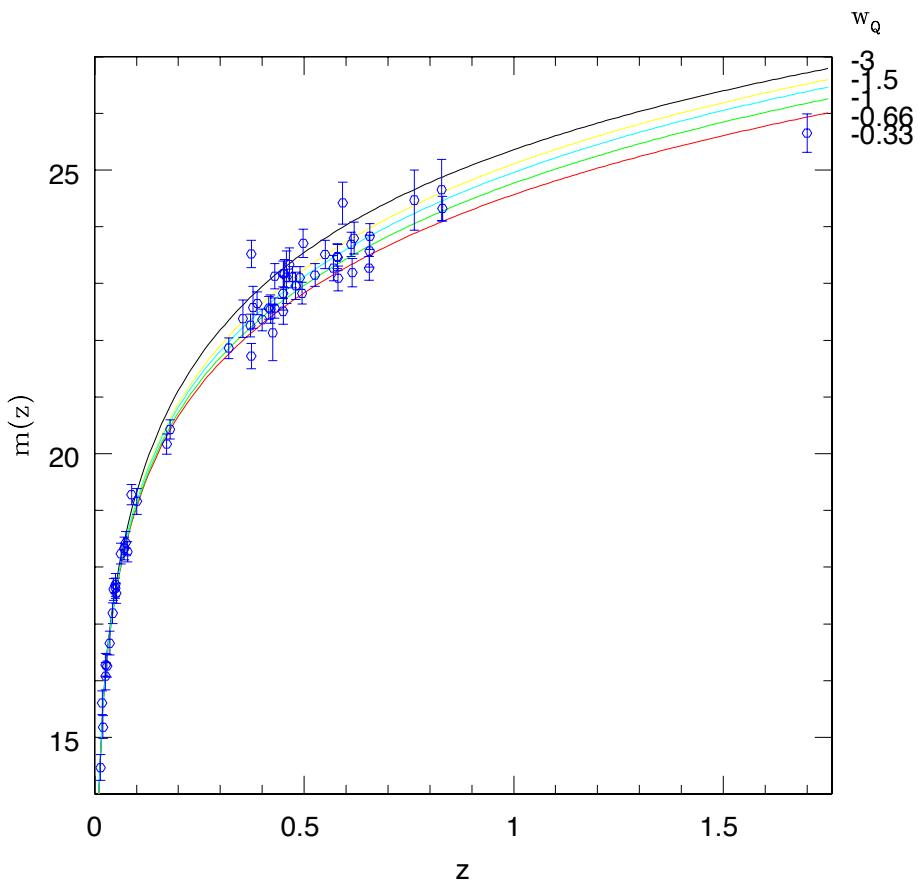


Figura 2.7: Relazione magnitudine apparente-redshift per 42 SNe ad alto z dal Supernova Cosmology Project, 18 a basso z dal Calan/Tololo Supernova Survey e la SN1997ff dal High- z SN Search plottate con quattro modelli piatti caratterizzati da differenti equazioni di stato

$$\Omega_M = 0.33 \quad \Omega_\Lambda = 0.33 \quad \Omega_Q = 0.33$$

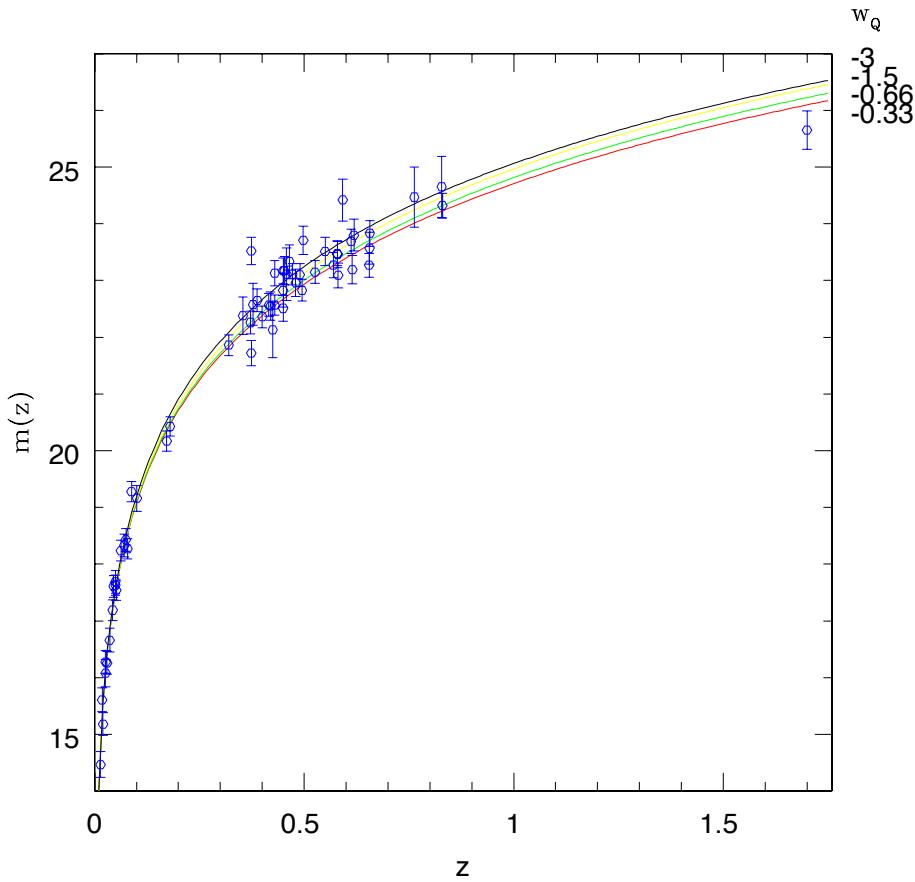


Figura 2.8: Relazione magnitudine apparente-redshift per 42 SNe ad alto z dal Supernova Cosmology Project, 18 a basso z dal Calan/Tololo Supernova Survey la SN1997ff dal High- z SN Search plottate con quattro modelli piatti a tre componenti ottenuti facendo variare l'equazione di stato della terza componente

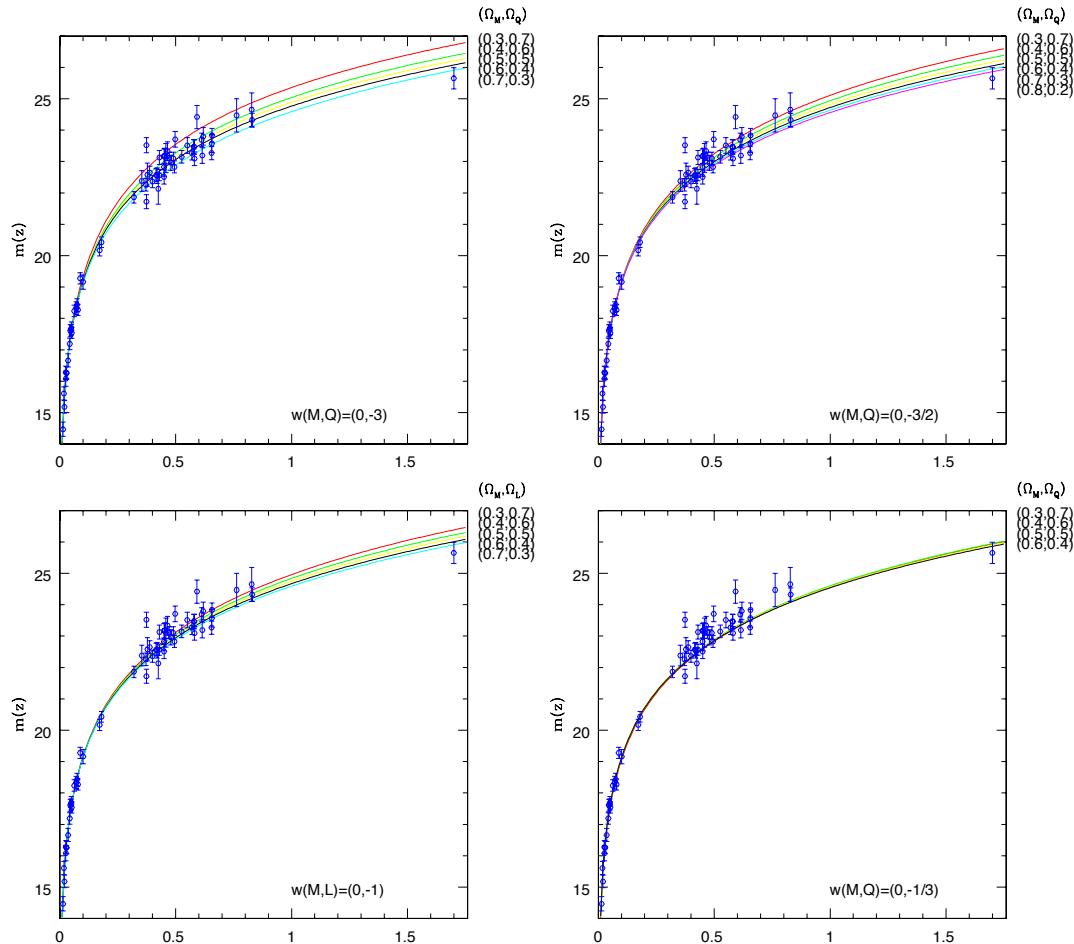


Figura 2.9: Relazione magnitudine apparente-redshift per 42 SNe ad alto z dal Supernova Cosmology Project, 18 a basso z dal Calan/Tololo Supernova Survey la SN1997ff dal High-z SN Search fittate con modelli piatti distinti sia per l'equazione di stato che per la densità di energia di ciascuna componente

2.6.3 Test di χ^2 ed ellissi di confidenza

Invece di presentare nel dettaglio la distribuzione di probabilità degli errori nella stima dei parametri cosmologici, scegliamo di visualizzarla sottoforma di regioni di confidenza. Com'è noto, la distribuzione di probabilità totale è una funzione definita nello spazio N-dimensionale dei parametri; un intervallo di confidenza è una regione di questo spazio che contiene una certa frazione della probabilità totale. Per la stima dei parametri scegliamo il metodo di minimalizzazione del χ^2 e costruiamo le nostre regioni di confidenza in questo modo: per il set di dati magnitudine-redshift utilizzato, il valore di χ^2 diventa minimo in corrispondenza di una determinata coppia di parametri $(\Omega_{M,min}, \Omega_{i,min})$ per $i = 1, \dots, N$. Chiamiamo questo valore minimo χ^2_{min} . Se il valore dei parametri si sposta da quello minimo, evidentemente il χ^2 aumenta; allora, la regione all'interno della quale $\chi^2 - \chi^2_{min} \leq \Delta\chi^2$, per un $\Delta\chi^2$ fissato, rappresenta un intervallo di confidenza attorno al valore minimo $(\Omega_{M,min}, \Omega_{i,min})$. Dato che la nostra analisi si limita al caso bidimensionale, gli intervalli di confidenza si ottengono come proiezioni delle regioni di confidenza N-dimensionalili nel sottospazio bidimensionale (Ω_M, Ω_i) per un valore fissato dell'indice i , quindi la loro forma geometrica è all'incirca quella di un'ellisse. Dalla teoria sulla distribuzione di probabilità dei parametri nel caso gaussiano in cui assumiamo di trovarci, sappiamo che fissando un $\Delta\chi^2 = 2.3$ l'ellisse di confidenza che scaturisce contiene il 68.3% della distribuzione di probabilità per i parametri (Ω_M, Ω_i) .

I risultati dei nostri tests sono riportati nelle figure (2.10-11-12-13-14) che raffigurano le ellissi di confidenza nel piano (Ω_M, Ω_Q) per diversi valori dell'equazione di stato w . Anche se equazioni di stato più negative implicano una quantità di dark energy inferiore e una densità di materia maggiore, come risulta evidente sia dalla pendenza dell'asse maggiore dell'ellisse di confidenza che aumenta al crescere di w , implicando valori fino a $\Omega_Q \sim 2.5$ per $w = -1/3$ e valori sempre più piccoli per Ω_M , che dalla forma dell'ellisse stessa, ovvero dalle dimensioni dell'asse minore che aumentano man mano che w diventa più negativo, comportando una maggiore incertezza sui possibili valori di Ω_M per un dato Ω_Q , i modelli con equazioni di stato più negative determinano una accelerazione maggiore, come si può notare calcolando il parametro di decelerazione per ciascun modello con i valori best-fit.

Infatti, dato che

$$\frac{\Omega_i}{\Omega_j} \propto \mathcal{R}^{-(n_i - n_j)}, \quad (2.16)$$

il parametro di decelerazione si può esprimere come

$$q = -\frac{\ddot{\mathcal{R}}\mathcal{R}}{\dot{\mathcal{R}}^2} = \sum_i \frac{n_i - 2}{2} \Omega_i. \quad (2.17)$$

Bisogna notare come le sorgenti di energia con $n > 2$, ovvero $w > -1/3$, causano una decelerazione, mentre quelle con $n < 2$ un'accelerazione: più rapidamente l'energia diminuisce con l'espansione, maggiore è la tendenza verso una decelerazione universale.

I valori di best fit con i relativi q_0 sono riportati nella tabella (2.1).

w	$\Omega_{M,B-F}$	$\Omega_{Q,B-F}$	q_0
-1/3	0.6	1.4	0.3
-2/3	0.6	1.3	-0.35
-1	0.7	1.2	-0.85
-3/2	0.7	0.9	-1.2
-3	1	1	-3.5

Tabella 2.1

Per ottenere una stima più certa di q_0 è comunque necessario disporre di più supernovae ad alti z dato che le rette a $q = \text{cost}$ sono inclinate rispetto alle nostre ellissi di confidenza. Il valore, anche se molto incerto, stimato da Riess et al. risulta $q_0 = -1 \pm 0.4$. Misure a z fra 0.5 e 2.0 servirebbero anche a rompere la degenerazione fra i vari modelli permettendoci di discriminare tra le diverse equazioni di stato.

Una ulteriore analisi svolta riguarda direttamente l'equazione di stato che viene scelta come parametro libero del fit, mentre viene fissata una geometria piatta per l'Universo. Abbiamo quindi calcolato l'ellisse di confidenza a 1σ nel piano (Ω_Q, w) (fig.(2.16)) e verificato come valori di w fino a -3 sono ancora all'interno della regione che racchiude il 68% di probabilità, perciò la condizione $w > -1$ deve essere eliminata. Come valori di best fit troviamo $\Omega_Q = 0.65$ e $w = -1.5$, da confrontarsi con $\Omega_Q = 0.55$ e $w = -1.9$ trovati da Hannestad&Mortsell. La differenza tra i due valori potrebbe essere dovuta al fatto che nel nostro campione abbiamo inserito la nuova supernova a $z = 1.7$ che, come già detto, ritorna ad avere una luminosità compatibile con un modello decelerato.

Ma c'è una cosiderazione importante da farsi: esaminando l'ellisse di confidenza nel piano (Ω_M, Ω_Q) con $w = -3$, (fig.(2.15)), si nota come valori di $\Omega_M < 0.5$ sono esclusi ad

un livello di confidenza del 68%. Ciò è in netta contraddizione con i dati derivanti dagli ammassi di galassie che pongono dei limiti stringenti sulla densità di materia $0.2 < \Omega_M < 0.3$. Da questa prima analisi, un simile modello sarebbe quindi da scartare, mentre modelli con equazioni di stato $w = -1.5$ sono ancora in accordo con tali limiti. Può risultare anche suggestivo il fatto che una pura costante cosmologica risulti un ottimo fit per i dati disponibili, rientrando nella ellisse di confidenza a 1σ .

Bisogna, tuttavia, ricordare che il nostro studio è stato limitato all'analisi delle SNe Ia. Il test indipendente più incisivo deriva dalle misure dello spettro delle fluttuazioni del fondo cosmico a microonde. Mentre le SNe ci forniscono dei limiti su $\Omega_M - \Omega_Q$, i dati sul CMB sono dei buoni indicatori della somma $\Omega_M + \Omega_Q$ e perciò le ellissi di confidenza nel piano (Ω_M, Ω_Q) sono praticamente ortogonali fra loro. La zona d'intersezione fornisce una buona stima dei parametri cosmologici del nostro Universo. Inoltre, combinando tutti i dati disponibili si possono ottenere dei limiti più stringenti anche sul valore di w .

$w=-1/3$

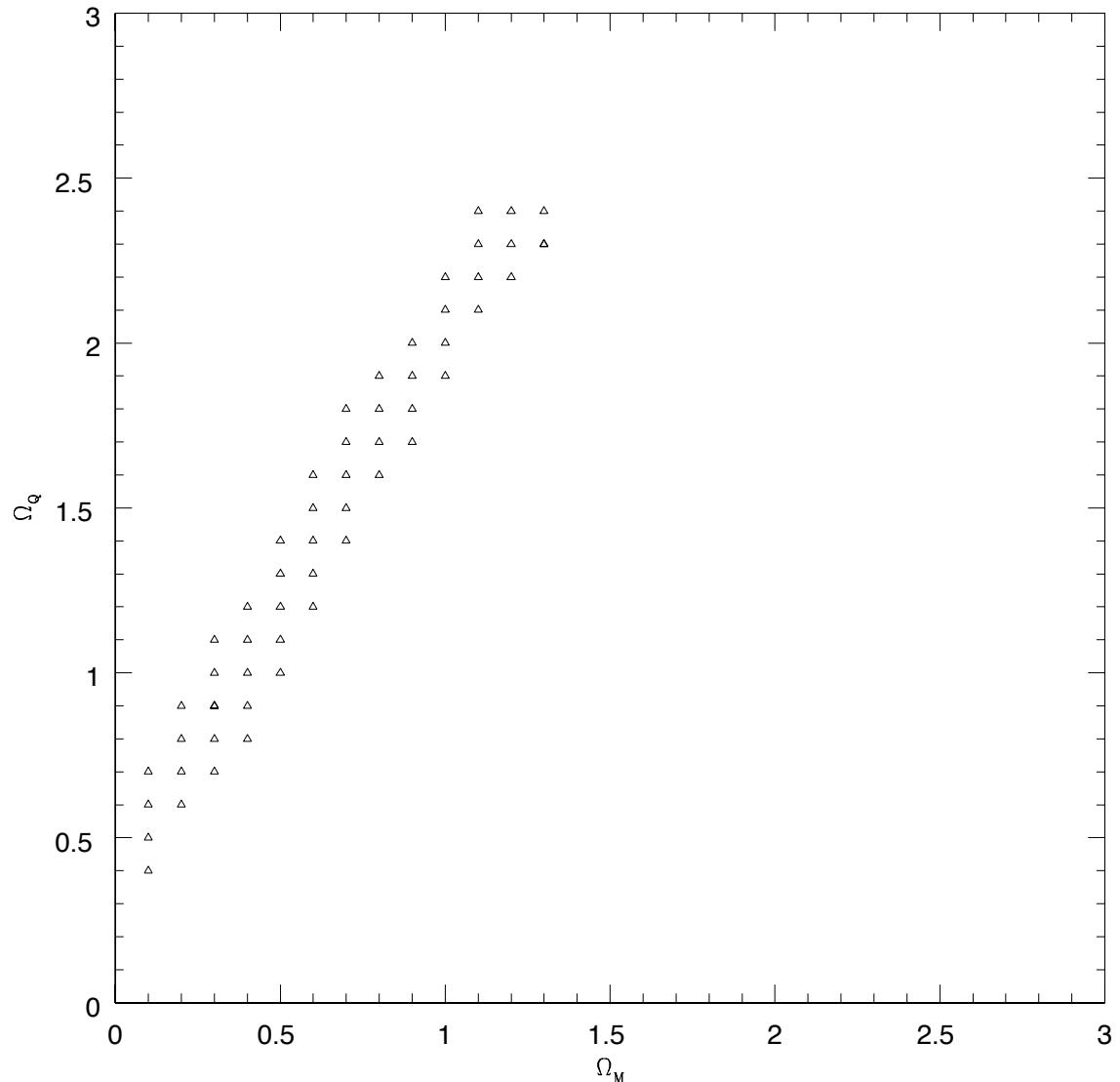


Figura 2.10: Ellisse di confidenza a 1σ nel piano (Ω_M, Ω_Q) derivata da 42 SNe ad alto z dal Supernova Cosmology Project, 18 a basso z dal Calan/Tololo Supernova Survey la SN1997ff dal High-z SN Search e assumendo come equazione di stato $p = -1/3\rho$

w=-2/3

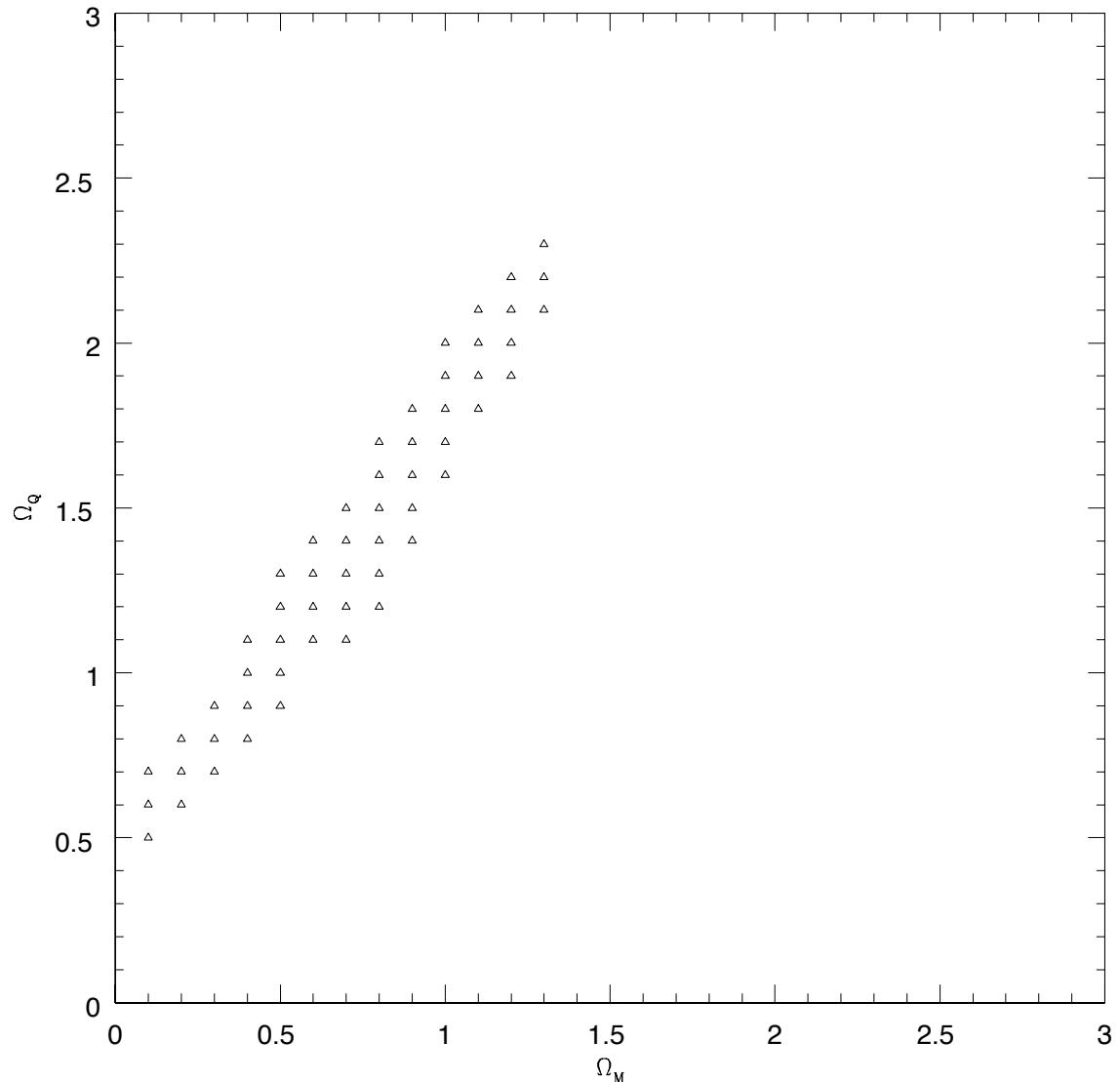


Figura 2.11: Ellisse di confidenza a 1σ nel piano (Ω_M, Ω_Q) derivata da 42 SNe ad alto z dal Supernova Cosmology Project, 18 a basso z dal Calan/Tololo Supernova Survey la SN1997ff dal High-z SN Search e assumendo come equazione di stato $p = -2/3\rho$

