

**Alma Mater Studiorum - Università di Bologna**

---

**FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI**

**Corso di Laurea in Astronomia**

**Materia di Tesi: Astrofisica**

**ACCRESCIMENTO DI BONDI  
CON PRESSIONE DI RADIAZIONE**

**Tesi di Laurea di:  
NICOLETTA COPPOLA**

**Relatore:  
Prof. LUCA CIOTTI**

**Correlatore:  
Dott.ssa SILVIA PELLEGRINI**

---

**Sessione I**

---

**Anno Accademico 2006 – 2007**

**Alma Mater Studiorum - Università di Bologna**

---

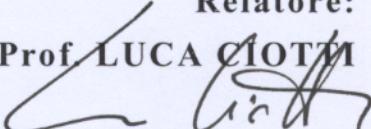
**FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI**

**Corso di Laurea in Astronomia**

**Materia di Tesi: Astrofisica**

**ACCRESCIMENTO DI BONDI  
CON PRESSIONE DI RADIAZIONE**

**Tesi di Laurea di:**  
**NICOLETTA COPPOLA**

**Relatore:**  
**Prof. LUCA CIOTTI**  
  
**Correlatore:**

**Dott.ssa SILVIA PELLEGRINI**

---

**Sessione III**

---

**Anno Accademico 2006 – 2007**

*“....con la tua parola hai fatto l'universo e con  
la tua sapienza hai formato l'uomo....*

*....timidi sono i ragionamenti dei mortali e  
incerti i nostri pensieri.....”*

*...a stento indoviniamo le cose terrene e con  
fatica comprendiamo quelle che sono a  
portata di mano; ma chi potrà scoprire le cose  
celesti?*

*....con te è la sapienza, che conosce le tue  
opere, che era presente quando facevi il  
mondo.....”*

(Sap, 9)

Dedico a Te.

## INDICE

<i>Capitolo 1.</i>	<b>INTRODUZIONE.....</b>	1
1.1	Problema astrofisico .....	2
1.2	Principali modelli di accrescimento .....	4
1.3	Il lavoro di Tesi.....	8
<i>Capitolo 2.</i>	<b>ACCRESCIMENTO DI BONDI CLASSICO E LIMITI DI EDDINGTON .....</b>	11
2.1	Accrescimento di Bondi classico.....	12
2.1.1	Ipotesi del modello .....	12
2.1.2	Equazioni fondamentali.....	12
2.1.3	Normalizzazione delle equazioni.....	15
2.1.4	Procedura risolutiva .....	16
2.1.5	Studio asintotico.....	18
2.1.6	Limite sul parametro $\lambda$ .....	20
2.1.7	Soluzione completa.....	22
2.2	Limite di Eddington .....	27
2.2.1	Luminosità di accrescimento.....	27
2.2.2	Interazione radiazione – materia.....	28
2.2.3	Limite di Eddington .....	30
2.2.4	Ipotesi di Lavoro.....	31
<i>Capitolo 3.</i>	<b>ACCRESCIMENTO DI BONDI CON FEEDBACK RADIATTIVO .....</b>	33
3.1	Ipotesi aggiuntive .....	34
3.2	Equazioni fondamentali rivisitate.....	35
3.3	Normalizzazione delle equazioni.....	36
3.4	Procedura risolutiva .....	37

3.5	Autovalore vero .....	38
3.6	Studio asintotico.....	39
<i>Capitolo 4.</i>	<b>RISULTATI .....</b>	<b>43</b>
4.1	Studio dell'autovalore.....	44
4.2	Conseguenze sul tasso di accrescimento di un SMBH.....	48
<i>Capitolo 5.</i>	<b>CONCLUSIONI.....</b>	<b>51</b>
5.1	Considerazioni finali.....	52
	<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>55</b>

## **Capitolo 1**

### **INTRODUZIONE**

In questo primo capitolo viene presentato il problema affrontato nella Tesi e viene data una breve descrizione dell'importanza che esso riveste in astrofisica (Sezione 1.1). Verrà poi esposta la sintesi dei risultati degli studi precedenti (Sezione 1.2) e del lavoro specifico di questa Tesi (Sezione 1.3).