w=-1

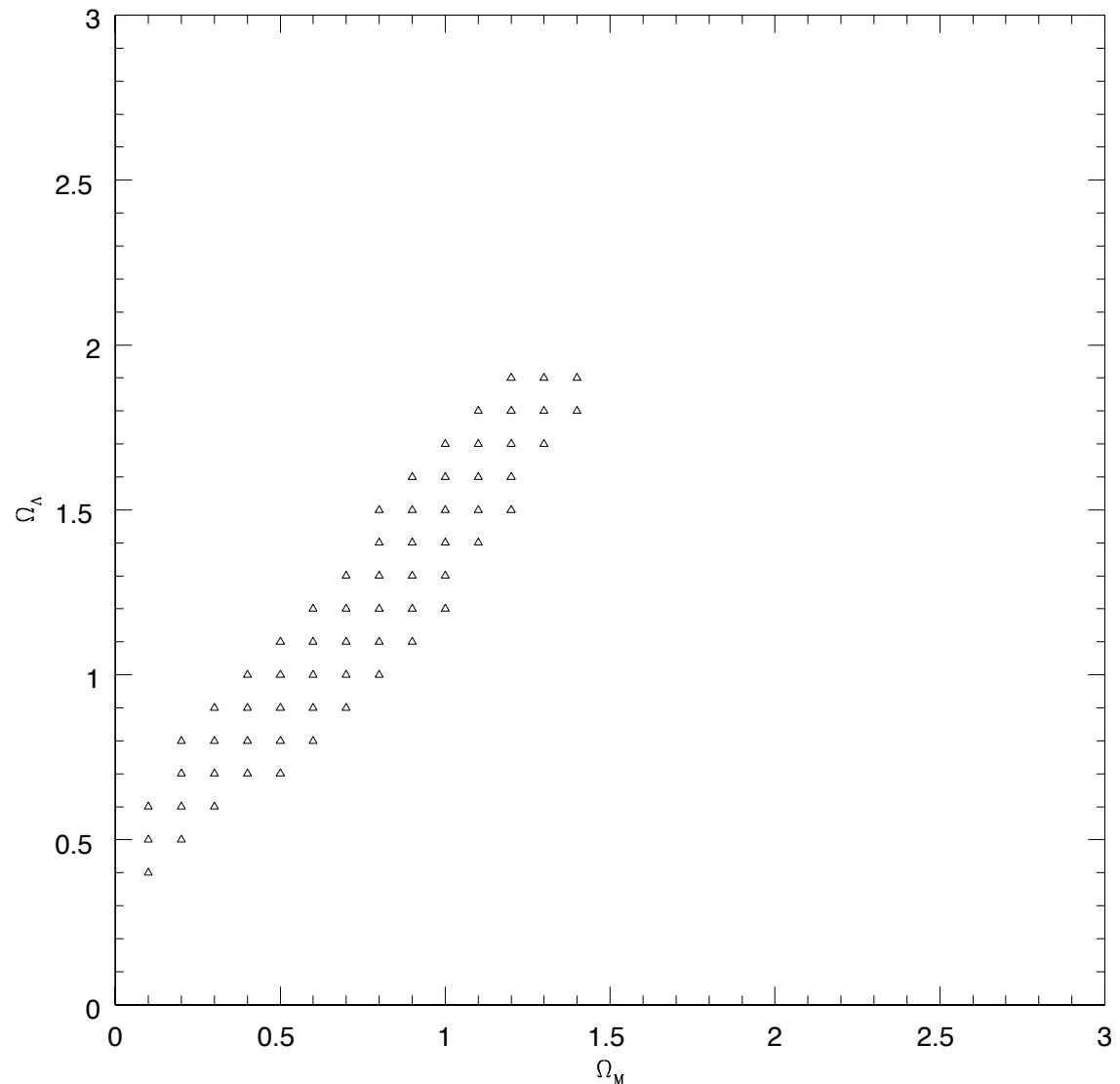


Figura 2.12: Ellisse di confidenza a 1σ nel piano $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ derivata da 42 SNe ad alto z dal Supernova Cosmology Project, 18 a basso z dal Calan/Tololo Supernova Survey la SN1997ff dal High-z SN Search e assumendo come equazione di stato $p = -\rho$

w=-3/2

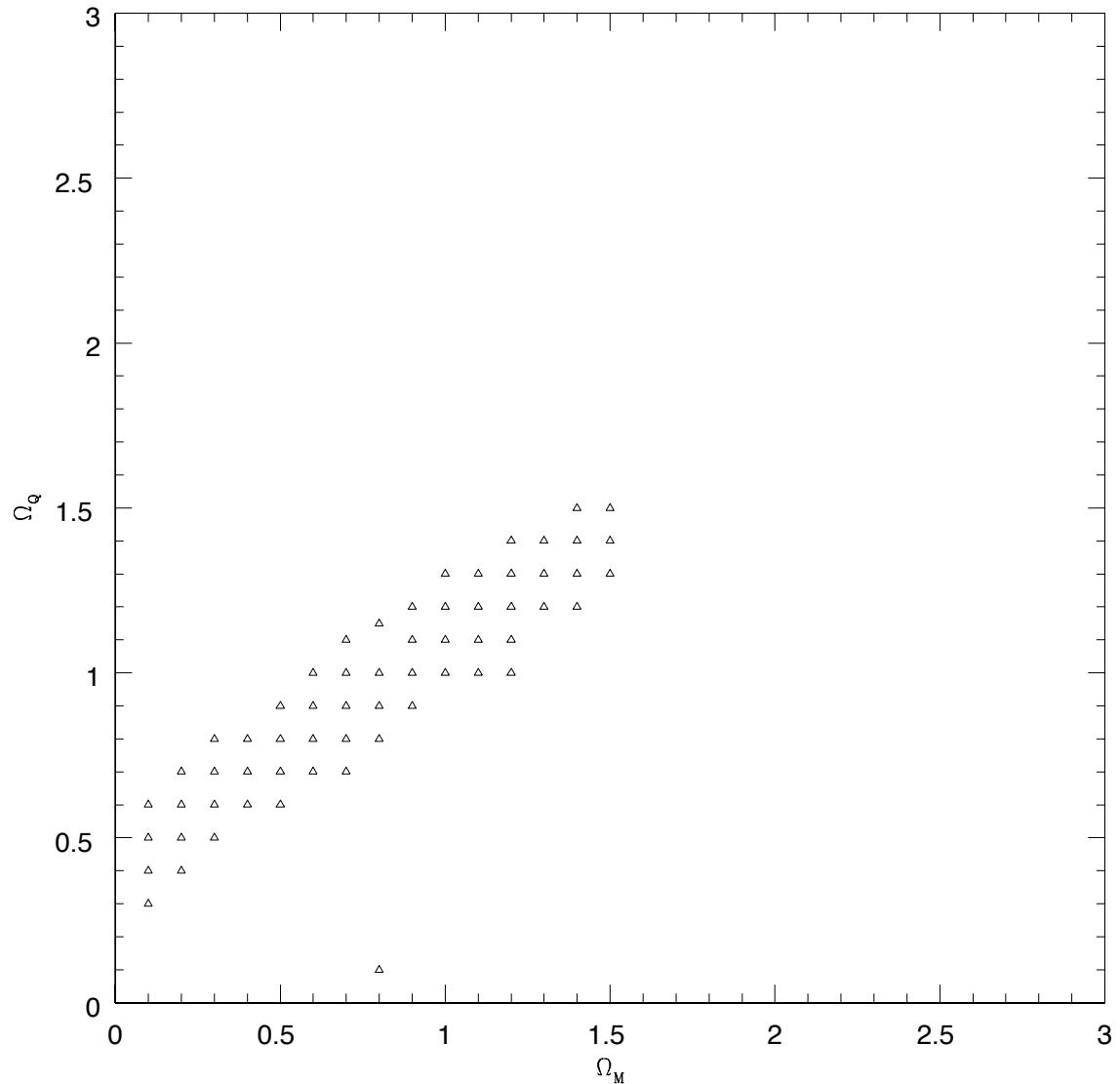


Figura 2.13: Ellisse di confidenza a 1σ nel piano (Ω_M, Ω_Q) derivata da 42 SNe ad alto z dal Supernova Cosmology Project, 18 a basso z dal Calan/Tololo Supernova Survey la SN1997ff dal High-z SN Search e assumendo come equazione di stato $p = -3/2\rho$

w=-3

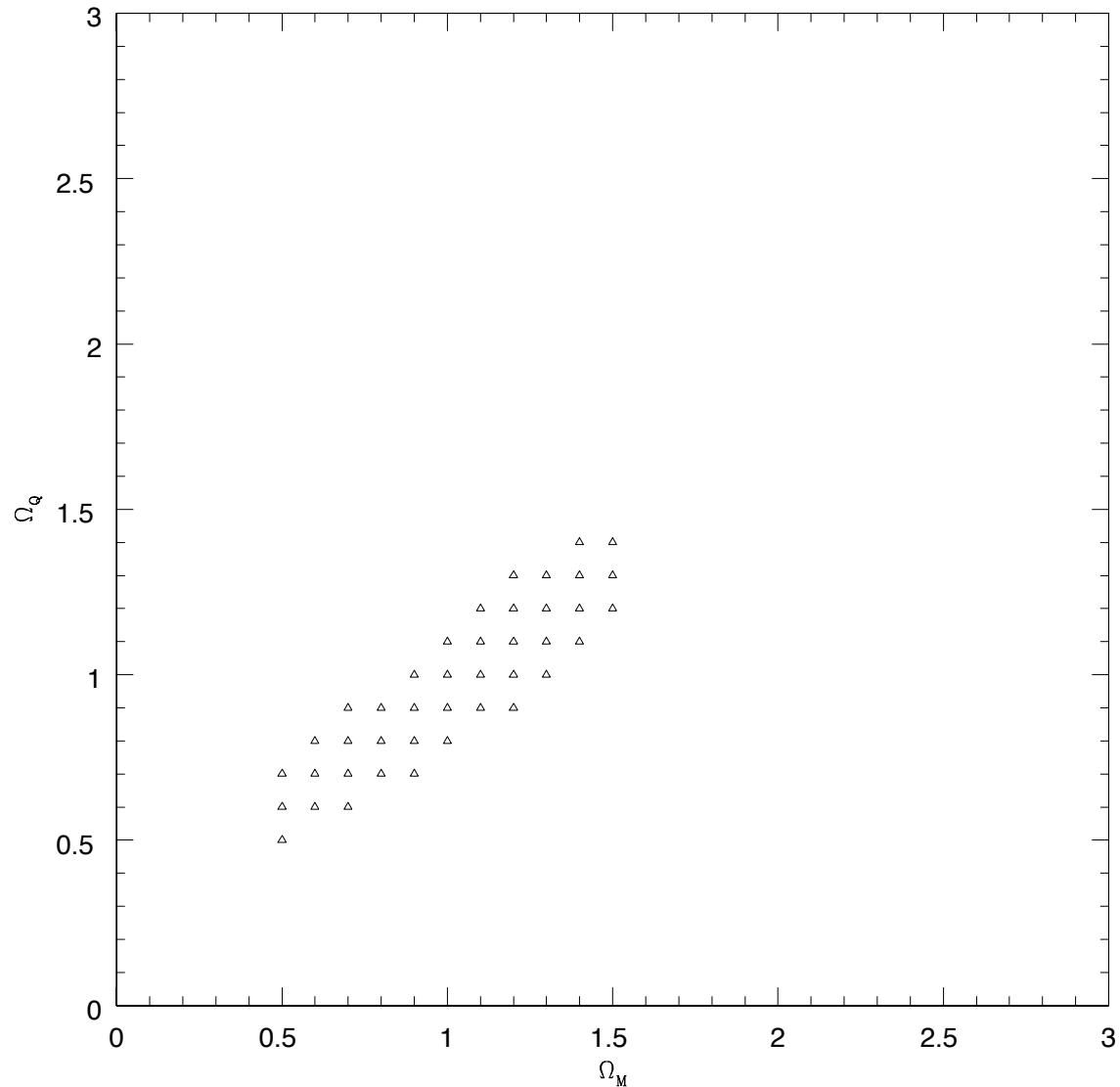


Figura 2.14: Ellisse di confidenza a 1σ nel piano (Ω_M, Ω_Q) derivata da 42 SNe ad alto z dal Supernova Cosmology Project, 18 a basso z dal Calan/Tololo Supernova Survey la SN1997ff dal High-z SN Search e assumendo come equazione di stato $p = -1/3\rho$

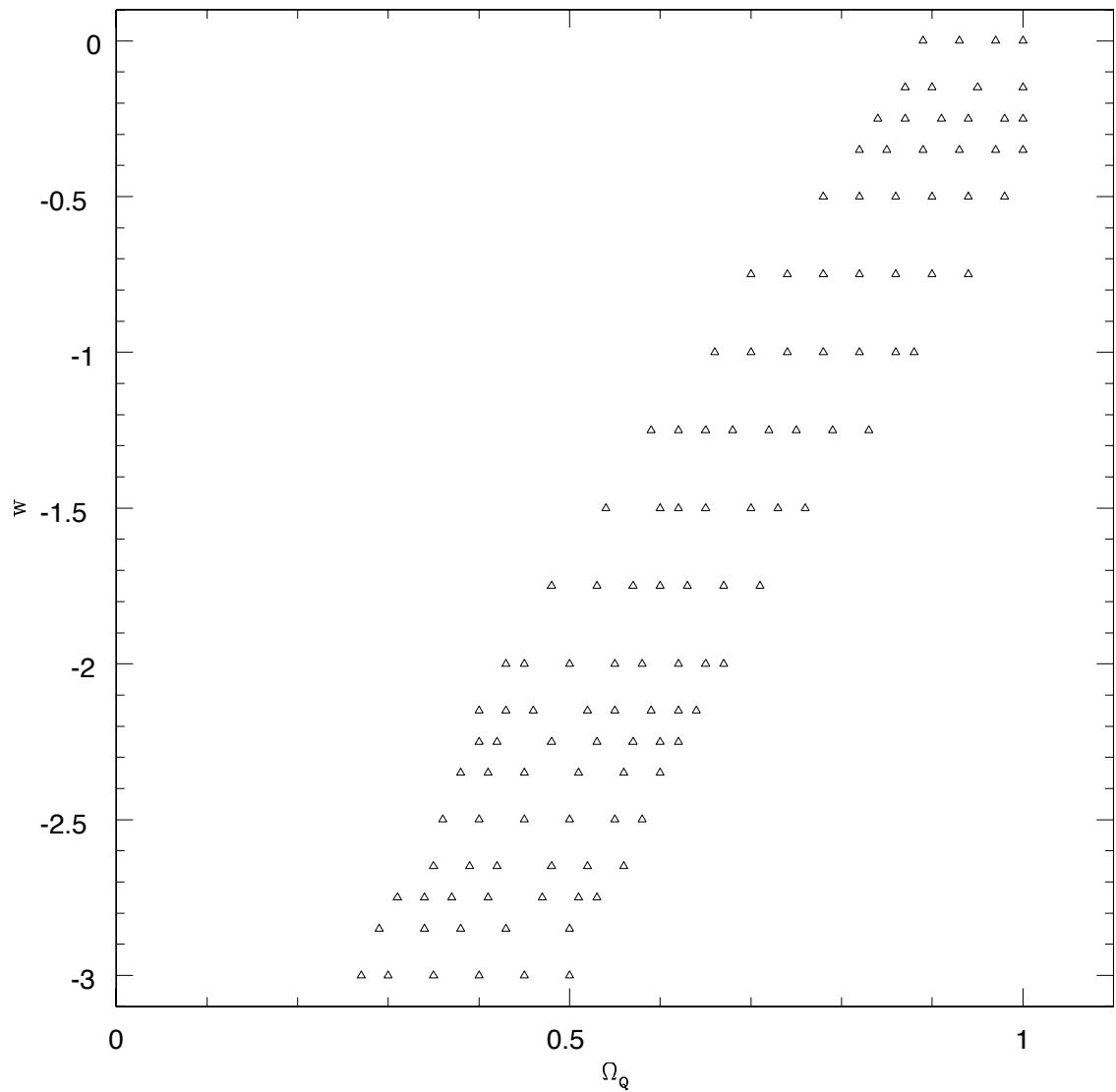


Figura 2.15: Ellisse di confidenza a 1σ nel piano (Ω_Q, w) derivata da 42 SNe ad alto z dal Supernova Cosmology Project, 18 a basso z dal Calan/Tololo Supernova Survey la SN1997ff dal High- z SN Search, assumendo una geometria piatta.

Capitolo 3

Il nostro modello

In questo capitolo presentiamo una semplice generalizzazione dell'equazione di stato cosmologica considerando la possibilità che la pressione dipenda non solo dalla densità ma anche, esplicitamente, dalla velocità di espansione dell'Universo.

Come conseguenza l'equazione che descrive l'evoluzione del raggio di scala diventa un'equazione dissipativa quando interpretata come sistema dinamico.

3.1 Introduzione

L'equazione differenziale del secondo ordine $\ddot{\mathcal{R}} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho c^2 + 3p)\mathcal{R}$ che descrive l'evoluzione del fattore di scala dell'Universo è un tipico esempio di sistema dinamico, cioè può essere interpretata come un'equazione del moto per un sistema meccanico in cui \mathcal{R} rappresenta la posizione di una particella, $\dot{\mathcal{R}}$ la sua velocità, $\ddot{\mathcal{R}}$ la sua accelerazione.

Nel nostro caso si è visto precedentemente che se $\rho \propto 1/\mathcal{R}^3$ l'equazione differenziale del secondo ordine si riduce, attraverso il passaggio all'energia, ad una equazione del primo ordine $\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + kc^2$: è questo il caso di una forza positonale e perciò di un sistema conservativo in cui la forza può essere pensata come la derivata di un potenziale e durante il moto l'energia totale si conserva. Inoltre, come già visto, questa equazione può essere risolta in termini di funzioni elementari.

Lo stesso metodo può, in linea di principio, essere applicato a tutti i modelli cosmologici in cui $p = f(\mathcal{R})$.

Nulla vieta, però, di considerare delle pressioni che dipendano oltre che da \mathcal{R} , anche da $\dot{\mathcal{R}}$, saremmo cioè nel caso

$$\ddot{\mathcal{R}} = f(\mathcal{R}, \dot{\mathcal{R}}). \quad (3.1)$$

Questo, da un punto di vista fisico, equivale a chiedersi quale sia l'evoluzione di un modello di universo in cui il tasso di espansione dipenda non solo dalla "dimensione" dell'universo, ma anche dalla velocità stessa di espansione.

Da un punto di vista tecnico ciò equivale a passare dalla visione di un Universo come sistema "conservativo" ad un sistema "dissipativo".

Questo è interessante per molti aspetti, uno fra tanti perché sistemi dissipativi ammettono in genere soluzioni più particolari dei sistemi conservativi (ad esempio attrattori, cicli limite ecc..., si veda appendice A).

Si noti che un approccio di questo tipo, anche se in contesto cosmologico differente, è già stato ampiamente esplorato in letteratura, nei modelli cosiddetti di *quintessenza* e di *dark energy*, in cui si assume che $p = \rho^{\gamma(t)}$. È immediato vedere che anche per questi modelli le equazioni risultanti non sono, ovviamente, conservative, in quanto dipendenti esplicitamente dal tempo (sistemi non autonomi).

3.2 Le equazioni del moto: imposizione della condizione

$$T_{\mu\nu;\nu} = 0$$

Come accennato nel paragrafo precedente, siamo interessati al caso in cui nell'equazione di stato $p = p(\rho)$ compaia una dipendenza dalla velocità di espansione dell'universo \dot{R} , ossia

$$p = p(\dot{R}, \rho). \quad (3.2)$$

Si è già visto che in tal caso non si può più risolvere il sistema indipendentemente da t , cioè dal valore esplicito del tempo; inoltre si perde la conservazione dell'energia nello spazio delle fasi e perciò in generale occorrerà integrare le equazioni con un procedimento numerico.

Ci chiediamo innanzitutto: l'equazione (3.2) viola qualche requisito di base della relatività? No, fin quando $T_{\mu\nu;\nu} = 0$. Cosa significa questo nel caso dell'Universo?

In generale, in meccanica classica si hanno due quantità -forza e accelerazione- legate dall'equazione di Newton $F = m \cdot a$ dove F può, in teoria, assumere qualsiasi forma e cioè dipendere da diverse variabili; in realtà poi è possibile dare delle condizioni non indispensabili dal punto di vista matematico ma che sono necessarie per la fisica del sistema: $T_{\mu\nu;\nu} = 0$ codifica una condizione di relatività che si traduce in

$$d\rho R^3 + 3pR^2 dR = 0. \quad (3.3)$$

Per semplicità, nella trattazione seguente, ci restringeremo al caso in cui l'equazione (3.2) sia fattorizzabile nel prodotto di due termini, ciascuno contenente la dipendenza da una delle due variabili:

$$p = p(\dot{\mathcal{R}}, \rho) = \mu(\dot{\mathcal{R}})p_0(\rho). \quad (3.4)$$

Inserendo la (3.4) nella prima equazione di Friedman (3.3) e passando alle derivate temporali

$$d(\rho\mathcal{R}^3) + 3\mu(\dot{\mathcal{R}})p_0(\rho)\mathcal{R}^2d\mathcal{R} = 0. \quad (3.5)$$

Considerando un universo di radiazione in cui $p_0(\rho) = \frac{1}{3}\rho$, si ottiene

$$\frac{d\rho\mathcal{R}^3}{dt} + \mu(\dot{\mathcal{R}})\rho\mathcal{R}^3\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = 0, \quad (3.6)$$

che si può riscrivere come

$$\frac{d\ln\rho\mathcal{R}^3}{dt} = -\mu(\dot{\mathcal{R}})\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}}. \quad (3.7)$$

Riprendiamo ora l'equazione di Einstein che rappresenta la nostra equazione del moto

$$\ddot{\mathcal{R}} = -k(3p + \rho)\mathcal{R} \quad (3.8)$$

dove $k = \frac{4}{3}\pi G$, e inseriamo anche in questa la nuova equazione di stato

$$\ddot{\mathcal{R}} = -k[\mu(\dot{\mathcal{R}}) + 1]\rho\mathcal{R} \quad (3.9)$$

In questo modo otteniamo un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine

$$\frac{d\ln\rho\mathcal{R}^3}{dt} = -\mu(\dot{\mathcal{R}})\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}}, \quad (3.10)$$

$$\ddot{\mathcal{R}} = -k[\mu(\dot{\mathcal{R}}) + 1]\rho\mathcal{R}. \quad (3.11)$$

Nel prossimo capitolo studiamo le proprietà delle soluzioni del sistema (3.10), (3.11).

Si noti che per $\mu = 0$ si cade nel caso di Universo di materia, mentre per $\mu = 1$ si riottiene l'Universo di radiazione.

Capitolo 4

Alcune soluzioni per Universi "dissipativi"

In questo capitolo, dopo aver posto in forma adimensionale le equazioni differenziali derivate precedentemente, se ne studiano le proprietà delle soluzioni in alcuni casi rappresentativi.

4.1 Adimensionalizzazione e riduzione al primo ordine

L'adimensionalizzazione delle equazioni del moto fa sì che il numero di parametri indipendenti associati al problema da risolvere venga sostituito da un numero minore di parametri adimensionali. Inoltre l'adimensionalizzazione diventa un passo necessario quando l'integrazione debba essere fatta utilizzando un metodo numerico (ad esempio usando un Runge-Kutta come nel nostro caso).

In altri termini, adimensionalizzare vuol dire normalizzare tutte le quantità fisiche presenti nelle equazioni da integrare a delle grandezze caratteristiche di solito associate in modo naturale allo specifico del problema da studiare.

Riprendiamo allora l'equazione del moto (3.10)

$$\ddot{\mathcal{R}} = -k[\mu(\dot{\mathcal{R}}) + 1]\rho\mathcal{R}. \quad (4.1)$$

Come possiamo subito notare abbiamo bisogno di una scala per i tempi, le lunghezze, le densità ed eventualmente le velocità. La funzione μ è già adimensionale per come è stata costruita. Come scala dei tempi prendiamo il tempo di Hubble che corrisponde all'incirca all'età dell'Universo e che assumiamo sia pari a 15 Gyr. In questo modo rimane definito

un tempo adimensionale

$$\tau \equiv \frac{t}{t_H}, \quad (4.2)$$

che sarà perciò sempre compreso fra 0 e 1. Così facendo, inoltre, diventa naturale assumere come raggio di normalizzazione il tempo di Hubble moltiplicato per la velocità della luce e, di conseguenza, assumere questa come scala per le velocità. Si definiscono allora

$$\tilde{\mathcal{R}} \equiv \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_n}, \quad \dot{\tilde{\mathcal{R}}} \equiv \frac{\dot{\mathcal{R}}}{v_n}, \quad (4.3)$$

dove

$$\mathcal{R}_n = t_H \cdot c \quad \text{e} \quad v_n = c. \quad (4.4)$$

Per le densità sceglieremo invece la densità critica, limite fra universi classici aperti e chiusi, che assumiamo pari a 10^{-29} g/cm^3 , quindi

$$\tilde{\rho} \equiv \frac{\rho}{\rho_n}. \quad (4.5)$$

Una semplice sostituzione ci permette di riscrivere le nostre equazioni con le nuove variabili adimensionali

$$\ddot{\tilde{\mathcal{R}}} = -(kt_H^2 \rho_n)[\mu(\dot{\tilde{\mathcal{R}}}) + 1]\tilde{\rho}\tilde{\mathcal{R}}, \quad (4.6)$$

$$\frac{d \ln \tilde{\rho} \tilde{\mathcal{R}}^3}{dt} = -\mu(\dot{\tilde{\mathcal{R}}}) \frac{\dot{\tilde{\mathcal{R}}}}{\tilde{\mathcal{R}}}. \quad (4.7)$$

Il sistema di equazioni differenziali ottenuto si può ridurre ad un sistema di tre equazioni del primo ordine ponendo

$$\tilde{\mathcal{R}} \equiv x, \quad (4.8)$$

$$\dot{\tilde{\mathcal{R}}} \equiv y, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{\mathcal{R}}^3 \equiv e^z. \quad (4.10)$$

Le (4.6) e (4.7) possono allora essere riscritte come

$$\dot{x} = y \quad (4.11)$$

$$\dot{y} = -\frac{kt_H^2 \rho_n [\mu(y) + 1]}{x^2} e^z \quad (4.12)$$

$$\dot{z} = -\frac{\mu(y)y}{x} \quad (4.13)$$

Alle nuove variabili fisiche bisognerà poi assegnare le condizioni iniziali.

4.2 Due casi particolari: come riottenere le soluzioni classiche

Ciò che è necessario fare a questo punto è verificare la consistenza del sistema nei due casi particolari di universo piatto di materia e di radiazione.

Il primo è caratterizzato dall'avere $p \simeq 0$ che si traduce col porre

$$\mu(\dot{\mathcal{R}}) = 0. \quad (4.14)$$

Dall'equazione (4.13) si ha

$$z = \text{cost} \quad (4.15)$$

cioè

$$\dot{y} \propto -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \ddot{x} \propto -\frac{1}{x^2}, \quad (4.16)$$

e, moltiplicando per \dot{x} ,

$$\dot{x}\ddot{x} \propto -\frac{\dot{x}}{x^2} \Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} \propto \frac{1}{x}, \quad (4.17)$$

da cui

$$x^{3/2} \propto t \Rightarrow x \propto t^{2/3}, \quad (4.18)$$

che è proprio l'andamento del fattore di scala in funzione del tempo che ci aspettiamo nel caso di un universo piatto (infatti abbiamo scelto la costante di integrazione nulla) di materia.

Nel secondo caso, in cui $p = \rho/3$, la posizione da farsi è

$$\mu(\dot{\mathcal{R}}) = 1, \quad (4.19)$$

così la (4.13) diventa

$$\dot{z} = -\frac{y}{x} = -\frac{\dot{x}}{x} \quad (4.20)$$

ossia

$$\frac{d}{dt}z = -\frac{d}{dt} \ln x \quad (4.21)$$

che integrata dà

$$z - z_0 = -\ln \frac{x}{x_0} \quad (4.22)$$

e, sostituendola nella (4.12)

$$\dot{y} = -\frac{2ke^{z_0}}{x^2} \frac{x_0}{x} = -\frac{k_0}{x^3} \quad (4.23)$$

Si giunge così al seguente sistema

$$\dot{y} = -\frac{k_0}{x^3} \quad (4.24)$$

$$\dot{x} = y \quad (4.25)$$

dividendo membro a membro

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k_0}{x^3y} \Rightarrow ydy = -\frac{k_0}{x^3}dx \Rightarrow \frac{dy^2}{2} = \frac{k_0}{2}d\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (4.26)$$

ossia

$$y = \frac{k_0}{x} + cost. \quad (4.27)$$

In un universo di radiazione l'andamento del fattore di scala col tempo è del tipo $\mathcal{R} \propto t^{1/2}$ e quindi $\dot{\mathcal{R}} \propto \frac{1}{t^{1/2}} \propto \frac{1}{\mathcal{R}}$ come mostrato nella (4.27)

Assegnando invece a μ una forma più generale diventa necessario scegliere uno schema di tipo numerico per la risoluzione del sistema.

4.3 Il codice numerico

Il sistema di equazioni differenziali (4.11), (4.12), (4.13) è stato risolto implementando il metodo di integrazione Runge-Kutta in un codice numerico redatto in Fortran 77.

Il programma assume in input il tempo iniziale t_i in unità di t_H , scelto in modo che, almeno nel caso ad energia nulla, per $t = 1$ anche \mathcal{R} valga 1, insieme ai valori iniziali delle variabili proprie del sistema, \mathcal{R}_0, v_0 e z_0 , delle quali si cerca l'andamento in funzione del tempo. In seguito, nel caso di μ costante, in cui sono note le soluzioni analitiche e il sistema risulta conservativo, vengono effettuati due test atti a verificare la conservazione dell'energia e la veridicità delle soluzioni: nei casi in cui ciò risulti possibile, si è trovata la soluzione analitica al sistema di equazioni, la quale risulta nella forma $f(\mathcal{R}) - f(\mathcal{R}_i) = f(t - t_0)$; quindi, controllare che la $f(\mathcal{R}) - f(t - t_0)$ rimanga uguale alla $f(\mathcal{R}_0)$ ad ogni time-step, ci garantisce l'esattezza della soluzione. Inoltre, nel caso di energia negativa, viene calcolato il raggio massimo \mathcal{R}_{max} ed il tempo ad esso corrispondente $t(\mathcal{R}_{max})$ al quale l'integrazione viene interrotta se $t(\mathcal{R}_{max})$ risulta minore di t/t_H il cui valore è stato fissato ad 1. In uscita il programma genera due file su cui stampa l'andamento delle soluzioni del sistema dell'energia e della densità.

Il listato del codice è riportato in Appendice C.

Capitolo 5

Risultati

In questo capitolo sono mostrate le soluzioni analitiche del sistema ottenibili nel caso $\mu = \text{cost}$, in particolare vengono analizzati gli Universi di materia nei casi di energia nulla, positiva e negativa, riottenendo così i casi già noti. In seguito sono esposti i risultati numerici ottenuti perturbando degli Universi a energia zero, positiva e negativa con delle particolari forme funzionali di μ .

5.1 Caso classico: Universi di materia

Cominciamo ora ad esplorare le soluzioni del sistema partendo dal modello più semplice, quello standard di materia, che, come già visto precedentemente, corrisponde al caso $\mu = 0$ ed è perciò risolubile analiticamente. Inoltre questo modello viene usato come test per verificare l'accuratezza dei risultati numerici.

Ritorniamo all'equazione del moto vera e propria già adimensionalizzata

$$\ddot{\tilde{\mathcal{R}}} = -\frac{kt_H^2 \rho_n [\mu(y) + 1]}{\tilde{\mathcal{R}}^2} e^z \quad (5.1)$$

e poniamo

$$C = kt_H^2 \rho_n e^z, \quad (5.2)$$

che ovviamente è una quantità adimensionale ed è costante in quanto, come si evince dalla (4.13), se $\mu = 0$ allora z rimane costante.

A questo punto possiamo passare all'energia dato che sappiamo già di trovarci di fronte ad un sistema conservativo. Moltiplichiamo ambo i membri per $\dot{\tilde{\mathcal{R}}}$

$$\dot{\tilde{\mathcal{R}}} \ddot{\tilde{\mathcal{R}}} = -\frac{C}{\tilde{\mathcal{R}}^2} \dot{\tilde{\mathcal{R}}} \quad (5.3)$$

che diventa

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{\tilde{R}}^2}{2} \right) = \frac{d}{d\tau} \frac{C}{\tilde{R}} \quad (5.4)$$

e integrando

$$\frac{\dot{\tilde{R}}^2}{2} - \frac{C}{\tilde{R}} = \tilde{E}_0 \quad (5.5)$$

per cui, assegnate delle opportune condizioni iniziali, l'energia totale del moto è

$$\tilde{E}_0 = \frac{\tilde{v}_0^2}{2} - \frac{C}{\tilde{R}_0}. \quad (5.6)$$

Graficando E in funzione di \tilde{R} è risulta semplice distinguere tre casi a seconda del segno di E_0 :

A) $E_0 > 0$ il moto avviene per qualsiasi valore di \tilde{R}

B) $E_0 = 0$ anche in questo caso qualunque valore di \tilde{R} è permesso

C) $E_0 < 0$ il moto è limitato alla regione in cui $\frac{\dot{\tilde{R}}^2}{2} = E_0 + \frac{C}{\tilde{R}} \geq 0$, ovvero
 $\tilde{R} \leq -\frac{C}{E_0} = \frac{C}{|\tilde{E}_0|}$.

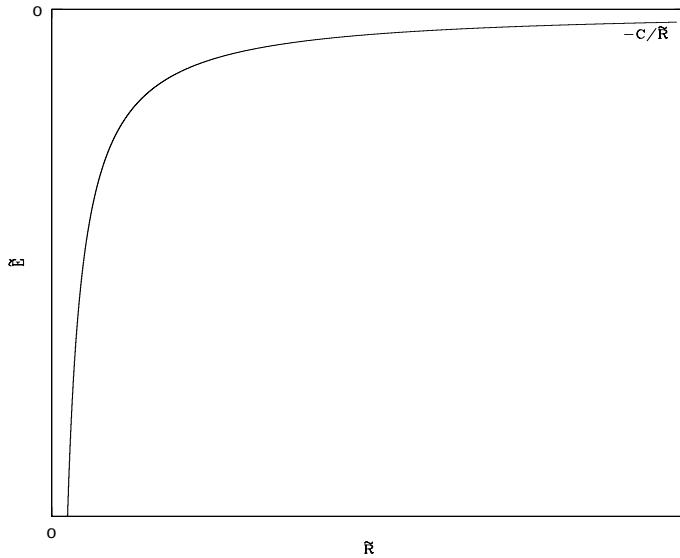


Figura 5.1: Andamento dell'energia in funzione del raggio di scala nel caso di un Universo di materia in cui il sistema risulta conservativo

5.1.1 Soluzione per $E_0 = 0$

Scegliere la costante di integrazione nulla, e quindi considerare il caso in cui l'energia del moto risulta pari a zero, corrisponde ad analizzare modelli di Universo piatti.

L'equazione del moto (5.5) si riduce a

$$\frac{\dot{\mathcal{R}}^2}{2} - \frac{C}{\tilde{\mathcal{R}}} = 0, \quad (5.7)$$

e quindi

$$\dot{\tilde{\mathcal{R}}} = -\frac{\sqrt{2C}}{\sqrt{\tilde{\mathcal{R}}}}, \quad (5.8)$$

dove si è scelta la soluzione positiva dato che siamo interessati ad universi in espansione ($\dot{\tilde{\mathcal{R}}}_0 > 0$).

Separando le variabili e integrando

$$\int_{\tilde{\mathcal{R}}_0}^{\tilde{\mathcal{R}}} \sqrt{\tilde{\mathcal{R}}'} d\mathcal{R}' = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{2C} d\tau' \quad (5.9)$$

che porge

$$\tilde{\mathcal{R}} = \left[\frac{3}{2} \sqrt{2C} (\tau - \tau_0) + \tilde{\mathcal{R}}_0^{3/2} \right]^{2/3}. \quad (5.10)$$

Come ci aspettavamo l'andamento del fattore di scala col tempo è del tipo $\mathcal{R} \propto t^{2/3}$.

5.1.2 Soluzione per $E_0 > 0$

Scegliendo l'energia iniziale positiva ci si trova ad aver a che fare con Universi aperti.

Dalla (4.32), tenendo conto che ora $\tilde{E}_0 > 0$, si ricava subito

$$\dot{\tilde{\mathcal{R}}} = \pm \sqrt{2(\tilde{E}_0 - \frac{C}{\tilde{\mathcal{R}}})}. \quad (5.11)$$

Anche qui ci interessa la soluzione in espansione perciò scegliamo $\tilde{v}_0 > 0$ e integriamo

$$\int_{\tilde{\mathcal{R}}_0}^{\tilde{\mathcal{R}}} \frac{d\tilde{\mathcal{R}}'}{\sqrt{2(\tilde{E}_0 + \frac{C}{\tilde{\mathcal{R}}'})}} = (\tau - \tau_0) \Rightarrow \int_{\tilde{\mathcal{R}}_0}^{\tilde{\mathcal{R}}} \frac{d\tilde{\mathcal{R}}'}{\sqrt{1 + (\frac{C}{\tilde{E}_0 \tilde{\mathcal{R}}'})}} = \sqrt{2\tilde{E}_0}(\tau - \tau_0) \quad (5.12)$$

Cambiamo variabile e poniamo $x = \tilde{E}_0 \tilde{\mathcal{R}}'/C$; otteniamo così

$$\int_{x_0}^x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{\sqrt{2}\tilde{E}_0^{3/2}}{C}(\tau - \tau_0), \quad (5.13)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \sqrt{x(1+x)} - \operatorname{arcsinh}\sqrt{x} &- [\sqrt{x_0(1+x_0)} - \operatorname{arcsinh}\sqrt{x_0}] = \\ &\frac{\sqrt{2}\tilde{E}_0^{3/2}}{C}(\tau - \tau_0). \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.1.3 Soluzione per $E_0 < 0$

Nel caso ad energia negativa, che corrisponde a considerare un Universo chiuso, sappiamo già che esiste un raggio massimo $\tilde{R}_{max} = -C/\tilde{E}_0$ oltre il quale la velocità di espansione cambia segno, il moto si inverte e l'Universo ricollassa su se stesso; prendiamo ancora $\tilde{v}_0 > 0$ per i motivi citati precedentemente.

L'integrale da risolvere si presenta ora nella forma

$$\int_{\tilde{R}_0}^{\tilde{R}_{max}} \frac{d\tilde{R}'}{\sqrt{2(\tilde{E}_0 + \frac{C}{\tilde{R}'})}} = (\tau - \tau_0), \quad (5.15)$$

Sapendo che $\tilde{E}_0 = -\frac{C}{\tilde{R}_{max}}$ si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{2C}} \int_{\tilde{R}_0}^{\tilde{R}_{max}} \sqrt{\frac{\tilde{R}_{max}\tilde{R}'}{\tilde{R}_{max} - \tilde{R}'}} d\tilde{R}' = (\tau - \tau_0), \quad (5.16)$$

e facendo un cambio di variabile $x = \tilde{R}'/\tilde{R}_{max}$

$$\frac{\tilde{R}_{max}^3}{\sqrt{2C}} \int_{\frac{\tilde{R}_0}{\tilde{R}_{max}}}^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = (\tau - \tau_0), \quad (5.17)$$

che ha per soluzione

$$\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)} - [\arcsin\sqrt{x_0} - \sqrt{x_0(1-x_0)}] = \sqrt{\frac{2C}{\tilde{R}_{max}^3}}(\tau - \tau_0). \quad (5.18)$$

In figura (5.2) sono mostrati gli andamenti della velocità di espansione, del fattore di scala, dell'energia in funzione del tempo e della velocità in funzione del raggio (spazio delle fasi).

La figura (5.3), invece, illustra il comportamento della densità nel tempo.

Come si può notare si ritrovano esattamente le curve già note dalla cosmologia classica. Questi modelli verranno poi presi come standard da perturbare per le nostre simulazioni.

5.2 Cosa fa μ ?

Possiamo, a questo punto, cominciare a fare una prima analisi qualitativa delle soluzioni il cui comportamento dipende essenzialmente dalla forma funzionale assegnata a $\mu(y)$.

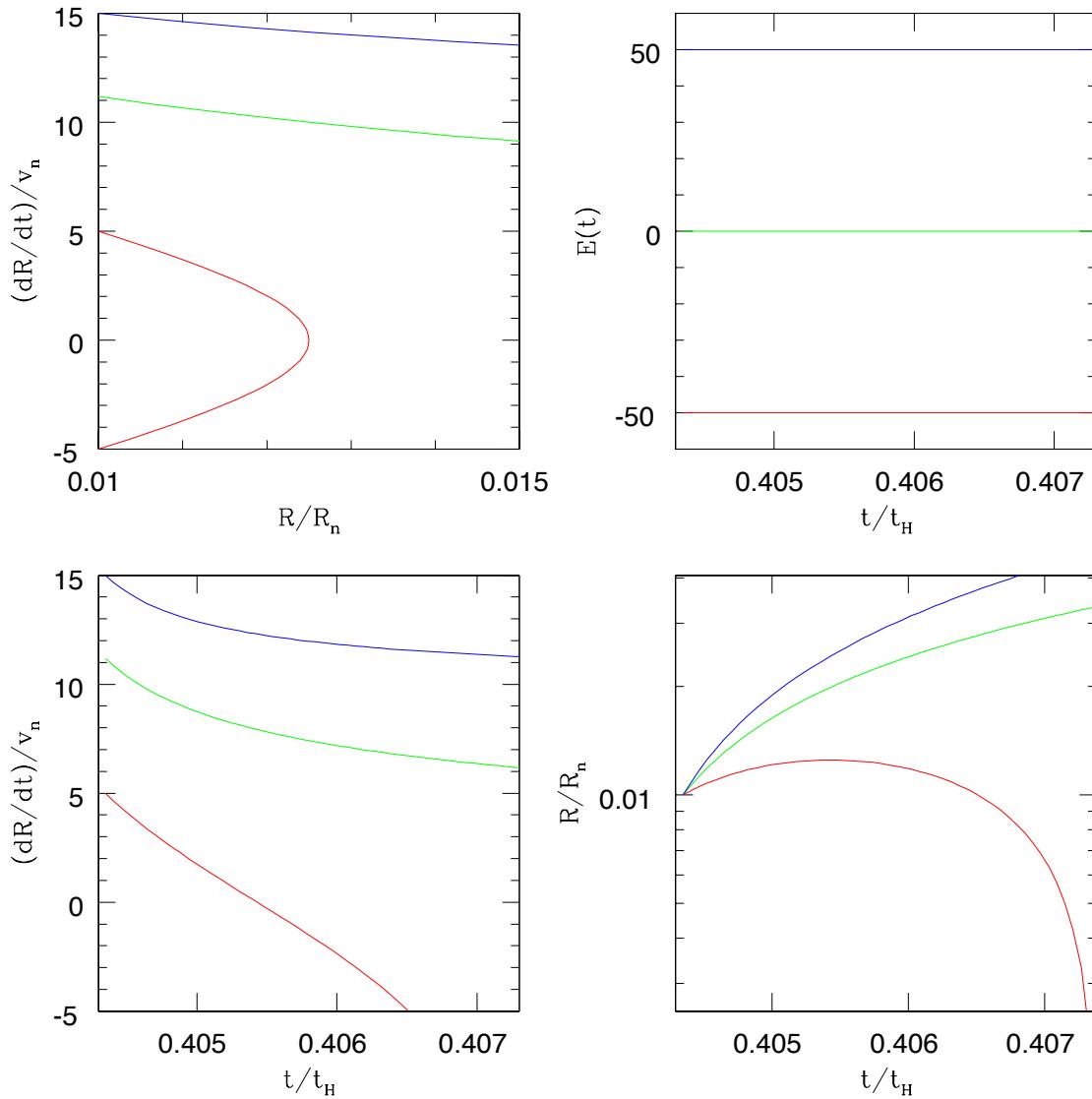


Figura 5.2: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) per un Universo di materia ad energia zero, positiva e negativa

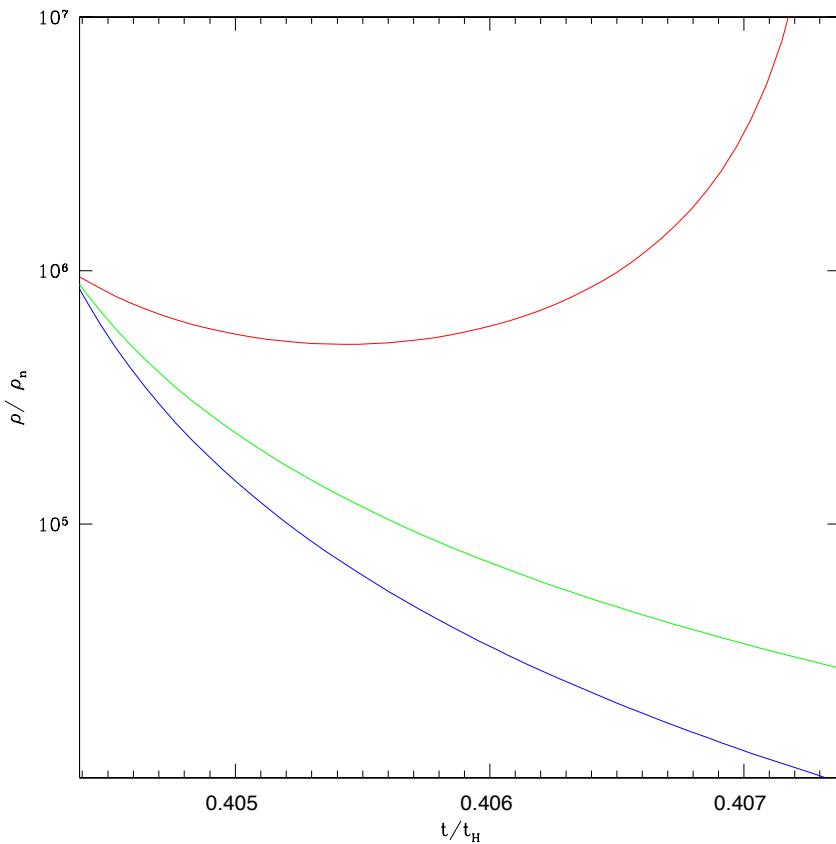


Figura 5.3: Evoluzione temporale della densità per un universo di materia ad energia nulla, positiva e negativa

In particolare prendiamo in considerazione la divergenza del nostro campo vettoriale W definito da

$$\dot{\bar{x}} = \bar{W}(\bar{x}), \quad (5.19)$$

caratteristica importante perchè ci dice se i volumi nello spazio delle fasi vengono compressi o espansi, il che è equivalente a capire se il sistema acquista o perde energia.

Supponiamo che μ sia una costante; in questo caso sappiamo già che il sistema è conservativo ed è facile verificare che la divergenza di $W(x)$ è zero. Infatti le equazioni assumerebbero la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -A \frac{e^z}{x^2} \\ \dot{z} &= -B \frac{y}{x}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Se, invece, $\mu(y)$ è una funzione lineare di y la divergenza di W diventa diversa da zero, ossia

$$div(\bar{W}) = -k \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{e^z}{x^2}, \quad (5.21)$$

e perciò il comportamento delle soluzioni dipende dal segno di $\partial \mu / \partial y$: se $\partial \mu / \partial y > 0$ la $div(\bar{W}) < 0$ e ciò vuol dire che c'è perdita di energia in ogni punto dello spazio delle fasi e viceversa.

Nel caso in cui $\mu(y)$ sia una funzione non lineare di y , non solo la $div(\bar{W}) \neq 0$, ma può diventare positiva o negativa in regioni diverse dello spazio delle fasi. Ad esempio, se

$$\mu(y) = a + by + cy^2 \quad (5.22)$$

allora

$$div(\bar{W}) = b + 2cy \quad (5.23)$$

ed è $div(\bar{W}) > 0$ se $y < -b/2c$ e $div(\bar{W}) < 0$ se $y > -b/2c$. In particolare potranno esistere delle zone in cui la quantità di energia persa è esattamente uguale a quella acquisita e cioè il sistema potrebbe andare a finire in un ciclo limite.

5.3 Soluzioni per $\mu = \dot{\tilde{\mathcal{R}}}^2 / (\tilde{v}_c^2 + \dot{\tilde{\mathcal{R}}}^2)$

Assumiamo adesso la seguente forma per μ :

$$\mu = \frac{\dot{\tilde{\mathcal{R}}}^2}{\tilde{v}_c^2 + \dot{\tilde{\mathcal{R}}}^2} \quad (5.24)$$

È facile notare che in questo caso, nel limite $\dot{\mathcal{R}} \gg v_c$ si riottengono gli Universi di radiazione, mentre per $\dot{\mathcal{R}} \ll v_c$ μ tende asintoticamente a zero e il modello coincide con quello di materia.

Infatti, come si può notare dai grafici riportati nelle figure (5.4-5-6-7), assumendo dei valori di v_c abbastanza piccoli gli andamenti delle varie grandezze fisiche coincidono praticamente con le curve rappresentanti il modello di radiazione. Lo stesso dicasi per valori di v_c molto più grandi della velocità iniziale \tilde{v}_0 : le curve riproducono fedelmente l'Universo di materia. Tutto ciò diventa ancora più evidente quando si va a perturbare un Universo aperto, in cui per ottenere un'energia iniziale positiva, è necessario assegnare alla v iniziale dei valori opportunamente grandi. Nei due casi considerati si è scelta una velocità appena maggiore di quella necessaria per rendere l'Universo piatto ed una molto maggiore di quest'ultima. In entrambi i casi la funzione $\mathcal{R}(t)$ coincide per qualunque v_c , mentre le altre tendono a coincidere tanto più rapidamente quanto maggiore è la velocità iniziale, cosa ovvia in quanto quanto più \tilde{v}_0 è grande, tanto più l'energia totale del moto è elevata, quindi la velocità diminuisce più lentamente al passare del tempo e perciò tanto meno la presenza di v_c diventa influente.

Nel modello chiuso, inoltre, succede che, date le stesse condizioni iniziali, un Universo perturbato con v_c confrontabile con \tilde{v}_0 si comporta come quello di materia per tempi piccoli mentre, al passare del tempo, se ne discosta avvicinandosi al modello di radiazione. In generale si può concludere dicendo che, con questo tipo di perturbazione, non riusciamo ad ottenere dei modelli che si espandono più velocemente di quello di materia (infatti, per come è stato costruito, μ rimane sempre compreso fra 0 e 1), e cioè, fissato un certo tempo, l'Universo perturbato rimane comunque più piccolo di quello di materia e viceversa, alla stessa dimensione, corrisponde un tempo più grande nel modello perturbato.

È necessario, invece, fare alcune considerazioni sull'andamento della densità. Mentre nei modelli ad energia nulla o negativa questa variabile fisica segue il comportamento delle altre grandezze graficate, nei modelli aperti, in cui queste ultime tendono a sovrapporsi più o meno rapidamente a seconda della velocità iniziale -in particolare i raggi che coincidono perfettamente fino alla fine della simulazione- le densità raggiungono comunque dei valori finali che differiscono tra loro di un fattore diverso a seconda sempre dell'energia iniziale impartita (nei nostri due test le differenze ammontano a 10^5 per $\tilde{v}_0 = 100$. e a 10^3 per $\tilde{v}_0 = 15$). La spiegazione di questo fenomeno apparentemente anomalo la

si ritrova analizzando ancora una volta il nostro sistema di equazioni, in particolare la seconda equazione che determina il comportamento di z e quindi di $\rho = e^z/\mathcal{R}^3$

$$\dot{\tilde{z}} = -\mu \frac{\dot{\tilde{\mathcal{R}}}}{\tilde{\mathcal{R}}}$$

ossia

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{\mathcal{R}}} = -\mu \frac{1}{\tilde{\mathcal{R}}} \quad (5.25)$$

che si può riscrivere

$$\frac{d \ln \tilde{\rho}}{\tilde{\mathcal{R}} d \ln \tilde{\mathcal{R}}} + 3 \frac{d \ln \tilde{\mathcal{R}}}{\tilde{\mathcal{R}} d \ln \tilde{\mathcal{R}}} = -\mu \frac{1}{\tilde{\mathcal{R}}} \quad (5.26)$$

cioè

$$\frac{d \ln \tilde{\rho}}{d \ln \tilde{\mathcal{R}}} = -3 - \mu \quad (5.27)$$

e quindi, trovandosi di fronte ad una derivata bilogaritmica che ci dà la tangente punto per punto della curva $\rho(\mathcal{R})$, il tutto si spiega con un effetto di slope, cioè anche piccole variazioni di μ provocano una diversa dipendenza di ρ da \mathcal{R} e quindi, se per esempio abbiamo un modello in cui μ rimane vicino all'unità per un tempo maggiore, come accade nei modelli più veloci, anche la pendenza della curva rimarrà ripida più a lungo, come infatti succede nei casi con v_c più piccolo.

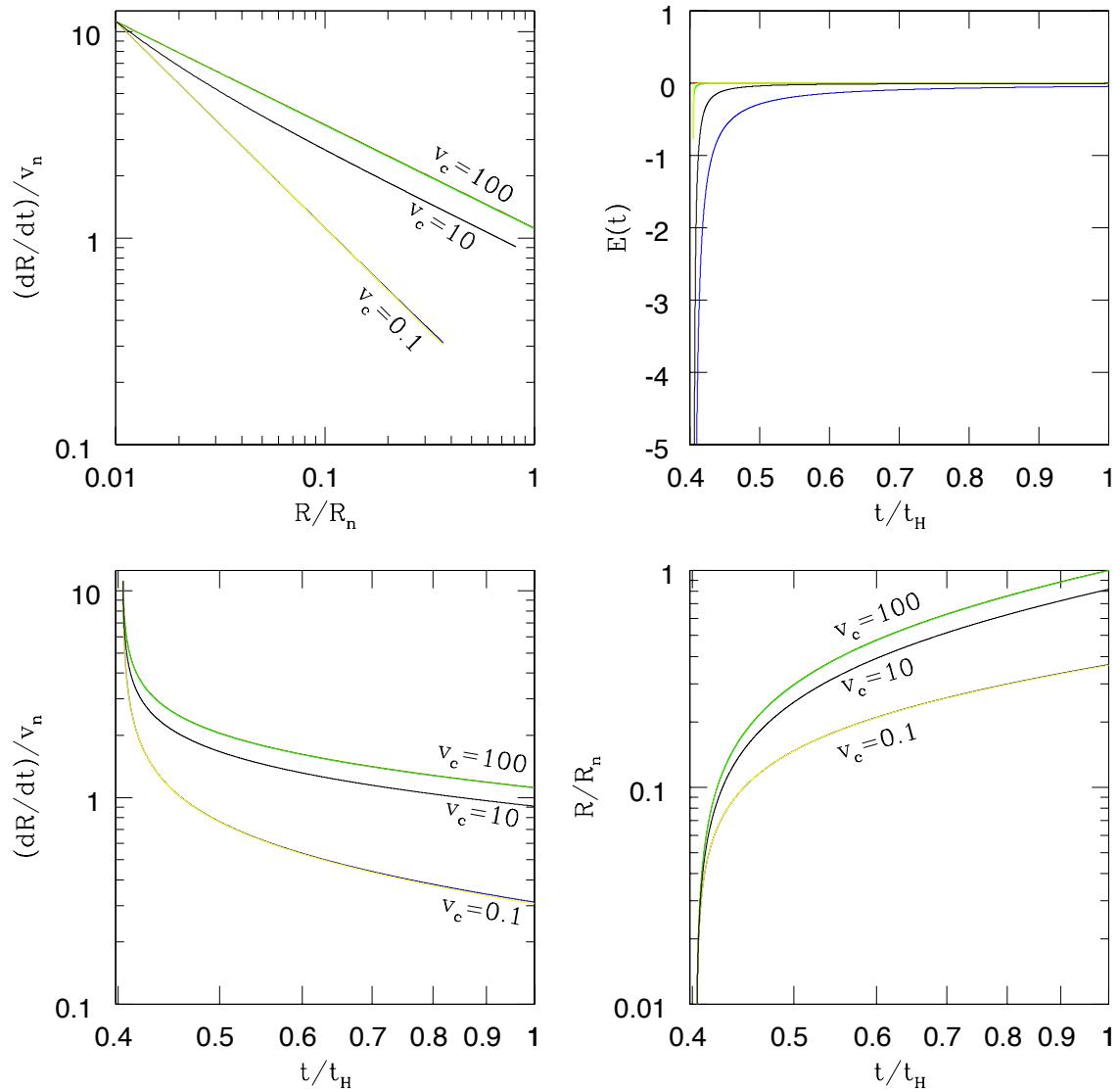


Figura 5.4: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia zero con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = \dot{\mathcal{R}}^2/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)$ per diversi valori di \tilde{v}_c

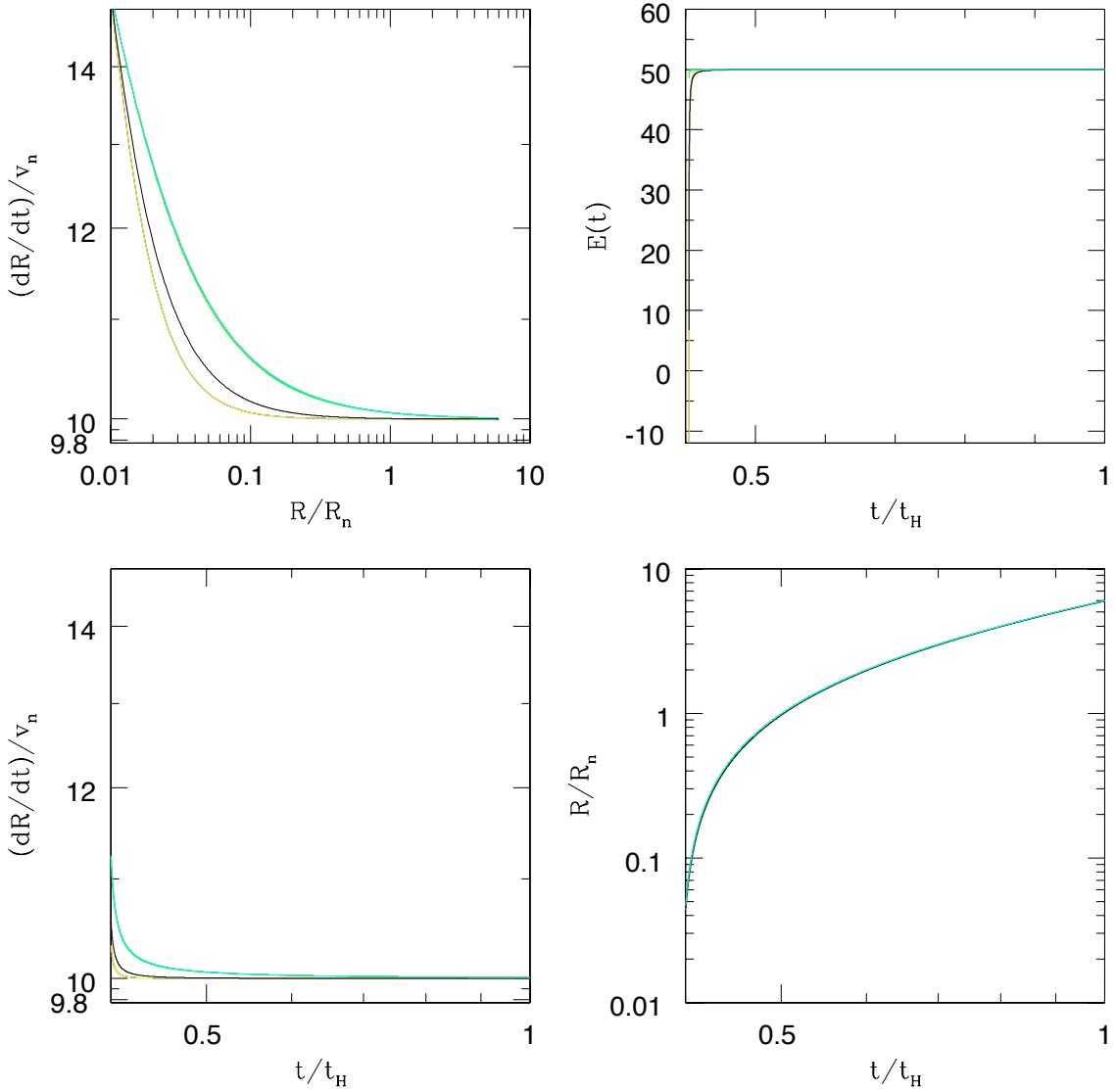


Figura 5.5: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia positiva con $v_0 = 15$ con una funzione $\mu(\dot{R}) = \dot{R}^2/(\tilde{v}_c^2 + \dot{R}^2)$ per diversi valori di \tilde{v}_c

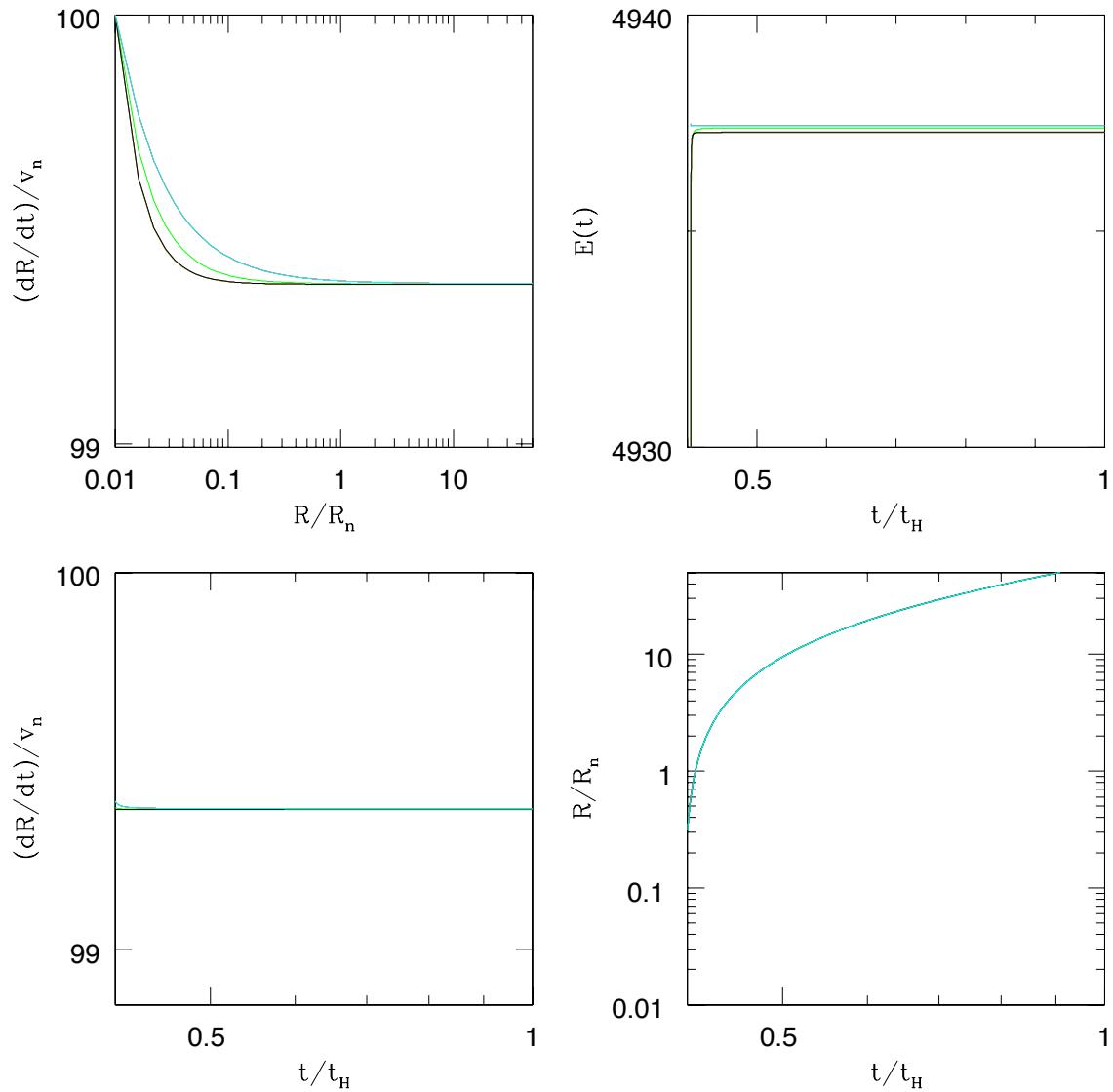


Figura 5.6: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia positiva con $v_0 = 100$ con una funzione $\mu(\dot{R}) = \dot{\mathcal{R}}^2/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)$ per diversi valori di \tilde{v}_c

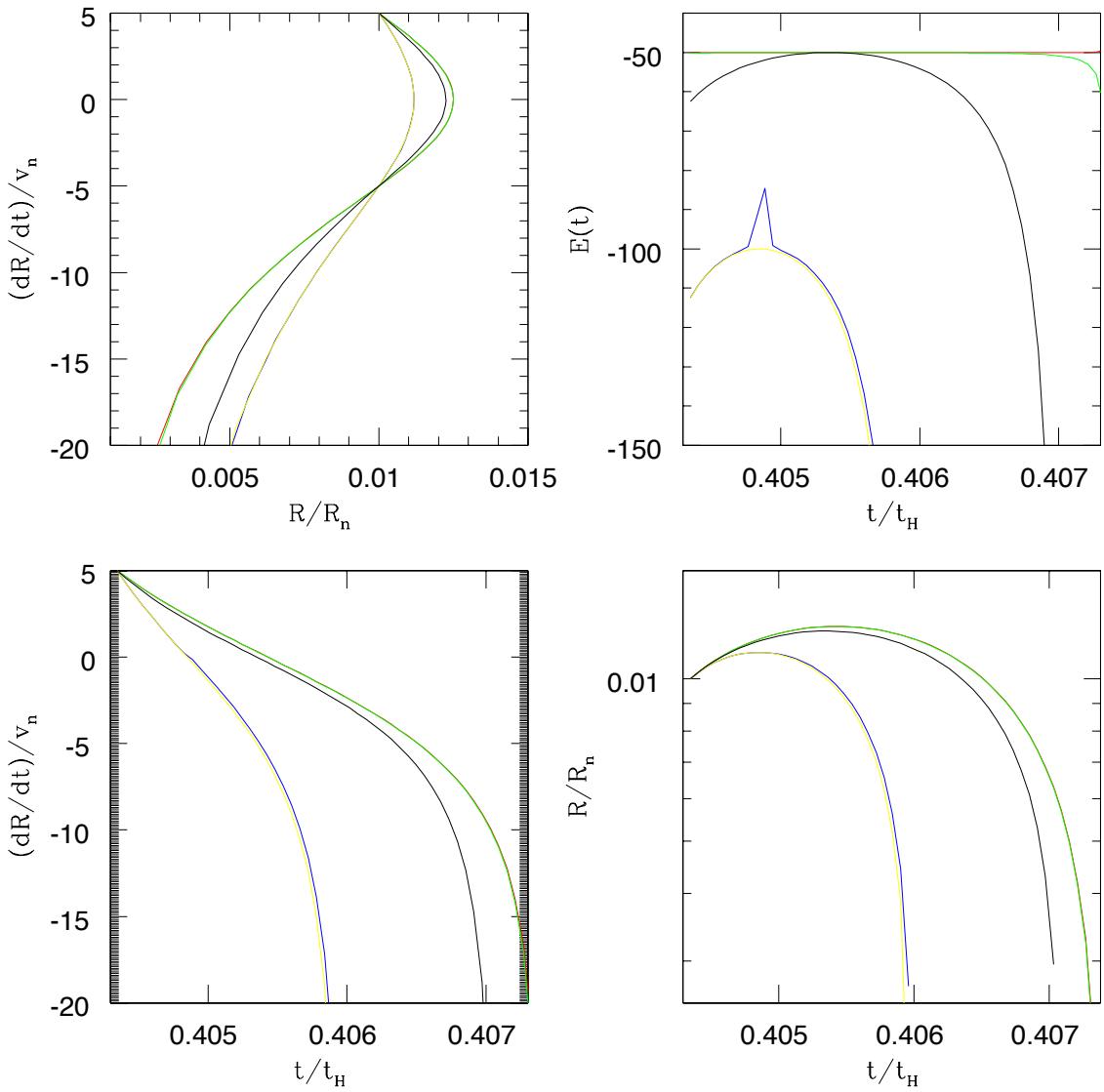


Figura 5.7: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia negativa con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = \dot{\mathcal{R}}^2/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)$ per diversi valori di \tilde{v}_c

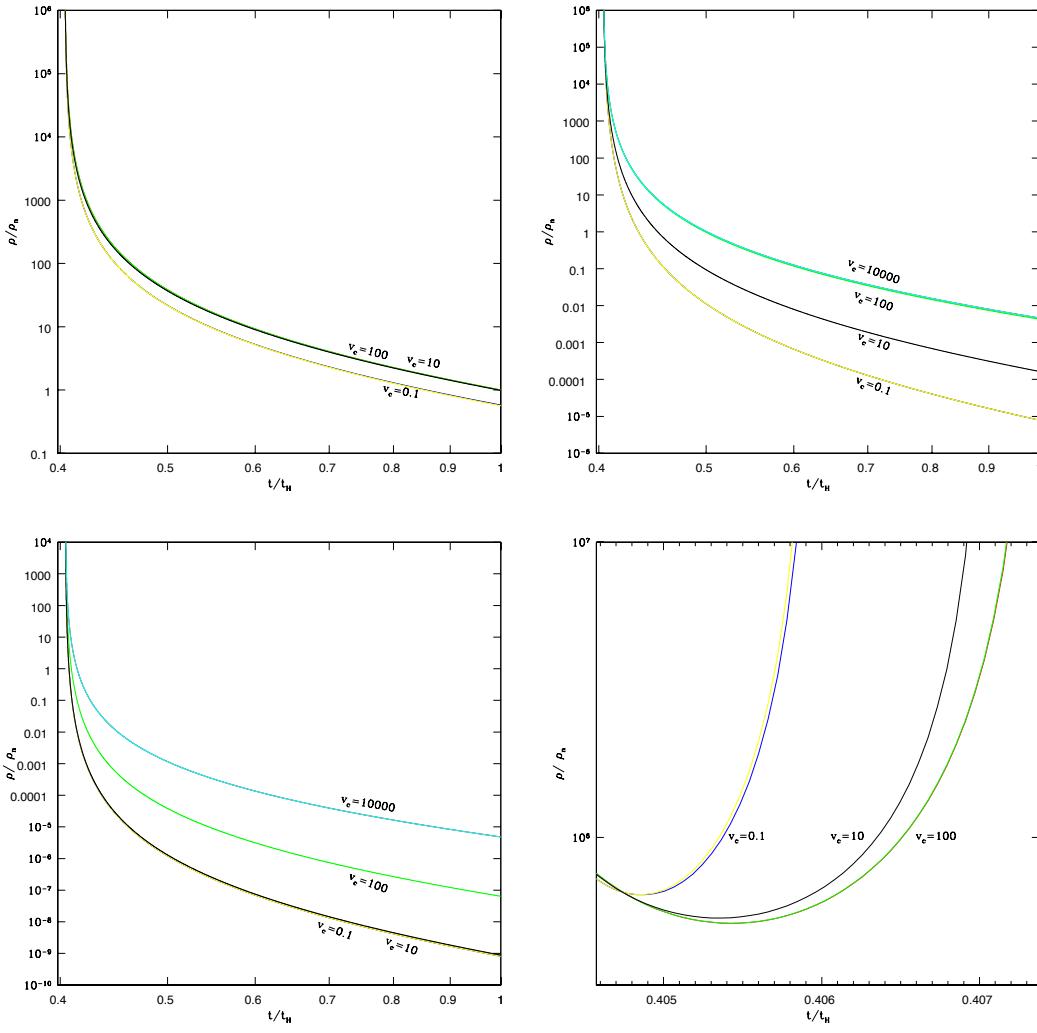


Figura 5.8: Evoluzioni temporali della densità ottenute perturbando i modelli di Universo illustrati nelle figure precedenti

5.4 Soluzioni per $\mu = (\dot{\tilde{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4) / (\tilde{v}_c^2 + \dot{\tilde{R}}^2)^2$

Consideriamo ora il caso

$$\mu = \frac{\dot{\tilde{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4}{(\tilde{v}_c^2 + \dot{\tilde{R}}^2)^2}. \quad (5.28)$$

Ancora, con questa scelta per μ , per velocità iniziali molto più grandi di \tilde{v}_c riotteniamo i modelli di radiazione, mentre, per $\tilde{v}_0 \ll \tilde{v}_c$, bisogna distinguere i casi a seconda del valore del parametro ε : per $\varepsilon \ll 1$ ritroviamo gli universi di materia, per $\varepsilon = -1$ di nuovo gli universi di radiazione e per $\varepsilon = -3$ abbiamo gli universi con costante cosmologica con equazione di stato $p = -\rho$.

È importante notare che per $\varepsilon = 1$ ci troviamo di fronte ad un universo caratterizzato da una espansione costante. Infatti, in questo caso si avrebbe $\mu \simeq -1$ e, dall'equazione del moto (4.6) si vede subito che $\ddot{\tilde{R}} = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{R}} = \text{cost}$, mentre, per $\varepsilon > 1$ l'espansione risulta sempre accelerata. Come si può notare dalla figura (5.9), per $0 < \varepsilon < 1$ l'espansione risulta ancora decelerata ma comunque più veloce rispetto al modello di materia imperturbato, cioè la velocità diminuisce più lentamente e il raggio di scala aumenta più rapidamente, perciò ad un tempo fissato si ritrova un universo più grande. Si vede poi come, perturbando un universo ad energia nulla si ottiene comunque un modello ad energia positiva per valori di ε abbastanza grandi.

Come per il μ precedente, anche qui all'aumentare dell'energia iniziale le curve delle grandezze fisiche graficate tendono a coincidere ma, mentre per energie positive ma non molto grandi è ancora possibile distinguere fra modelli accelerati e decelerati (fig (5.10)), per valori elevati di \tilde{E}_0 il fattore di scala ha lo stesso andamento per qualsiasi valore di ε ; inoltre la velocità di espansione rimane praticamente costante anche se dall'equazione del moto risulta $\ddot{\tilde{R}} < 0$ (fig (5.11))

Per quanto riguarda i modelli chiusi, per $\varepsilon < 1$ l'espansione risulta di nuovo più veloce rispetto al modello di materia, nel senso che allo stesso tempo corrisponde un raggio di scala maggiore, ma i modelli perturbati raggiungono il loro raggio massimo più lentamente ed inoltre si ha che $\tilde{R}_{max,pert} > \tilde{R}_{max,impert}$, quindi si richiudono a tempi maggiori. L'energia tende ad aumentare col tempo com'è ovvio dato che la velocità aumenta in valore assoluto. Naturalmente per $\varepsilon \geq 1$ non è possibile costruire un modello chiuso in quanto, anche se assumiamo una \tilde{v}_0 molto piccola, $\dot{\tilde{R}} = \text{cost}$, quindi il moto non si inverte mai.

Per $\varepsilon > 1$ (fig (5.13-14-15)), $\ddot{\tilde{R}} > 0$ sempre, quindi l'espansione è accelerata tanto più

quanto maggiore è il valore assunto per ε , mentre risulta praticamente identico l'andamento del fattore di scala nei tre casi di universo piatto, aperto e chiuso (è invece il modello imperturbato che si avvicina a quello perturbato al crescere dell'energia).

Passiamo ora ad esaminare le densità (fig (5.16)).

Fissata l'energia iniziale la densità diminuisce meno rapidamente al crescere di ε , in quanto il secondo membro dell'equazione (5.27) diventa più piccolo in valore assoluto, perciò la pendenza della $\tilde{\rho}(\tilde{\mathcal{R}})$ diminuisce e la ρ finale risulta maggiore. Fissato ε , invece, all'aumentare di \tilde{E}_0 la densità diminuisce più lentamente e la spiegazione la si capisce riesaminando l'equazione (5.27) e riscrivendola come:

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln t} = (-3 - \mu) \frac{d \ln \mathcal{R}}{d \ln t} \quad (5.29)$$

ad energie maggiori corrispondono velocità maggiori e quindi $d \ln \rho / d \ln t$ diminuisce più velocemente, e questo comporta delle densità finali minori.

Per valori di \tilde{v}_c confrontabili con \tilde{v}_0 possiamo dire qualitativamente che gli andamenti rimangono sostanzialmente gli stessi (vedi fig (5.17-20), con alcune differenze dovute al peso maggiore del termine $\dot{\tilde{\mathcal{R}}}^2$. Infatti l'energia, $\tilde{E} = \dot{\tilde{\mathcal{R}}}^2/2 - e^z(1+\mu)/\tilde{\mathcal{R}}$, aumenta rapidamente a causa delle alte velocità iniziali e della scarsa influenza del termine in \tilde{v}_c e tende ad un valore asintotico quando invece la velocità diventa abbastanza piccola. Ovviamente ciò avviene più rapidamente negli universi aperti in cui il tasso di espansione presenta una discesa più ripida. In generale si nota come questi modelli sono meno veloci di quelli con alti valori di \tilde{v}_c , nel senso che la velocità diminuisce più in fretta e allo stesso tempo corrisponde una dimensione minore, mentre nei modelli chiusi l'espansione risulta più veloce intendendo con questo che l'universo si richiude a tempi minori raggiungendo dimensioni più piccole. Passando alle densità le differenze riguardano in particolar modo gli universi aperti che a $t/t_H = 1$ raggiungono dei valori molto piccoli (fig (5.21)). Ricordiamo che, nel nostro modello, $\rho = e^{\tilde{z}}/\tilde{\mathcal{R}}$, dove $\tilde{z} = -\mu \dot{\tilde{\mathcal{R}}}/\tilde{\mathcal{R}}$, e integrando si ha $\tilde{z} \propto -\mu \ln |\tilde{\mathcal{R}}|$; perciò, se $\tilde{v}_c \gg \dot{\tilde{\mathcal{R}}}$, $\tilde{z} \propto +\varepsilon$, in caso contrario la velocità non è più trascurabile e μ diventa meno negativo. Infatti, a basse velocità (universi piatti e chiusi), gli andamenti della $\tilde{\rho}$ coincidono indipendentemente dal valore di \tilde{v}_c .

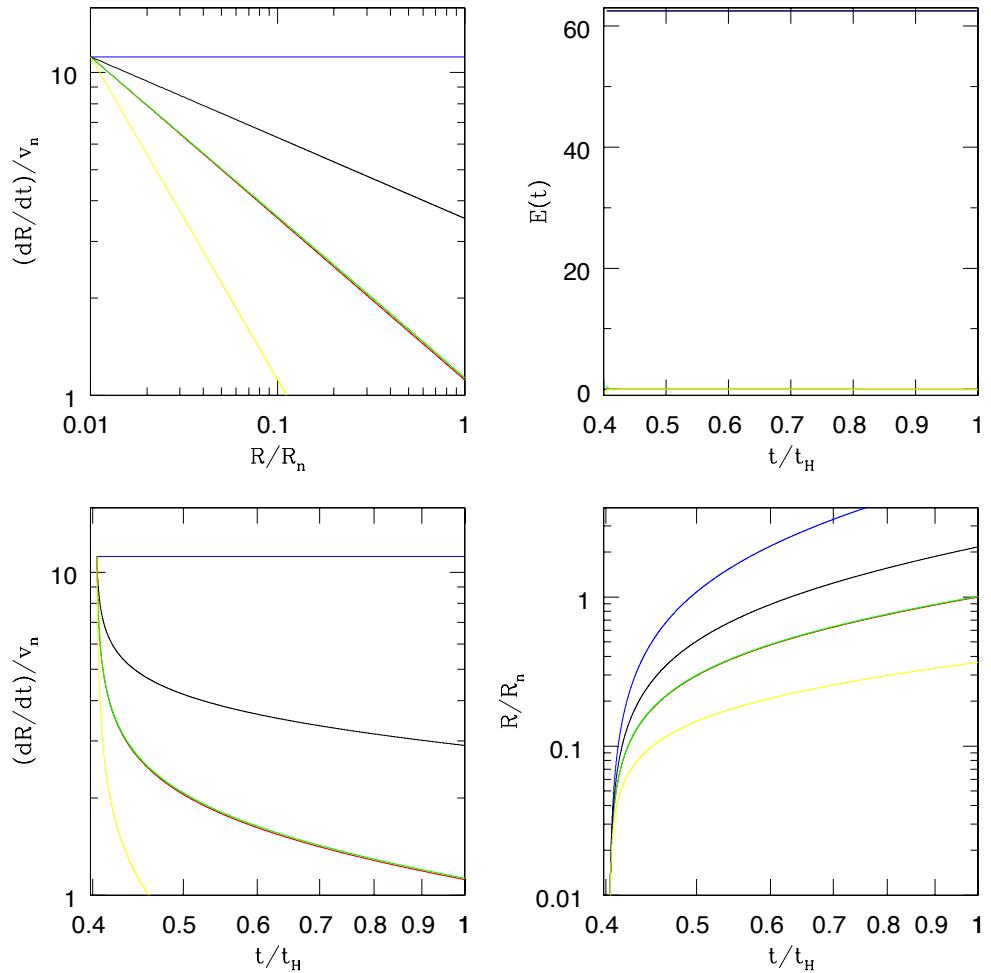


Figura 5.9: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia zero con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4) / (\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10^4$ e diversi valori di ε

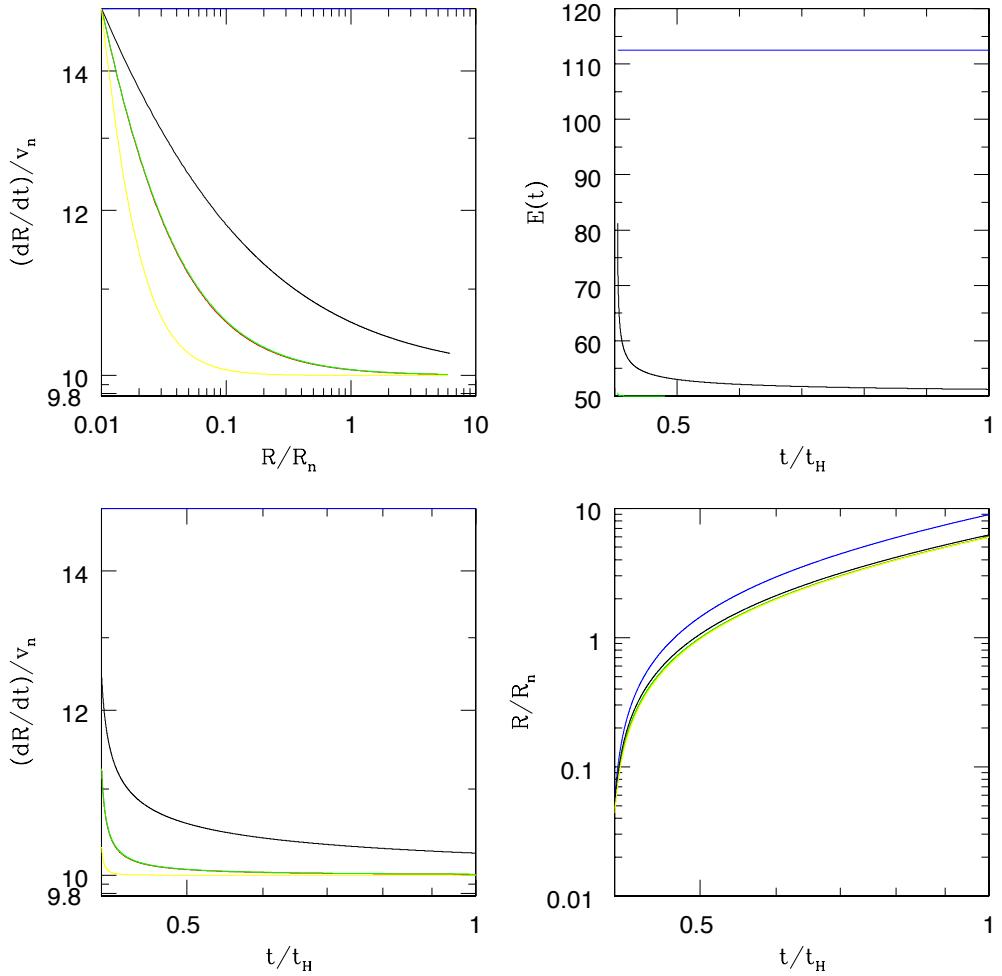


Figura 5.10: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia positiva con $\tilde{v}_0 = 15$ con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4)/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10^4$ e diversi valori di ε

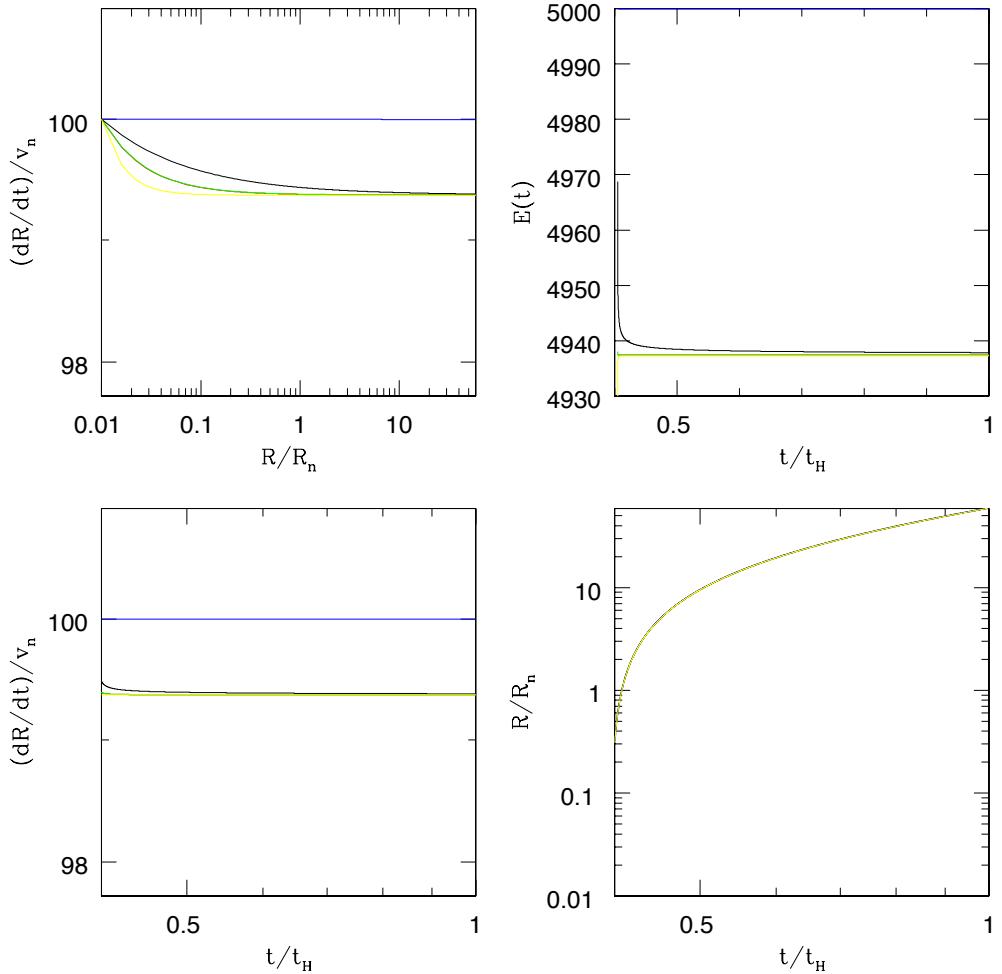


Figura 5.11: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia positiva con $\tilde{v}_0 = 100$ con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4)/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10^4$ e diversi valori di ε

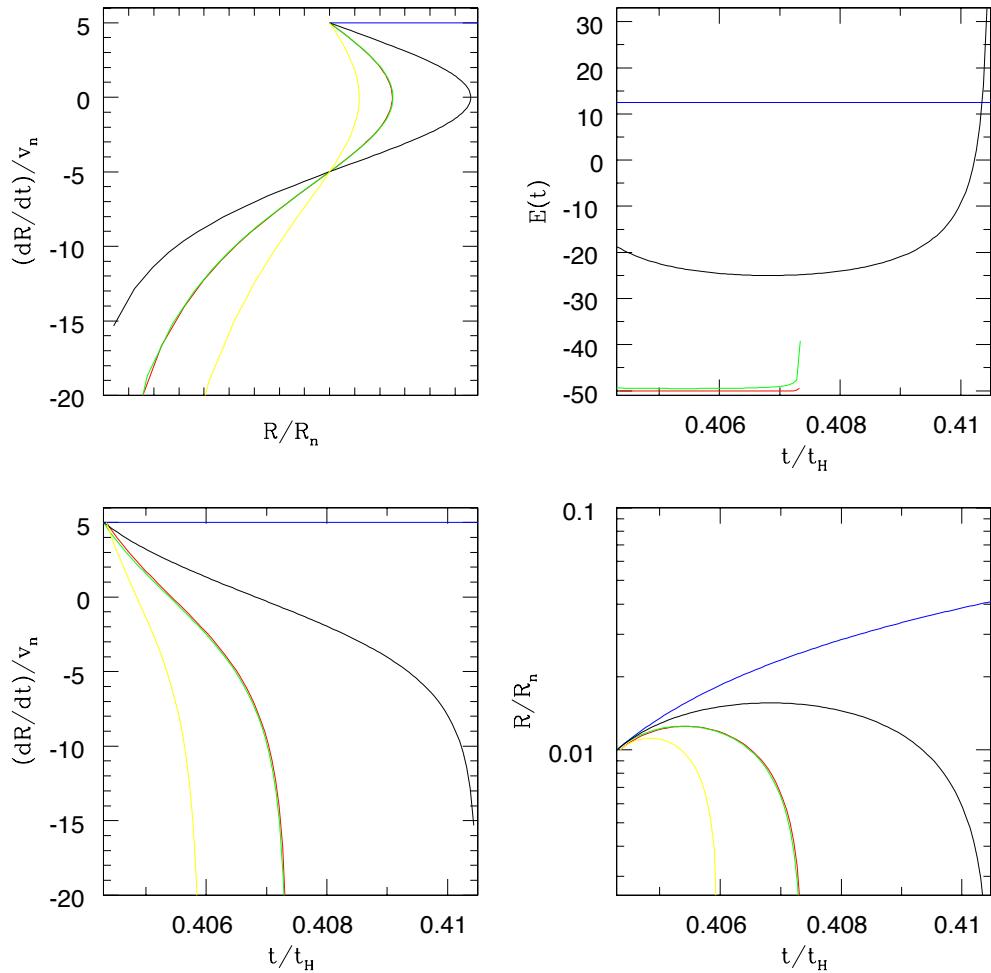


Figura 5.12: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia negativa con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4)/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10^4$ e diversi valori di ε

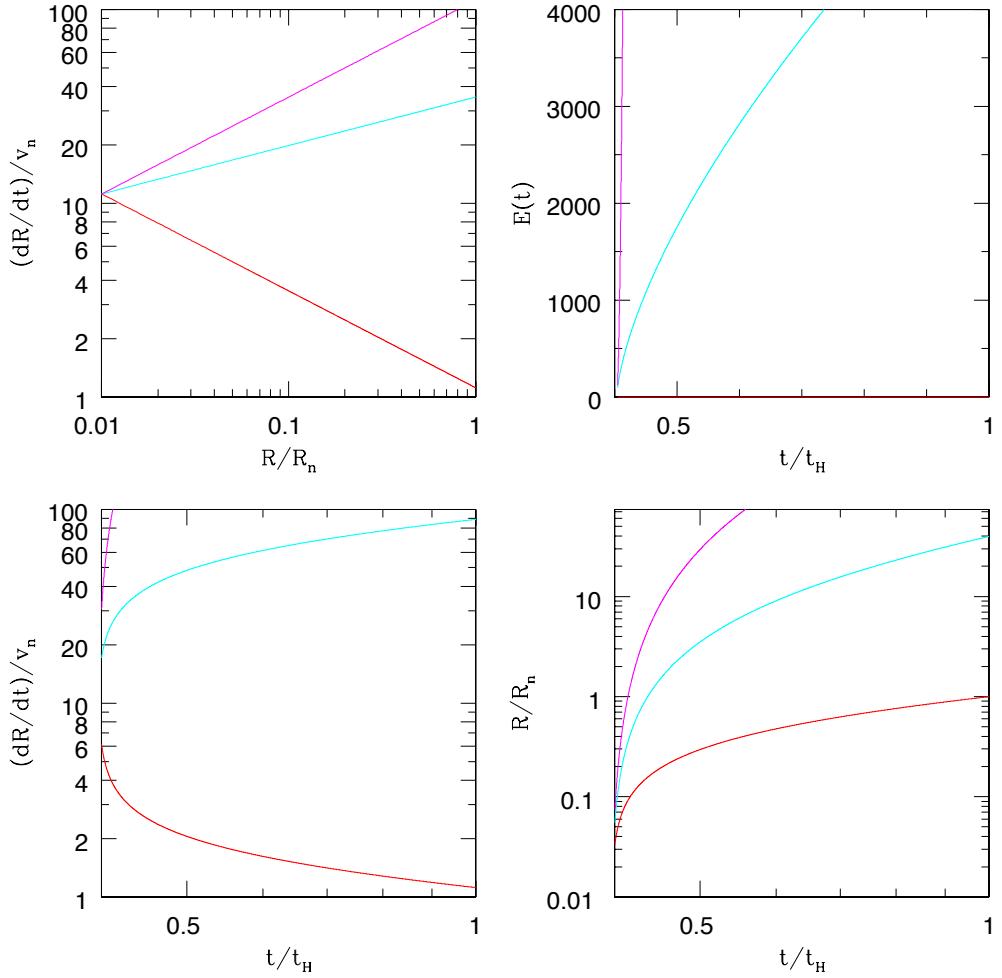


Figura 5.13: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia zero con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4) / (\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10^4$ e $\varepsilon = 1.5 - 2$

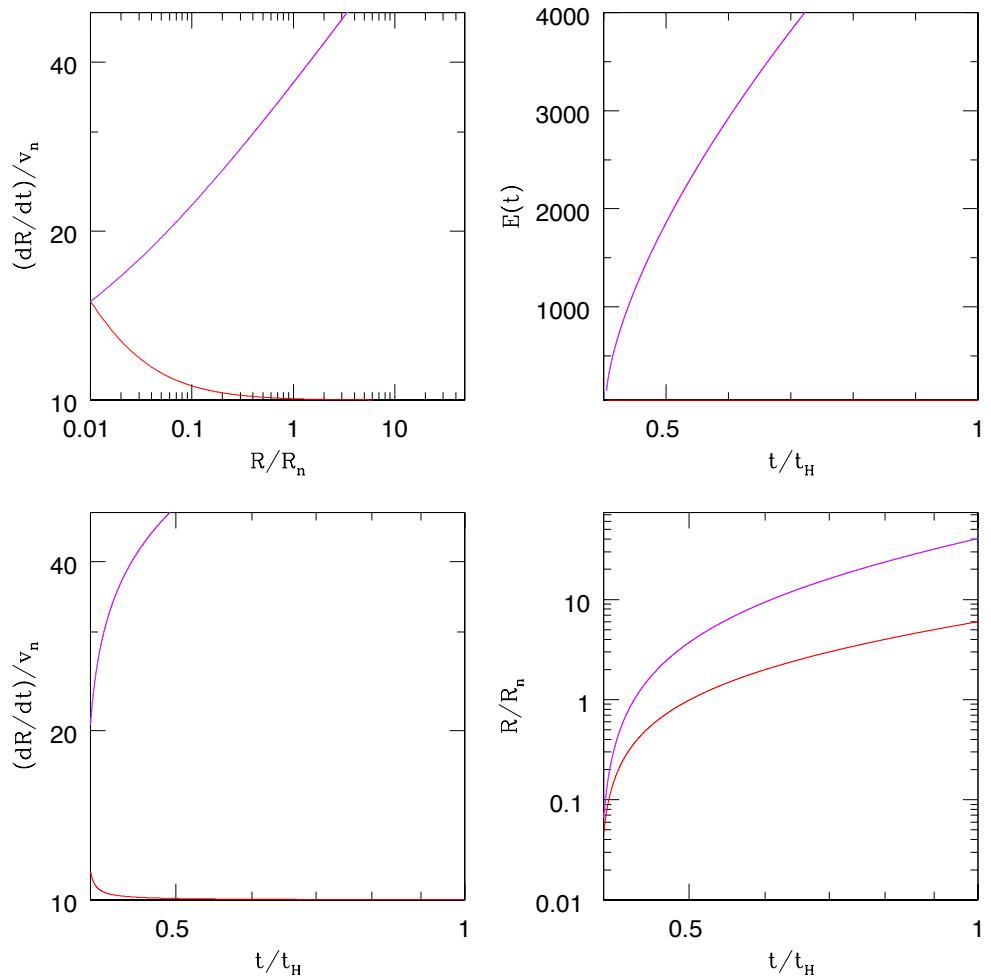


Figura 5.14: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia positiva con $\tilde{v}_0 = 15$ con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4) / (\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10^4$ e $\varepsilon = 1.5 - 2$

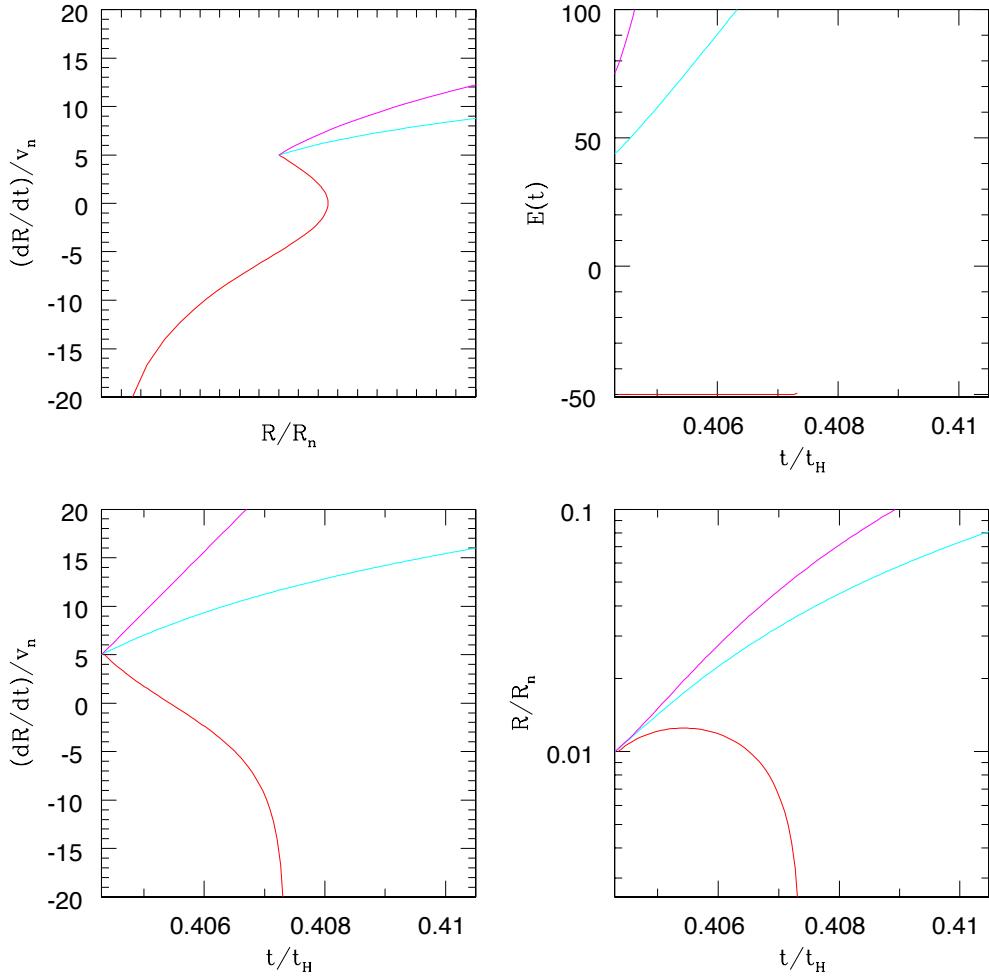


Figura 5.15: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia negativa con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4) / (\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10^4$ e $\varepsilon = 1.5 - 2$

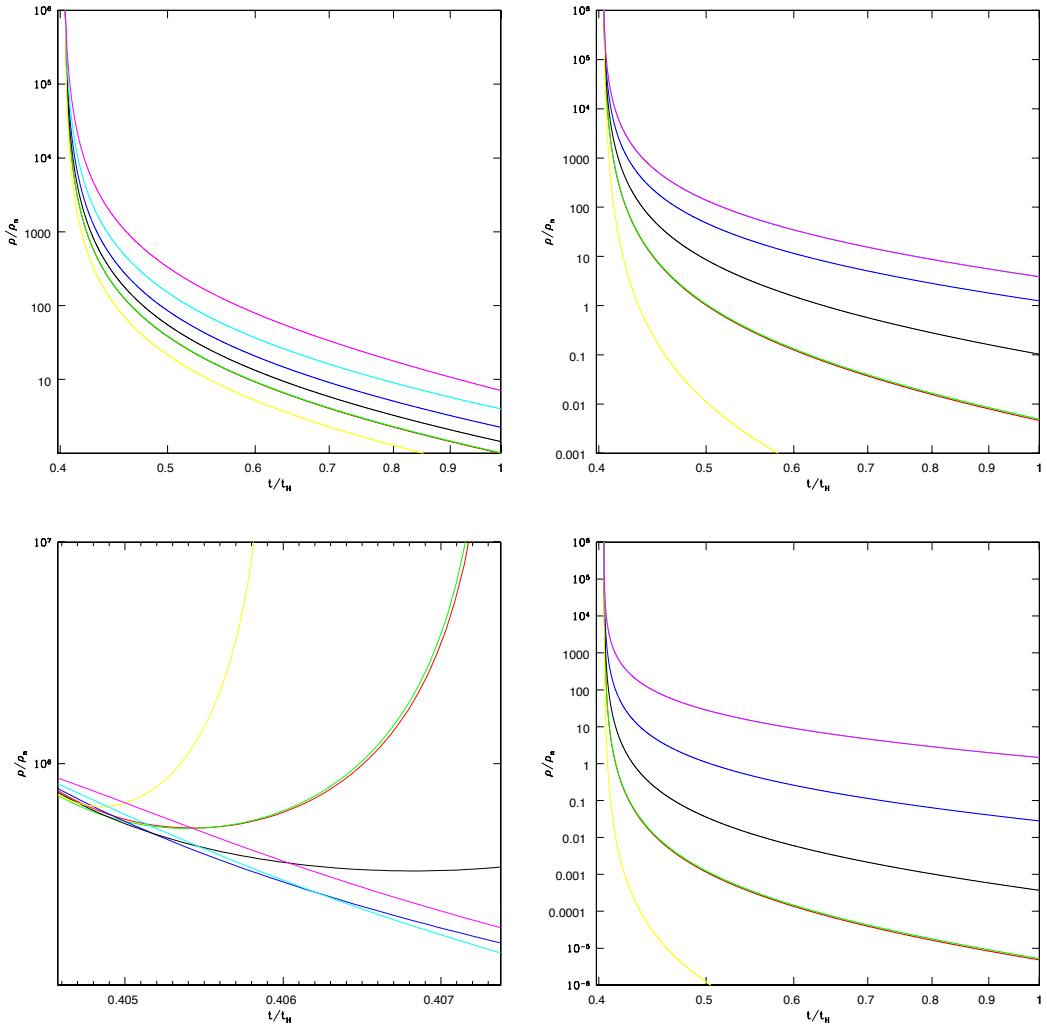


Figura 5.16: Evoluzioni temporali della densità ottenute perturbando i modelli di Universo illustrati nelle figure precedenti

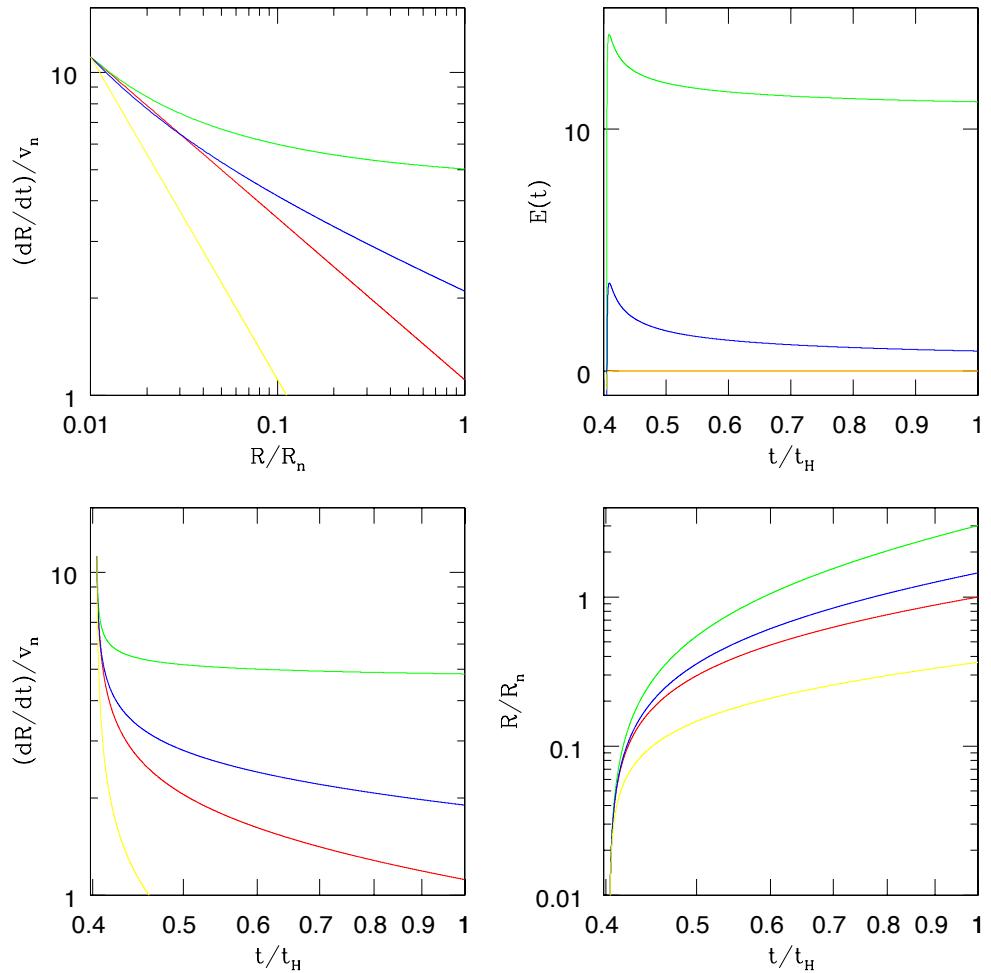


Figura 5.17: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia zero con una funzione $\mu(\dot{R}) = (\dot{R}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4)/(\tilde{v}_c^2 + \dot{R}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10$ e diversi valori di ε

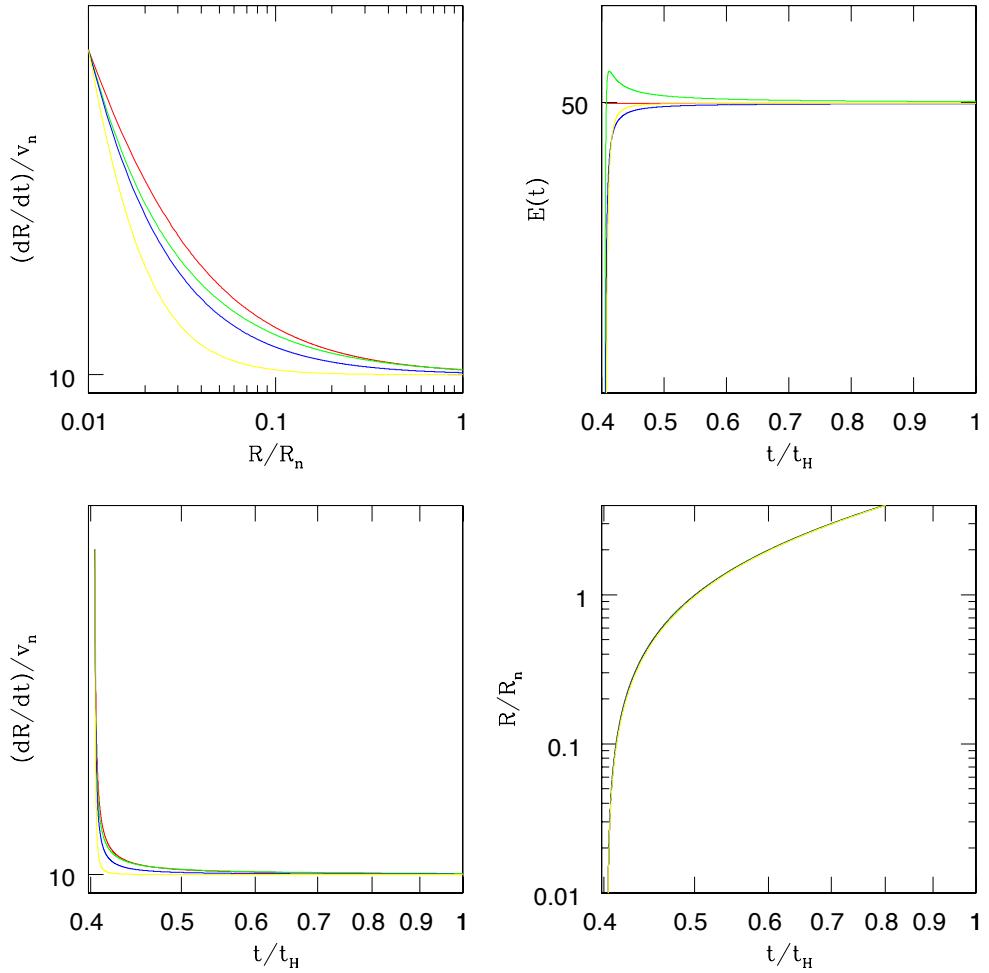


Figura 5.18: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia positiva con $\tilde{v}_0 = 15$ con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4)/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10$ e diversi valori di ε

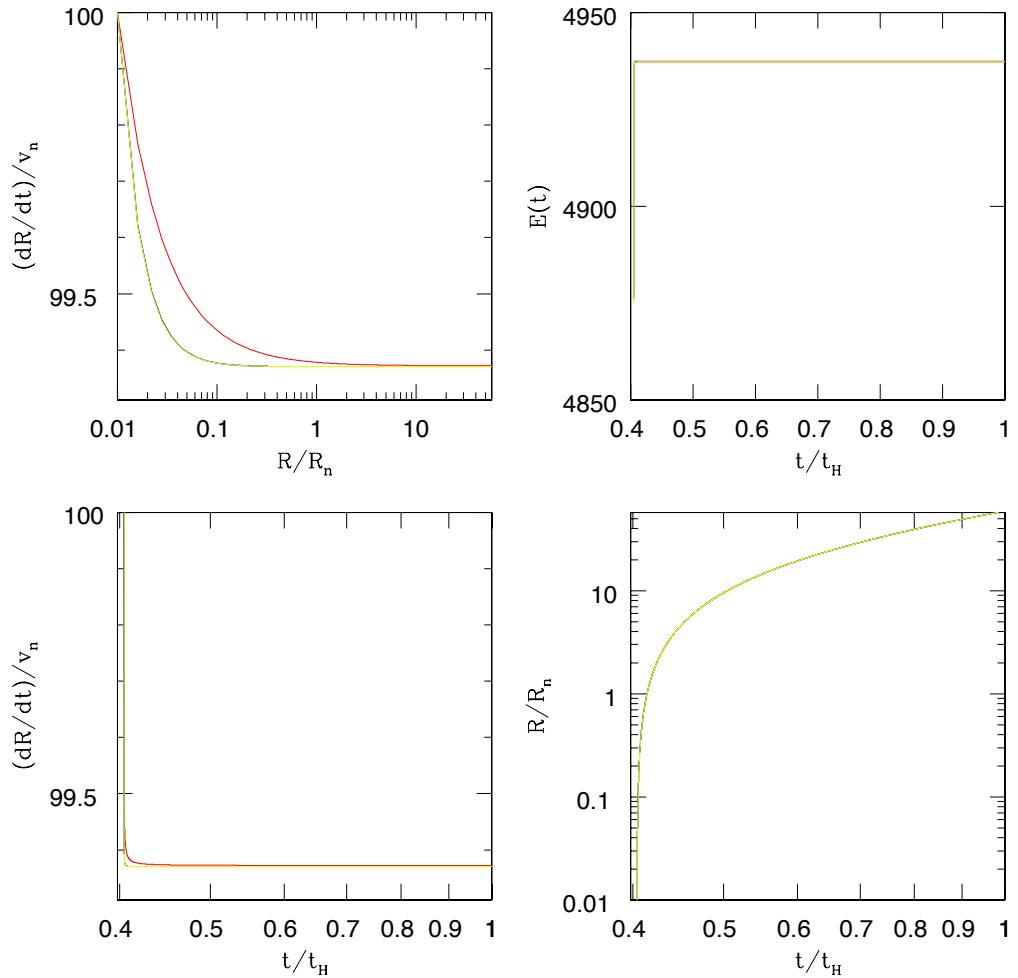


Figura 5.19: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia positiva con $\tilde{v}_0 = 100$ con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4)/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10$ e diversi valori di ε

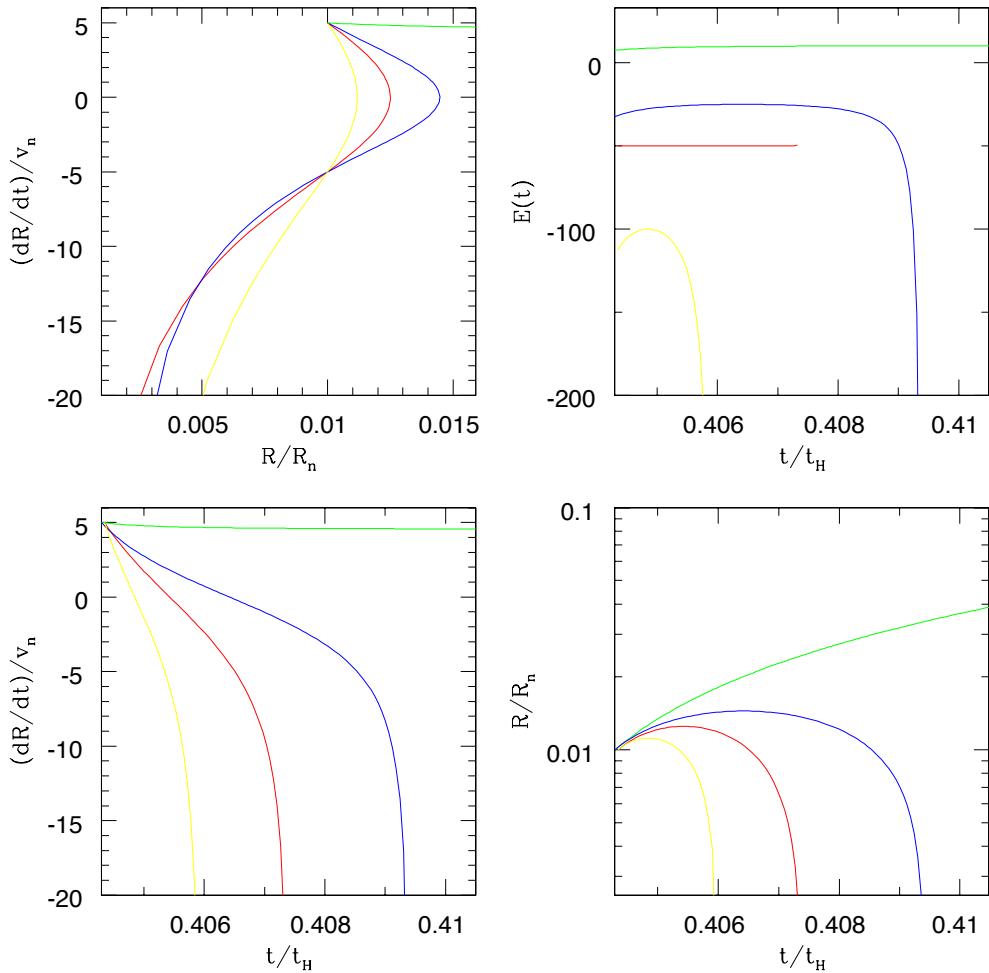


Figura 5.20: Evoluzione temporale del raggio di scala, dell'energia e della velocità di espansione e spazio delle fasi (in alto a sinistra) ottenuti perturbando un Universo di materia ad energia negativa con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4) / (\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10$ e diversi valori di ε

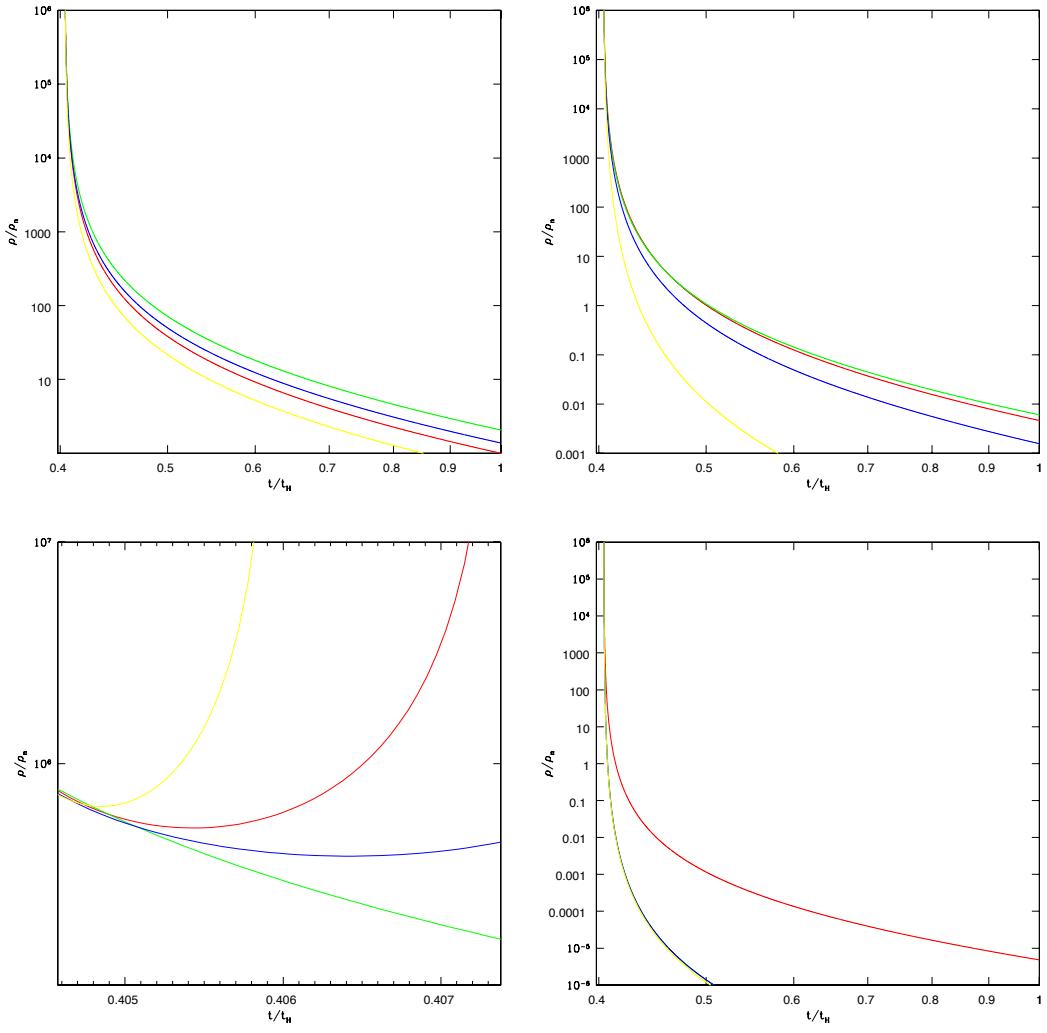


Figura 5.21: Evoluzioni temporali della densità ottenute perturbando i modelli di Universo illustrati nelle figure precedenti

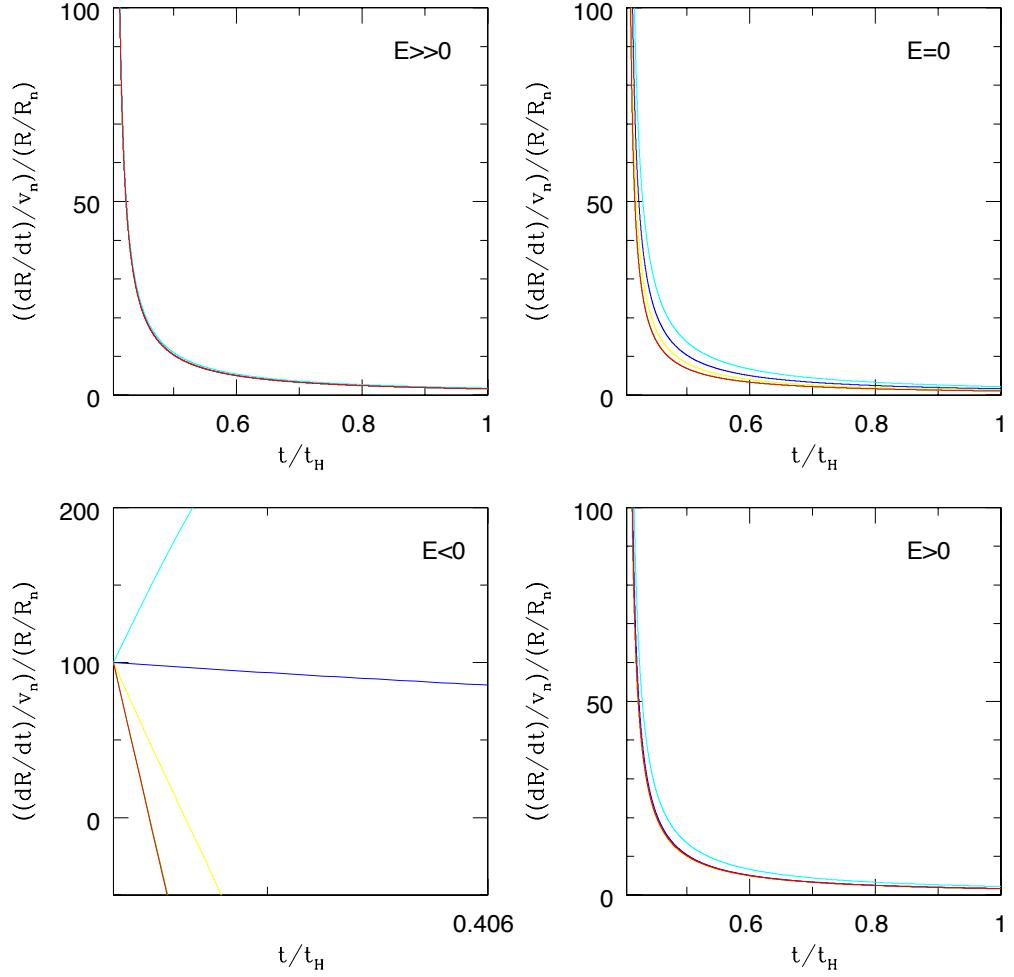


Figura 5.22: Evoluzione temporale della costante di Hubble per universi ad energia nulla, positiva e negativa perturbati con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4) / (\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10^4$ e diversi valori di ε

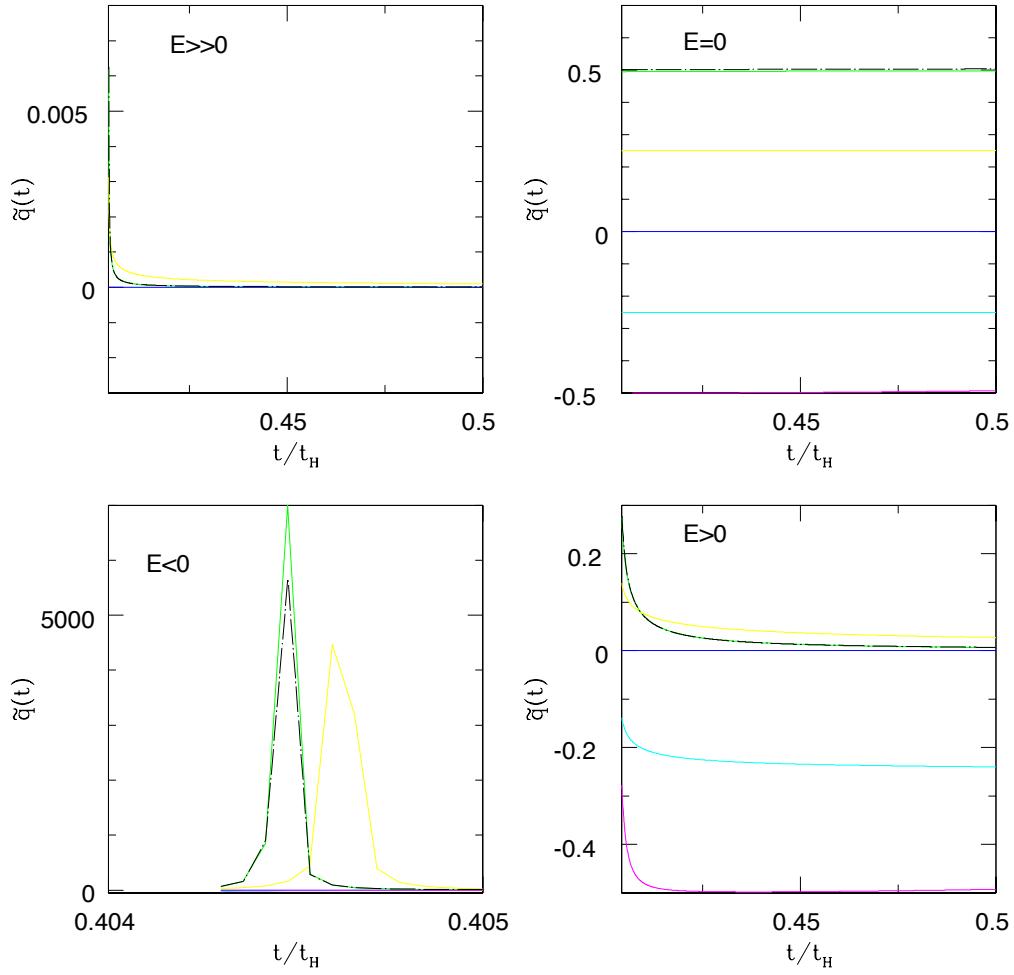


Figura 5.23: Evoluzione temporale del parametro di decelerazione per universi ad energia nulla, positiva e negativa perturbati con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4)/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10$ e diversi valori di ε

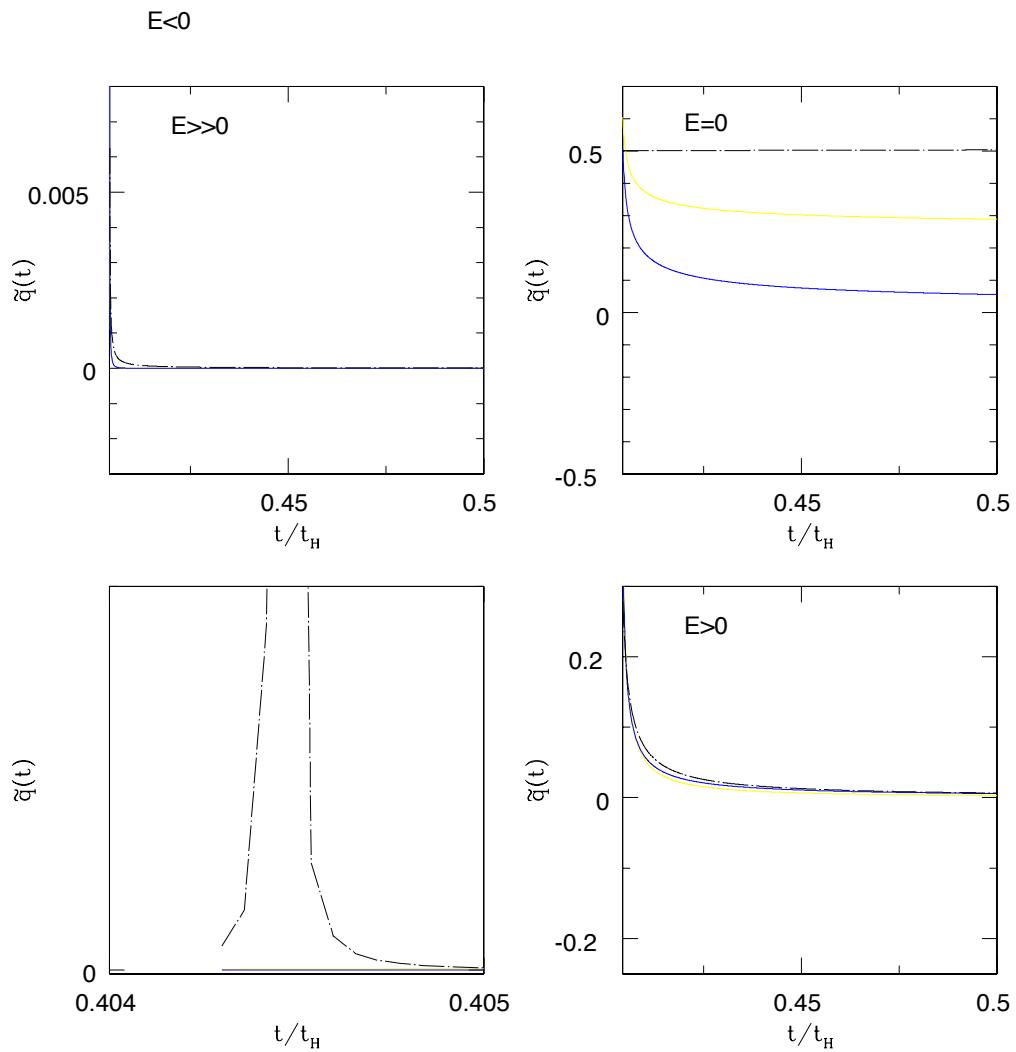


Figura 5.24: Evoluzione temporale del parametro di decelerazione per universi ad energia nulla, positiva e negativa perturbati con una funzione $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4)/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$ con $\tilde{v}_c = 10$ e diversi valori di ε

Capitolo 6

Conclusioni

Fin dai primi studi sulle supernovae Ia si è notato come questi eventi di esplosioni stellari potessero essere usati come candele standard per distanze cosmologiche. A bassi redshift sono degli ottimi indicatori per la misura della costante di Hubble, mentre, a distanze maggiori, possono fornire una stima del parametro di decelerazione attraverso la relazione distanza-redshift. La loro inaspettata scarsa luminosità per $0.5 < z < 1$. costituisce la prova più evidente dell'espansione accelerata dell'Universo, tesi avvalorata anche da recenti misure sulla scala angolare delle fluttuazioni nel fondo cosmico (CMB) che mettono in evidenza una densità di energia totale ben al di sopra della frazione attribuita alla massa gravitazionale. Mentre quest'ultima contribuisce alla decelerazione dell'Universo, un'altra fonte di energia, caratterizzata da una pressione negativa, potrebbe influire sulla dinamica dell'espansione causando un'accelerazione. I modelli più semplici reintroducono una costante cosmologica con equazione di stato $p = w\rho$ con $w = -1$, o considerano un campo scalare lentamente oscillante (*quintessenza*) la cui equazione di stato, in generale, varia durante l'espansione ma può sempre essere approssimata con una media pesata nel tempo. In questa tesi si sono analizzati questi modelli a pressione negativa, eliminando la condizione $w < -1$ e prendendo in considerazione le informazioni provenienti dalle SNe Ia. Il set di dati utilizzato per fittare Ω_i e w_Q attraverso la relazione distanza-redshift, è composto da 60 SNe ad alto redshift cui è stata aggiunta la SN1997ff posta a $z = 1.7$ la cui luminosità eccede di 0.4 mag rispetto al campione a $0.5 < z < 1$ e che per questo farebbe pensare ad un Universo in decelerazione al momento della sua esplosione. Abbiamo considerato alcuni tipi di Universo tra i più rappresentativi, fittando modelli piatti (spinti dai dati recenti derivanti dal CMB che risultano a favore di un $\Omega_{TOT} = 1$) a due o tra componenti con diverse equazioni di stato e verificato che un modello classico

di Einstein-de Sitter si dimostra essere un pessimo fit per i dati a disposizione mentre è necessaria l'introduzione di una componente ad energia negativa in grado di produrre un'accelerazione. I valori di w_Q presi in esame sono stati $w = -1/3, -2/3, -1, -3/2, -3$ e abbiamo constatato come tutti questi modelli forniscano una forma per $(d_L - z)$ che è adatta a spiegare il particolare andamento della magnitudine delle SNe col redshift, anche se nessuno di essi è in grado di riprodurre la magnitudine osservata per la SN1997ff a meno di aumentare il contributo di materia e proporzionalmente aumentare quello di energia oscura, col risultato, però, di uscire dai limiti imposti dagli ammassi di galassie per la densità di materia.

Utilizzando poi il metodo della minimalizzazione del χ^2 , abbiamo costruito le ellissi di confidenza (che racchiudono il 68% della probabilità totale) nel piano (Ω_M, Ω_Q) per diverse equazioni di stato ricavando per ognuno dei valori di best-fit con i quali stimare il parametro di decelerazione attuale: mentre risulta abbastanza chiaro il segno di q_0 , la stima del suo valore risulta molto incerta e necessita di dati più precisi e soprattutto a redshift maggiori dove l'influenza del termine con q_0 nella espressione della distanza di luminosità diventa più importante. Costruendo poi l'ellisse di confidenza nel piano (Ω_Q, w_Q) , scegliendo w come parametro libero e fissando una geometria piatta, si può notare come valori di w fino a -3 cadono ancora all'interno della regione a 1σ : a maggior ragione la limitazione fin'ora effettuata a valori di $w > -1$, che non è tra l'altro giustificata fenomenologicamente, non deve essere considerata materia di principio. I valori di best-fit che emergono sono $\Omega_Q = 0.65$ e $w_Q = -1.5$, da confrontarsi con $\Omega_Q = 0.55$ e $w_Q = -1.9$ stimati da Hannestad&Mortsell(2002). La differenza potrebbe spiegarsi con l'inserimento nel campione di SNe da noi studiato della SN1997ff che torna ad essere compatibile con una fase di espansione decelerata.

Un risultato importante riguarda l'equazione di stato $w = -3$: dall'ellisse di confidenza si nota come valori di $\Omega_M < 0.5$ sono esclusi ad un livello di confidenza del 68%, in netta contraddizione con l'analisi della dinamica degli ammassi che propendono per un $0.2\Omega_M < 0.3$, mentre per equazioni di stato $w = -1.5$ sono ancora permessi valori di Ω_M che rientrano in questo intervallo. Quindi, un modello con $w = -3$, da questa prima analisi, sarebbe da scartare. Bisogna però ricordare che il nostro studio si è basato essenzialmente sulle SNe Ia, mentre una combinazione di tutti i dati oggi disponibili fornirebbe delle stime più precise dei parametri di densità e dei limiti più stringenti sull'equazione di stato

cosmologica.

Motivati da tutto ciò, siamo passati alla costruzione di un semplice modello per la dinamica dell'Universo, considerando la possibilità di costruire equazioni di stato $p = p(\rho)$ che contenessero anche una dipendenza dal rate di espansione. È importante sottolineare il fatto che questa ipotesi soddisfa ancora la richiesta fondamentale della Relatività Generale $T_{\mu\nu;\nu} = 0$.

Con la nuova equazione di stato $p = p(R, \dot{R})$, l'Universo, considerato come sistema dinamico, diventa un sistema "dissipativo", integrabile solo numericamente.

Dopo aver posto l'equazione di stato nella forma $p = \mu(R, \dot{R})\rho_0$, con $\rho_0 = 1/3\rho c^2$ e verificato che nei casi particolari $\mu = 0$ e $\mu = 1$ si riottengono gli universi classici di materia e di radiazione, abbiamo considerato due forme particolari per μ con cui perturbare un universo standard di materia ad energia nulla:

- $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = \dot{\mathcal{R}}^2/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)$, che nei limiti di velocità molto grandi e molto piccole ridà gli universi classici. È interessante notare come, in questo caso, le curve che rappresentano le evoluzioni temporali delle grandezze fisiche associate al moto tendono asintoticamente agli universi di materia o di radiazione a seconda del valore di \tilde{v}_c e che la rapidità con cui questo avviene dipende dall'energia iniziale impartita. Ma con questa perturbazione non riusciamo ad ottenere universi che si espandono più velocemente di quello di materia, cioè, per tempi fissati, le dimensioni dell'universo perturbato risultano inferiori rispetto al modello classico imperturbato;
- $\mu(\dot{\mathcal{R}}) = (\dot{\mathcal{R}}^4 - \varepsilon \tilde{v}_c^4)/(\tilde{v}_c^2 + \dot{\mathcal{R}}^2)^2$: anche questa si riduce all'equazione di stato degli universi di radiazione per $\dot{\mathcal{R}}_0 \gg \tilde{v}_c$ e a quelli di materia per $\dot{\mathcal{R}}_0 \ll \tilde{v}_c$ e $0 < \varepsilon \ll 1$. È questo il caso più interessante alla luce dei dati sulle SNe e sul CMB in quanto, a seconda dei valori ε si possono ottenere universi meno decelerati di quelli di materia e, ancora più importante, universi accelerati.

Una considerazione importante: la nostra equazione di stato modificata rappresenta una generalizzazione delle equazioni di stato classiche e di quintessenza che costituiscono dei casi particolari ottenibili per $\dot{\mathcal{R}} \ll \tilde{v}_c$ e con opportuni valori di ε . Inoltre, durante lo svolgimento di questa tesi è stato pubblicato un articolo (Hossain & Majumdar, 2002) in cui viene studiata una equazione di stato che evolve secondo una specifica funzione del fattore di scala, mostrando come anche questa sia in accordo con numerosi riscontri osservativi quali, per esempio, l'attuale accelerazione dell'Universo.

Infine, il lavoro fin qui svolto costituisce un punto di partenza per una analisi futura che prevederebbe il confronto diretto dei modelli costruiti con la nuova equazione di stato e i dati osservativi, attraverso il passaggio dalle grandezze fisiche associate al moto ($\mathcal{R}, \dot{\mathcal{R}}$), alle quantità osservabili, quali distanza di luminosità e redshift.

Appendice A

Richiami di cosmologia

Equazioni di Einstein

Sono sostanzialmente due i problemi di base che hanno portato Einstein alla formulazione della teoria della relatività generale:

- l'uguaglianza numerica fra massa inerziale e massa gravitazionale (*Principio di equivalenza*) che non riusciva ad essere giustificata da nessun approccio;
- la necessità di considerare sia in meccanica classica che in relatività ristretta solo sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme per mantenere invariate le equazioni del moto (cioè senza dover introdurre le forze di inerzia dovute al moto relativo)

La conseguenza di ciò è che si rende necessaria una teoria che fornisca i mezzi matematici per una descrizione del moto dei corpi in qualunque s.d.r. anche accelerato (sempre tenendo presente il secondo postulato della relatività ristretta riguardo all'esistenza di una velocità limite che è quella della luce) e che si riconduca alla meccanica newtoniana come limite per campi gravitazionali deboli.

Infatti, nell'intorno infinitesimo di ogni evento si può scegliere un s.d.r. localmente inerziale rispetto al quale le leggi della fisica assumono la forma prevista dalla relatività speciale. La geometria di quest'intorno è minkowskiana: la non uniformità, in generale, dei campi, fa sì che su dominii spaziotemporali finiti questa geometria risulti modificata; si può dire che la relatività ristretta è una teoria dello spazio-tempo in assenza di gravitazione e deve essere inglobata dalla nuova teoria nel senso di renderla valida solo localmente.

Bisogna allora costruire una teoria che permetta alle equazioni di essere covarianti, cioè di mantenere invariata la loro forma per generiche trasformazioni di coordinate e non più solo per trasformazioni lineari come sono quelle di Galileo e di Lorentz. L'elemento di linea

deve perciò essere sostituito dall'espressione

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.1)$$

dove $g_{\mu\nu}$ è un tensore $\binom{0}{2}$, simmetrico, funzione incognita delle coordinate, la cui forma dovrà essere ricavata tramite opportune equazioni e le cui componenti esprimono, in ultima analisi, i potenziali della gravitazione. In quest'ottica la gravità viene vista non più come una forza (e dunque i moti da essa retti sono moti liberi), ma l'azione gravitazionale esplicata da una distribuzione di materia-energia si manifesta in una modifica della geometria dello spazio-tempo; il moto di un corpo di prova segue le "rette" della geometria così modificata.

Il programma si articola poi in due momenti essenziali:

- data una geometria dello spazio-tempo individuare le linee di universo dei corpi di prova;
- data una distribuzione di materia in un dominio spaziotemporale individuare la geometria - da essi determinata - del dominio stesso.

La geometria in questione sarebbe, in generale, la geometria di uno spazio-tempo curvo; tale curvatura è descritta dal *tensore di Riemann* $R^\lambda_{\mu\nu\sigma}$ funzione della metrica e delle sue derivate prime e seconde. Dal tensore di Riemann se ne possono costruire altri per contrazione: il *tensore di Ricci*

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \quad (6.2)$$

e lo *scalare di curvatura*

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (6.3)$$

che soddisfano le cosiddette *identità di Bianchi*

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0 \quad (6.4)$$

Il termine in parentesi prende il nome di *tensore di Einstein* ed ha quindi quadridivergenza covariante nulla, il che è un elemento ben fisico per l'individuazione delle equazioni del campo gravitazionale (l'idea generale, infatti, è di utilizzare qualcosa di ricavato dal tensore di Riemann da inserire nelle equazioni del campo ad esprimere appunto la curvatura che è ciò che nei campi gravitazionali è intrinseco, non fittizio, ed ha valenza assoluta nel senso che permane qualunque sia la scelta compiuta di un sistema di base).

Costruzione dell'elemento di linea

Per arrivare all' elemento di linea adatto a questo tipo di Universo si parte dall'espressione generale per il ds^2

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (6.5)$$

e si separa la parte puramente spaziale da quella puramente temporale e da quella mista

$$ds^2 = g_{00}dx^0{}^2 + 2g_{0i}dx^0dx^i + g_{ij}dx^i dx^j \quad (6.6)$$

Le g_{0i} sono componenti miste del tensore metrico sviluppate sui versori di base \vec{e}_0 ed \vec{e}_i , ma qui si sceglie una base di versori $\{\vec{e}_i\}$ sulle ipersuperfici spaziali ed e_0 versore tangente alle curve che hanno la coordinata t come parametro, ossia quelle linee di universo che sono perpendicolari alle ipersuperfici spaziali, quindi e_0 è ortogonal ai versori $\{e_i\}$; di conseguenza $g_{0i} = g(e_0, e_i) = 0$. Si fa, cioè, la scelta di un sistema di coordinate *omeocentriche* tali che le coordinate spaziali lungo le linee di universo del substrato rimangano costanti, mentre varia solo la coordinata temporale; ora, questa coordinata coincide col tempo proprio τ di osservatori che si muovono lungo tali linee di universo, visto che si muovono lungo linee di universo parametrizzate da t ; ciò implica che $dx^0 = dt = d\tau$ (in unità $c = 1$); allora $g_{00} = 1$.

Il ds^2 a questo punto si scrive

$$ds^2 = dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j \quad (6.7)$$

Si considera ora una delle ipersuperfici, quella attinta, per esempio, al tempo t_0 ; la parte spaziale del ds^2 sarà $g_{ij}(t_0)dx^i dx^j$; poi si lascia trascorrere un intervallo di tempo cosmico che ci porta ad un istante successivo t e ci si può domandare che relazione c'è tra l' elemento spaziale $dl_{t_0}^2 = g_{ij}(t_0)dx^i dx^j$ e quello al tempo t $dl_t^2 = g_{ij}(t)dx^i dx^j$. Allora quello che si impone a questo punto, e che è conforme al principio cosmologico, è che al più possa avvenire una dilatazione del dl^2 dipendente solo da t ma che la sua struttura quanto alle coordinate comovedenti rimanga la stessa, si sceglie, cioè, di scrivere il dl^2 ad un tempo cosmico generico t come

$$dl_t^2 = -\mathcal{R}(t)^2 g_{ij}(t)dx^i dx^j \quad (6.8)$$

ossia la dipendenza dal tempo è tutta in un fattore, $\mathcal{R}(t)$ che si eleva al quadrato ad indicare che tale quantità la si sceglie positiva.

Si passa, ora, ad imporre l'altra ipotesi insita nel principio cosmologico, cioè che su ciascuna delle ipersuperfici ci sia isotropia rispetto ad un punto scelto -dopodiché si tratterà di controllare che necessariamente, per quanto si sta costruendo, se c'è isotropia rispetto ad un punto ci sarà isotropia rispetto a qualsiasi punto. In corrispondenza di ciò si scelgono coordinate opportune che sono quelle polari sferiche e la richiesta di isotropia si traduce nella richiesta che le componenti del tensore metrico dipendano solo da una coordinata radiale r -oltre che dal tempo- e non dalle coordinate angolari; in altre parole si impone che la metrica sia costante su tutte le ipersuperfici spaziali che circondano il punto privilegiato. Questo permette di scrivere la parte spaziale del ds^2 come

$$g_{ij}dx^i dx^j = g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (6.9)$$

dove $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ e l'unico elemento che rimane indeterminato è questo g_{rr} che, per quanto detto, sarà funzione solo di r .

Non si è però ancora esplicitato completamente il contenuto del principio cosmologico che asserisce che le sezioni spaziali a tempo cosmico costante sono spazi omogenei; ora, tutto ciò implica che siano spazi a *curvatura costante* - cioè per i quali lo scalare di curvatura $R = K$. Siamo qui nel caso di varietà tridimensionali a curvatura costante per le quali non è possibile ottenere una visualizzazione, ma, ovviamente, si tratterà di una generalizzazione di quelle bidimensionali.

Quali conseguenze seguono da questa assunzione?

Si tratta di calcolarsi il tensore di Riemann mettendoci dentro la metrica fino al punto in cui è stata determinata, il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura e imporre la sua uguaglianza a K . E, ovviamente, viene fuori qualcosa che riguarda il coefficiente g_{rr} (nulla che possa riguardare l' $\mathcal{R}(t)$ che è fissato su ciascuna ipersuperficie) e precisamente

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - Kr^2} \quad (6.10)$$

È possibile, a questo punto, effettuare una ricalibrazione e passare da (r, \mathcal{R}) a $(\tilde{r}, \tilde{\mathcal{R}})$; in questo modo si passa da K a k tale che se

$$\begin{aligned} K > 0 &\Rightarrow k = 1 \\ K = 0 &\Rightarrow k = 0 \\ K < 0 &\Rightarrow k = -1 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Siamo così giunti alla forma finale dell'elemento di linea di RW

$$ds^2 = dt^2 - \mathcal{R}(t)^2 \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (6.12)$$

$\mathcal{R}(t)$ è l' unica quantità fisicamente rilevante ancora da determinare.

Che tipo di elemento di linea danno i tre casi specifici?

Per $k = 0$ si ha

$$ds^2 = dt^2 - \mathcal{R}(t)^2 [dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad (6.13)$$

e l' espressione in parentesi quadra è l'elemento di linea di uno spazio euclideo 3-D piatto espresso in coordinate polari. Questo significa che ad un fissato istante di tempo cosmico lo spazio vero e proprio è appunto uno spazio 3-d piatto che andrà espandendosi secondo questo fattore $\mathcal{R}(t)$ che è una funzione crescente del tempo.

Per $k = 1$

$$ds^2 = dt^2 - \mathcal{R}(t)^2 \left[\frac{1}{1-r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (6.14)$$

se si pone $r = \sin \chi \Rightarrow 1 - r^2 = 1 - \sin \chi$, $dr^2 = \cos \chi d\chi$ si ottiene

$$ds^2 = dt^2 - \mathcal{R}(t)^2 [\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (6.15)$$

che è l'elemento di linea di una ipersfera descritta da tre coordinate opportune χ, θ, φ .

Se, invece, $k = -1$ la posizione da farsi è $r = \sinh \chi$, allora la parentesi quadra diventa

$$\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.16)$$

e, in questo caso si ha a che fare con l' elemento di linea di una pseudo-ipersfera tridimensionale.

Quindi, per concludere, si è approdati all'elemento di linea di R-W che inquadra le metriche possibili conformi con la validità del principio cosmologico e del principio di Weil.

Si è, però, ancora ad uno stadio pre-teorico, nel senso che non sono ancora coinvolte direttamente le equazioni del campo della relatività generale che dovranno dire cosa succede di $\mathcal{R}(t)$.

Equazioni di Friedmann

Per conoscere $\mathcal{R}(t)$ bisogna imporre alla metrica di R-W di essere soluzione delle equazioni di Einstein che si possono riscrivere in questo modo

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \equiv -8\pi GS_{\mu\nu} \quad (6.17)$$

Infatti, contraendo gli indici $\mu\nu$ nelle (1.4) si ottiene

$$R^\mu_\mu - \frac{1}{2}g^\mu_\mu R = -8\pi GT^\mu_\mu \quad (6.18)$$

dove $g_\mu^\mu = \delta_\mu^\mu = 4$ e R_μ^μ e

T_μ^μ sono, rispettivamente, le tracce R e T del tesore di Ricci (scalare di curvatura) e del tensore energia-impulso, per cui $-R = -8\pi GT$) e così si arriva alla forma (3.1).

Poiché T ha l' espressione valida per un fluido perfetto

$$T_{\mu\nu} = (p(t) + \rho(t)c^2)u_\mu u_\nu - p(t)g_{\mu\nu} \quad (6.19)$$

(in cui si è messo in risalto che la pressione e la densità, essendo funzioni scalari in uno spazio omogeneo e isotropo, possono dipendere solo dal tempo coordinato t), il *tensore sorgente* $S_{\mu\nu}$ si scriverà

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(p - \rho c^2)g_{\mu\nu} + (p + \rho c^2)u_\mu u_\nu \quad (6.20)$$

Svolgendo tutti i calcoli necessari (bisogna trovare tutti i coefficienti di connessione non nulli e inserirli nell' espressione per il tensore di Ricci) si trova che le uniche componenti del tensore di Ricci che sopravvivono sono:

$$R_{tt} = 3\frac{\ddot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \quad (6.21)$$

$$R_{rr} = -\frac{\mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} + 2\dot{\mathcal{R}}^2 + 2k}{1 - kr^2} \quad (6.22)$$

$$R_{\theta\theta} = r^2(\mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} + 2\dot{\mathcal{R}}^2 + 2k) \quad (6.23)$$

$$R_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta (\mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} + 2\dot{\mathcal{R}}^2 + 2k) \quad (6.24)$$

Quindi il tensore di Ricci è diagonale e questo risultato è legato all' invarianza rotazionale della metrica; le stesse condizioni che diagonalizzano la metrica diagonalizzano anche R . D'altra parte anche il tensore sorgente è diagonale

$$S_{tt} = \frac{1}{2}(\rho c^2 + 3p) \quad (6.25)$$

$$S_{rr} = \frac{1}{2}(\rho c^2 - p)\frac{\mathcal{R}^2}{1 - kr^2} \quad (6.26)$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{1}{2}(\rho c^2 - p)\mathcal{R}^2 r^2 \quad (6.27)$$

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}(\rho c^2 - p)\mathcal{R}^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (6.28)$$

Analizzando queste componenti si vede subito che esse non sono tutte linearmente indipendenti; precisamente le equazioni corrispondenti alle componenti rr , $\theta\theta$, $\phi\phi$ sono identiche; si ottengono così due sole equazioni

$$3\ddot{\mathcal{R}}^2 = -4\pi G(\rho c^2 + 3p)\mathcal{R} \quad (6.29)$$

$$\mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} + 2\dot{\mathcal{R}}^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)\mathcal{R}^2 \quad (6.30)$$

Appendice B

Equazioni differenziali del secondo ordine nel piano delle fasi

L'analisi ci insegna che poche equazioni differenziali hanno una soluzione esatta, o meglio, l'insieme delle equazioni differenziali risolubili analiticamente ha misura nulla, questo soprattutto a causa del fatto che le funzioni standard in termini delle quali si esprimono le soluzioni (polinomi, esponenziali, sin, cos, etc.) sono troppo poche per soddisfare la grande varietà di equazioni che si incontrano in pratica in fisica e, anche quando una soluzione può essere trovata, il metodo richiesto potrebbe essere molto complicato.

Può essere allora utile lo studio qualitativo delle equazioni che ne risultano, attraverso il quale si deducono caratteristiche importanti delle soluzioni senza risolverle effettivamente. Si introduce uno strumento geometrico, il *piano delle fasi*, con cui studiare l'equilibrio, la stabilità, la periodicità etc. delle soluzioni.

Se

$$\ddot{x} = f(x) \quad (6.31)$$

è una generica equazione differenziale del secondo ordine, introducendo una nuova variabile, y , definita da

$$\dot{x} = y \quad (6.32)$$

in modo che

$$\dot{y} = f(x, y) \quad (6.33)$$

si ottiene un sistema di equazioni del primo ordine equivalenti. A questo punto si può considerare un sistema di assi cartesiani, x e y , chiamato appunto piano delle fasi. Lo stato del sistema al tempo t_0 è determinato dalla coppia $(x(t_0), y(t_0))$ che costituisce anche una coppia di condizioni iniziali per l'equazione originaria o per le due equazioni equivalenti, e perciò determina tutti gli stati successivi attraverso cui passa il sistema. La successione

di stati, data parametricamente da

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad (6.34)$$

traccia una curva che passa per il punto $P : (x(t_0), y(t_0))$ e che è chiamata *traiettoria* o *orbita*.

La direzione che deve essere assegnata alla traiettoria si ottiene dalla relazione $\dot{x} = y$: quando $y > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0$, cioè x cresce col tempo e quando $y < 0 \Rightarrow \dot{x} < 0$, perciò la direzione è da sinistra a destra nel semipiano delle y positive e da destra a sinistra nel semipiano inferiore.

Per ottenere una relazione fra x e y che definisca un'orbita si può eliminare il parametro t scrivendo

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} \quad (6.35)$$

e l'equazione per le traiettorie diventa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y} \quad (6.36)$$

I punti di equilibrio corrispondono a soluzioni costanti dell'equazione iniziale o delle due equivalenti, ossia

$$x = \text{cost} \quad y = \text{cost} \quad (6.37)$$

che avviene quando \dot{x} e \dot{y} sono simultaneamente uguali a zero, e saranno quindi dei punti sull'asse x in cui $f(x, 0) = 0$.

Un punto di equilibrio circondato da traiettorie chiuse è chiamato *centro*. Un centro è un punto di equilibrio stabile. Se, invece, le orbite nelle sue vicinanze sono aperte il punto è chiamato punto *a sella*. Tale punto è instabile dato che un piccolo spostamento dallo stato di equilibrio porta il sistema su una traiettoria che lo conduce lontano dall'equilibrio stesso.

Quando $f(x)$ è non lineare, l'analisi delle soluzioni della (2.1) è facilitata se si considera un sistema meccanico avente la stessa equazione del moto. Se $x(t)$ rappresenta una soluzione particolare della (2.1), quando la particella P si sposta dal punto x al punto $x + \delta x$, il lavoro δW compiuto da $f(x)$ su P è dato da

$$\delta W = f(x)\delta x \quad (6.38)$$

Questo lavoro va ad incrementare l'energia cinetica T della particella, dove $T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$

$$\delta T = \delta W = f(x)\delta x. \quad (6.39)$$

Dividendo per δx e mandando $\delta x \rightarrow 0$ si ottiene

$$\frac{dT}{dx} = f(x). \quad (6.40)$$

Definiamo ora la funzione $V(x)$ secondo la relazione

$$\frac{dV}{dx} = -f(x). \quad (6.41)$$

dove $V(x)$ è chiamato *potenziale*. In particolare

$$V(x) = - \int f(x) dx \quad (6.42)$$

Ovviamente gli integrali indefiniti implicano una costante arbitraria: ogni costante può essere scelta per convenienza ma è necessario adattarla al problema in modo che $V(x)$ abbia un significato definito.

Dalle (2.2) e (2.3) si ottiene

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0 \quad (6.43)$$

quindi durante il moto

$$T + V = \text{costante} \quad (6.44)$$

o, esplicitamente

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int f(x) dx = C, \quad (6.45)$$

dove C è un parametro che dipende dal moto e dal potenziale che è stato scelto. Considerando tutti i possibili valori di C consistenti con valori reali di \dot{x} vengono considerati tutti i possibili moti.

In base all'equazione (2.5) i sistemi governati dall'equazione $\ddot{x} = f(x)$ sono chiamati *sistemi conservativi*. Dalla (2.6) si ottiene

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(C - V(x))} \quad (6.46)$$

che è l'equazione algebrica delle orbite.

I punti di equilibrio si avranno quindi quando

$$y = 0, \quad \frac{dV}{dx} = 0. \quad (6.47)$$

I valori di x ottenuti sono quelli in cui $V(x)$ ha un minimo, un massimo o un flesso che generano rispettivamente un centro, un punto a sella, una cuspide.

Equazioni non lineari

Considerare una forza che dipende anche dalla velocità equivale a considerare una forza di frizione che può essere positiva o negativa, e che, di conseguenza, genererà un guadagno o una perdita di energia nel sistema che non sarà più conservativo.

La nostra equazione è quindi del tipo

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (6.48)$$

dove f è una funzione in genere non lineare che possiamo anche scrivere come

$$f(x, \dot{x}) = -h(x, \dot{x}) - g(x) \quad (6.49)$$

in modo che l'equazione differenziale diventi

$$\ddot{x} + g(x) = -h(x, \dot{x}) \quad (6.50)$$

e le due equazioni del primo ordine ad essa associate

$$\dot{x} = y \dot{y} = -h(x, y) - g(x) \quad (6.51)$$

Dunque il nostro sistema può essere interpretato come un sistema conservativo sottoposto ad una forza aggiuntiva $h(x, y)$ che fornisce o assorbe energia.

Per il sistema conservativo è ovviamente possibile definire un potenziale associato al termine g dato da

$$V(x) = \int g(x) dx \quad (6.52)$$

l'energia totale del sistema conservativo è dunque data da

$$E = T + V = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int g(x) dx \quad (6.53)$$

Sotto l'influenza della forza di frizione l'energia totale non è più conservata e la sua variazione nell'unità di tempo risulta

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x} \ddot{x} + g(x) \dot{x} = \dot{x}(-g(x) - h(x, \dot{x}) + g(x)) = -\dot{x} h(x, \dot{x}) \quad (6.54)$$

ovvero, nel piano delle fasi,

$$\frac{dE}{dt} = -y h(x, y) \quad (6.55)$$

Si supponga ora che, in una qualche regione del piano delle fasi che contiene un punto di equilibrio $\frac{dE}{dt} < 0$ e si consideri una qualche traiettoria che, dopo un certo istante t_0 , giaccia in questa regione per ogni $t > t_0$; allora l'effetto di h sarà quello di uno smorzamento. In tal caso l'energia decrescerà continuamente lungo quest'orbita e ci aspettiamo che questa raggiunga il punto di equilibrio. Se invece $\frac{dE}{dt} > 0$, l'energia crescerà fin quando la traiettoria rimarrà nella regione considerata, cioè h in questo secondo caso ha l'effetto di fornire energia al sistema che tenderà così ad allontanarsi da quella regione.

In un sistema non lineare possono essere presenti regioni di entrambi i tipi; sul confine tra una zona e l'altra si avrà, per continuità, $yh(x, y) = 0$ e, se questa fosse un'orbita, percorrendola l'energia del punto rimane costante. Nel caso in cui questa orbita sia chiusa e isolata -nel senso che non ci sono altre traiettorie chiuse nelle sue immediate vicinanze- l'orbita viene chiamata *ciclo limite*. Un ciclo limite può essere stabile nel caso in cui se il sistema è perturbato dal suo stato di oscillazione la nuova orbita risultante tende a riattrarlo verso il ciclo limite. Esistono anche cicli limite instabili quando le traiettorie sono respinte dal ciclo limite.

Appendice C

Listato del programma per l'integrazione delle equazioni differenziali

Program COSMOTEST

```
Implicit Real*8 (A-H,O-Z)
Parameter (nmax=3, nstpmax=50000)
Dimension xx(nstpmax), vstart(3), y(3,nstpmax),x(nstpmax)
Dimension P(nstpmax),C(nstpmax),E(nstpmax),rho(nstpmax)
Common /path/ xx,y

C-----costanti fisiche e numeriche
pigr=3.14159265d0
sqt=sqrt(2.d0)
grav=6.67d-8
clight=2.99792d10
C-----costanti di scala
tH=4.73d17      !eta' attuale dell'Universo in secondi
rhon=1.d-29 !densita' di scala
rn=clight*tH
ak=(4.*pigr*grav*rhon*tH**2)/3.
print *, 'tH(s)=' ,tH, '    rhon(g/cm^3)=' ,rhon, '    rn(cm)=' ,rn
print *, 'k=' ,ak
print *, 'input ti/tH'
read *, taui
```

```

vn=clight
C-----costanti per l'integrazione numerica
nstep=10000      !n.ro max. time step per ogni intervallo temporale
nvar=3

epsE0=1.d-3

C Condizioni iniziali
C r0=R(0)/Rn=vstart(1)
C v0=V(0)*tn/Rn=vstart(2)
C z(0)=vstart(3)
C z=ln [(rho/rhon)*(R^3/Rn^3)]

      print *, 'input R(0)/Rn, V(0)/Vn, Z(0)'
      read *,r0,v0,z0
      rhoi=exp(z0)/(r0**3)
      print *, 'rhoi/rhon=',rhoi
      tf=1.d0

C-----calcolo dell'energia iniziale
c    vc=10000.
c      amu0=v0**2/(vc**2+v0**2)
      amu=0.
      E0=(v0**2)/2-ak*exp(z0)*(1.d0+amu)/r0
      print*, 'E0=',E0

      if (E0.lt.-epsE0) then
          rmax=(exp(z0)*(1.d0+amu))/abs(E0)
          x0=r0*abs(E0)/(exp(z0)*(1.d0+amu))
          radn=(rmax*abs(E0))/(exp(z0)*(1.d0+amu))
          sradn=sqrt(radn)
          tff=(asin(sradn)-sradn*sqrt(1.d0-radn)-
@           asin(sqrt(x0))+sqrt(x0)*sqrt(1.d0-x0))/
```

```

@      (sqrt*(abs(E0)**1.5)/(exp(z0)*(1.d0+amu)))+tau_i
      if (tff.lt.tf) then tf=2.*tff
end if

C inizio integrazione numerica

vstart(1)=r0
vstart(2)=v0
vstart(3)=z0

call rk4dumb (vstart,nvar,tau_i,tf,nstep)

C-----Test1: conservazione energia
do j=1,nstep
  amu=y(2,j)**2/(vc**2+y(2,j)**2)
  C(j)=ak*exp(y(3,j))*(1.d0+amu)
  E(j)=(y(2,j)**2)/2.-C(j)/(y(1,j))
end do

C-----Test2: soluzione r=r(t)

C-----nel caso di energia zero
if (abs(E0).le.epsE0) then
  do j=1,nstep
    P(j)=y(1,j)-(1.5*sqrt(2.*C(j))*(xx(j)-tau_i)+r0**1.5)**0.67
  end do

C-----energia positiva
else if (E0.gt.epsE0) then
  do j=1,nstep
    x0=r0*E0/C(j)
    radn=(y(1,j)*E0)/C(j)
    sradn=sqrt(radn)
    P(j)=sradn*sqrt(1.d0+radn)-log(sradn+sqrt(1.+radn))-
```



```

Parameter (nmax=3,nstpm=50000)
Dimension vstart(nvar),v(nvar),xx(50000),y(3,50000)
External derivs
Common /path/xx,y
do 11 i=1,nvar
    v(i)=vstart(i)
    y(i,1)=v(i)
11    continue
xx(1)=x1
x=x1
h=(x2-x1)/dble(nstep)
do 13 k=1,nstep

    call derivs(x,v,dv)
        call rk4(v,dv,nvar,x,h,v)
        if(x+h.eq.x)pause 'stepsize not significant in rkdumb'
        x=x+h
        xx(k+1)=x
        do 12 i=1,nvar
            y(i,k+1)=v(i)
12    continue

13    continue

return
end
C-----
Subroutine rk4(y,dydx,n,x,h,yout)
Implicit Real*8 (A-H,O-Z)
Parameter (nmax=3)
Dimension dydx(n),y(n),yout(n)
External derivs

```

```

Dimension dym(nmax),dyt(nmax),yt(nmax)

hh=h*0.5
h6=h/6.0d0
xh=x+hh
do 11 i=1,n
    yt(i)=y(i)+hh*dydx(i)
11    continue
    call derivs(xh,yt,dyt)
    do 12 i=1,n
        yt(i)=y(i)+hh*dyt(i)
12    continue
    call derivs(xh,yt,dym)
    do 13 i=1,n
        yt(i)=y(i)+h*dym(i)
        dym(i)=dyt(i)+dym(i)
13    continue
    call derivs(x+h,yt,dyt)
    do 14 i=1,n
        yout(i)=y(i)+h6*(dydx(i)+dyt(i)+2.*dym(i))
14    continue
    return
end

```

C=====EQUAZIONI ADIMENSIONALI DA INTEGRARE

```

Subroutine derivs(x,v,dv)
Implicit real*8 (A-H,O-Z)
Parameter (nmax=3)
Dimension v(nmax),dv(nmax)

```

C Integro il seguente sistema di eq differenziali:
C $d^2R/d\tau^2 = -[1+\mu] \cdot e^Z / R^{**2}$

```

C dZ/dtau=-mu*dotR]/R
C v(1)=R
C v(2)=dotR
c v(3)=Z
c     vc=10000.
c         amu=v(2)**2/(vc**2+v(2)**2)
amu=0
pigr=3.14159265d0
grav=6.67d-8
rhon=1.d-29
tH=4.73d17
ak=(4.*pigr*grav*rhon*tH**2)/3.
dv(1)=v(2)
dv(2)=-ak*exp(v(3))*(1.d0+amu)/(v(1)**2)
dv(3)=-(amu*v(2))/v(1)

return
end

```

La routine di integrazione implementata nel programma *cosmotest* è stata testata con l'equazione del moto per un oscillatore armonico classico

$$\ddot{x} = -x.$$

Operando la sostituzione

$$x = A \cos \omega t \quad \Rightarrow \dot{x} = -A\omega \sin \omega t \quad \Rightarrow \ddot{x} = -A\omega^2 \cos \omega t$$

si ricava subito $\omega = 1$ e quindi $x = A \cos t$.

Passando all'energia otteniamo

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} = E_0$$

da cui si vede che l'energia totale del moto si conserva. Operando la sostituzione precedente si ha inoltre

$$A = \sqrt{E_0}$$

I risultati del test sono mostrati in figura (6.1), in cui si può notare come l'energia è conservata e l'andamento della coordinata x e della velocità seguano il coseno e il seno di t .

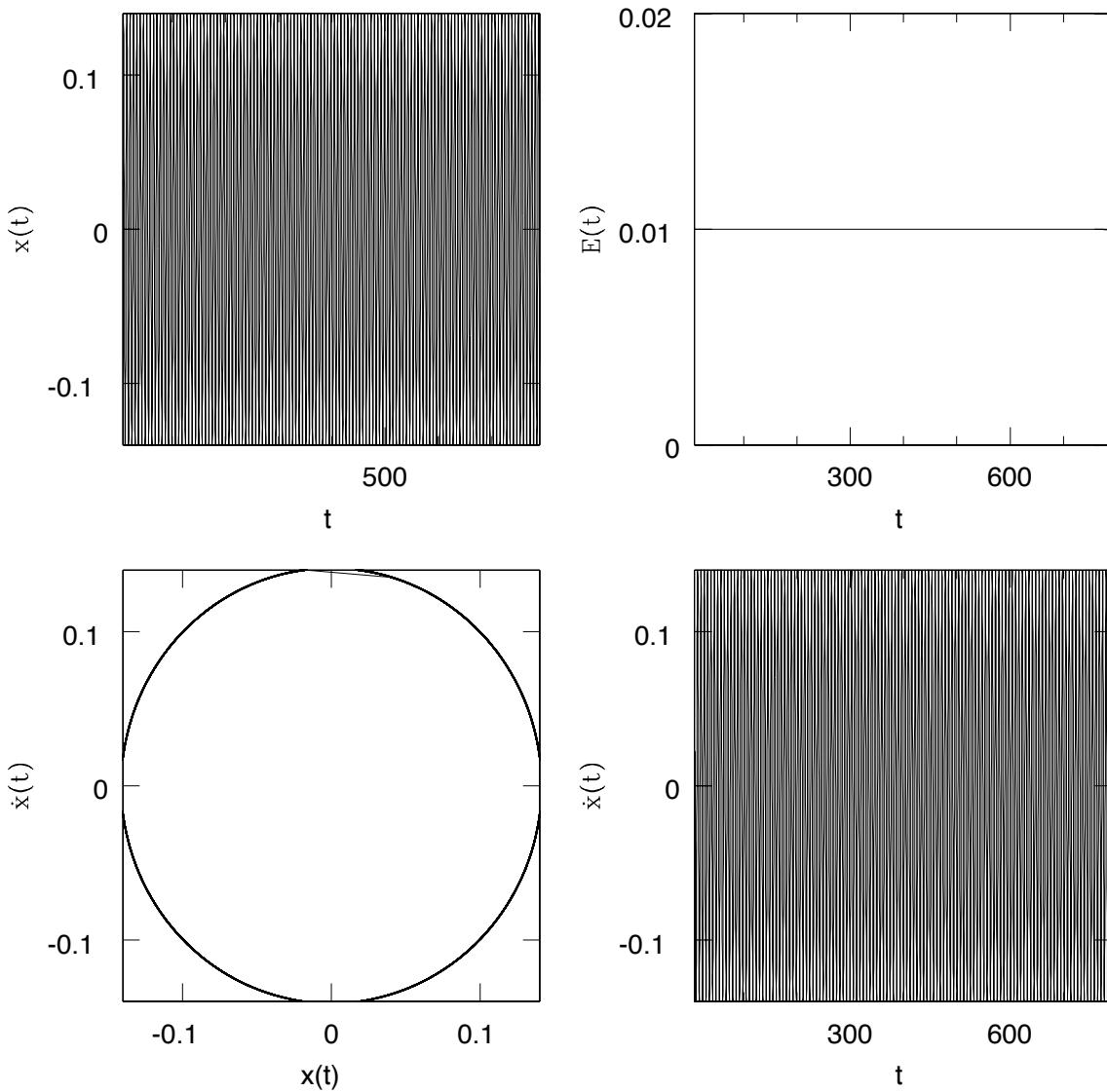


Figura 6.1: Evoluzione temporale della coordinata spaziale, dell'energia e della velocità e spazio delle fasi (in basso a sinistra) per un oscillatore armonico classico.

Appendice D

Listato del programma per il calcolo della distanza di luminosità

```
PROGRAM DISLUM

REAL OMEGAK,OMEGA(5),DL,DL1(1000),DL2(1000),DL3(1000),
*      Z(1000),W(5),Zmin,Zmax,Zstep,ldl,omtot
INTEGER N,K,NZ,NZ1
PARAMETER (C=299792.458,H0=70)

      write (6,21)
21 FORMAT
@ (' Quante sono le componenti della densita' di energia? ')
      READ *, N

      write (6,13)
13 FORMAT (' INSERIRE I LORO VALORI ')
      READ *, (OMEGA(I),I=1,N)

      WRITE (6,*) (OMEGA(I),I=1,N)

      write (6,15)
15 FORMAT (' INSERIRE I VALORI DI W ')
```

```

READ *, (W(I),I=1,N)

WRITE (6,16)
16 FORMAT (' INSERIRE Zmax, Zstep ')
READ *, Zmax, Zstep

Zmin=0.0
cHO=C/HO
omtot=0.
do i=1,N
omtot=omtot+omega(i)
end do
omegak=1.-omtot
write (6,*) ' test 1 ,

K=0
ZZ=Zmin
DO While (ZZ.le.Zmax)
  K=K+1
  DL1(K)=0.
  Z(K)=ZZ
  ZZ=ZZ+Zstep
  write (6,*) K, Z(K)
END DO
NZ=K

write (6,*) ' end test ,

IF (OMtot.EQ.1.) GOTO 1
IF (OMtot.LT.1.) GOTO 3
IF (OMtot.GT.1.) GOTO 2

```

```

1 DL1(1)=0.0
NZ1=NZ-1
DO K=1,NZ1
K1=1+K
CALL DisLum(Omegak,Omega,W,0,Z(K1),n,DL)
DL=cH0*DL*(1+z(K1))
ldl=5.*log10(DL)
open (unit=8, file='cosmotest.dat', status='unknown')
write (8,50) z(k1),ldl
50 format (1x,f4.2,3x,f6.3)
END DO
GOTO 6

2 DL2(1)=0.0
NZ1=NZ-1
DO K=1,NZ1
K1=K+1
CALL DisLum(Omegak,Omega,W,0,Z(K1),n,DL)
absomegak=ABS(OMEGAk)
DL=CHO*(1/SQRT(absomegak))*SIN(SQRT(absomegak)*DL)*(1+Z(K1))
ldl=5.*log10(DL)
open (unit=8, file='cosmotest.dat', status='unknown')
write (8,60) z(k1),ldl
60 format (1x,f4.2,3x,f6.3)
END DO
GOTO 6

3 DL3(1)=0.0
NZ1=NZ-1
DO K=1,NZ1

```

```

K1=K+1
CALL DisLum(Omegak, Omega, W, 0, Z(K1), n, DL)
ABSOMEGAk=ABS(OMEGAk)
DL=CHO*(1/SQRT(ABSOMEGAk))*SINH(SQRT(ABSOMEGAk)*DL)*(1+Z(K))
1dl=5.*log10(DL)
open (unit=8, file='cosmotest.dat', status='unknown')
write (8,70) z(k1),1DL
70 format (1x,f4.2,3x,f6.3)
END DO
GOTO 6

6 STOP
END

```

```

Subroutine DisLum (Omegak, Omega, W, Z1, Z2, n, DL)
c calcolo dell' integrale della funzione esterna Ez tra X=Z1 e X=Z2
C usando la regola di Simpson con n intervalli (n deve essere pari)

INTEGER I,K,N
REAL Ez,X,H,SOMP, SOMP,DIS,Z1,Z2,DL
REAL OMEGA(N),W(N),Omegak
EXTERNAL Ez

c calcolo della dimensione dell'intervallino

Nstep=Z2*1000
H=(Z2-Z1)/Nstep

c write (6,*) ' H ', H
DLO=Ez(Z1,N,OMEGAk,OMEGA,W)
DL1=Ez(Z2,N,OMEGAk,OMEGA,W)

```

c somme dei termini pari e dispari

```
X=H+Z1
SOMDIS=Ez(X,N,OMEGAk,OMEGA,W)
SOMPARI=0.0
DO 10, I=2,Nstep-2,2
  X=X+H
  EZVAL=Ez(X,N,OMEGAk,OMEGA,W)
  SOMPARI=SOMPARI+Ez(X,N,OMEGAk,OMEGA,W)
  X=X+H
  SOMDIS=SOMDIS+Ez(X,N,OMEGAk,OMEGA,W)
10  CONTINUE
```

c calcolo dell'approssimazione

```
DL=(DL0+4.0*SOMDIS+2.0*SOMPARI+DL1)*H/3.0
```

```
RETURN
END
```

```
REAL FUNCTION Ez(X,N,OMEGAk,OMEGA,W)
INTEGER I,N
REAL X,OMEGAk,OMEGA(N),W(N)
absomegak=ABS(OMEGAk)
A=absomegak*((1+X)**2)
B=0.
DO I=1,N
  IF (W(I).eq.-1.) THEN
    B=B+OMEGA(I)
  ELSE
```

```
B=B+OMEGA(I)*((1.+X)**(3*(1.+W(I))))  
END IF  
END DO  
D=SQRT(A+B)  
EZ=1./D  
RETURN  
END
```


Ringraziamenti

È giunta.

finalmente?.. purtroppo?.. Avverbio superfluo...ansietà dell'istante presente l'uno, nostalgia preannunciata il secondo...

Tra smania di grida, angoscia incalzante, galoppo di tormento sospinto all'alba del divenire, il primo pensiero colmo di gratitudine si dipiega su coloro che, con un'inesprimibile, paziente serenità hanno fatto sì che i miei occhi, offuscati da un pessimismo diffidente e dubioso, percepissero l'ambita meta appressarsi di giorno in giorno, di ora in ora, di attimo in attimo...Luca: vivacità intellettuale (...non solo in argomentazioni astrofisiche), sensibilità e accesa passione per la ricerca...Alberto: completa disponibilità all'ascolto e insostituibile faro nella tempesta.

No, non dimentico il prof. Bonoli, saggio dispensatore di preziosi consigli.

...mamma e papà...

Nel silenzio, a tutti voi che silenziosamente avete creduto in me...

Bibliografia

- Bharat Ratra & Peebles P.J.E., 1998, Ph.Rev., 37, 3406
- Carroll S.M., 2000, *The Cosmological Constant*, astro-ph/0004075
- Cappi A., 2001, *Appunti di Cosmologia*, Osservatorio Astronomico di Bologna
- Cappi A., 2001, *Testing Cosmological Models with Negative Pressure*, Osservatorio Astronomico di Bologna
- Carroll S.M. & Press W.H., 1992, A&A Rev, 30, 499
- Hossain G.M. & Majumdar P., 2002, gr-qc/0206026 v2
- Jordan D.W. & Smith P. ,1998, *Non Linear Ordinary Differential Equations (An introduction to Dynamical Systems)*, Oxford University Press
- Leibudgut B., 2001, A&A Rev, 39, 67
- Leibudgut B., 2000, A&A Rev, 10, 179
- Lucchin F., 1990, *Introduzione alla Cosmologia*, Zanichelli
- Mortsell E., Gunnarson C., Goobar A., 2001, Ap.J, 561, 106
- Mortsell E. & Hannestad S., 2002, astro-ph/0205096
- Ozer M., 1999, Ap.J, 520, 45
- Peebles P.J.E., 1996, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press
- Peebles P.J.E. & Bharat Ratra, 1988, ApJ, 325, L17
- Perlmutter S. et al., 1997, Ap.J., 483, 565

- Perlmutter S. et al., 1999, Ap.J., 517, 565
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., 1992, *Numerical Recipes in Fortran (The art of Scientific Computing)*, Cambridge University Press
- Riess A.G. et al., 2001, Ap.J., 560, 49
- Riess A.G. et al., 1998, Ap.J., 116, 1009
- Schmidt B.P. et al., 1998, Ap.J., 507, 46
- Spergel D.N. & Starkman G.D., 2002, astro-ph/0204089
- Weinberg S., 1972, *Gravitation and Cosmology: Principle and Applications of the General Theory of Relativity*, New York: Wiley