## 1.1 Il problema astrofisico

L'accrescimento di materia su un oggetto compatto è uno dei processi di maggior interesse in astrofisica. Tale fenomeno, infatti, è in grado di generare un'enorme quantità di energia, che viene estratta dal campo gravitazionale attraverso vari fenomeni di termalizzazione del materiale in caduta.

Nonostante questo processo si verifichi per un'ampia varietà di sistemi galattici ed extra-galattici aventi le più svariate caratteristiche, sarà nostro interesse prendere in considerazione solo SMBH (buchi neri supermassicci) aventi masse dell'ordine di  $M_{BH} \sim 10^6 \div 10^9 M_\odot$ , dove  $M_\odot \sim 1.989 \times 10^{33}$  g è la massa del Sole.

In questo contesto, si ritiene (da studi, ad esempio nell'astronomia X) che manifestazioni di accrescimento su SMBH posti nelle regioni centrali di galassie *early-type* (Ellittiche ed S0), siano i principali "motori" energetici di QSO (quasar) e dei loro parenti più deboli, gli AGN (Active Galactic Nuclei) (es. Rees 1984).

Sebbene non vi sia ancora una prova osservativa diretta dell'esistenza dei buchi neri, questi oggetti, "previsti" dalla teoria della *Relatività Generale* di Einstein (1916), continuano ad essere i maggior candidati per gli effetti dinamici rilevati sulla materia ad essi circostante. Sono gli unici, infatti, a possedere le caratteristiche richieste dal fenomeno quasar, ossia piccole dimensioni (inferiori a un anno luce) e un'enorme emissione di energia ( $L_{QSO} \sim 10^{46}$  erg sec<sup>-1</sup>  $\sim 10^{12} L_\odot$ , dove  $L_\odot \sim 4 \times 10^{33}$  erg sec<sup>-1</sup> è la luminosità bolometrica del Sole).

Vi è inoltre un altro aspetto importante che riguarda i buchi neri supermassicci: la presenza nelle regioni galattiche centrali di un SMBH si è rivelata essere strettamente legata a molte proprietà della stessa galassia ospite.

Per esempio, osservazioni hanno mostrato chiara evidenza che la massa di un buco nero supermassiccio centrale è strettamente correlata sia alla massa stellare del *bulge* della galassia a spirale o dell'intera galassia ellittica,  $M_*$ , (Magorrian *et al.* 1998, McLure & Dunlop 2002 e Marconi & Hunt 2003), secondo la legge

$$M_{BH} \cong 10^{-3} M_* , \quad (1.1)$$

sia, e in misura maggiore, alla dispersione di velocità  $\sigma$  delle stelle della componente sferoidale della stessa galassia (o del *bulge*, nel caso di galassia a

spirale, Ferrarese & Merritt 2000, Gebhardt et al. 2000 e Tremaine et al. 2002), da cui abbiamo

$$M_{BH} \propto \sigma^\alpha \quad \text{dove} \quad \alpha = 4.0 \pm 0.3 . \quad (1.2)$$

La prima relazione riflette chiaramente il legame tra l'attività nucleare e l'attività di formazione stellare dello sferoide, ed insieme alla relazione (1.2) porta in primo piano il ruolo fondamentale rivestito dai buchi neri centrali nel processo di mutua evoluzione SMBH - galassia, rendendo in definitiva di grande interesse lo studio dei processi di accrescimento anche negli studi di formazione galattica.

In questo scenario il feedback radiativo<sup>1</sup> prodotto dall'attività nucleare gioca un ruolo importante.

Anche se l'origine delle correlazioni appena citate non è stata ancora accertata, lavori recenti portano a supporre, con consenso generale, che i processi di interazione tra materia e radiazione nelle regioni galattiche centrali, ad opera di un SMBH, siano il punto chiave verso cui indirizzare le ricerche. Il buco nero infatti può interagire con l'ambiente circostante tramite il suo feedback in un processo di autoregolazione, da cui la mutua evoluzione SMBH - galassia (es. Binney & Tabor 1995, Ciotti & Ostriker 1997, 2001, 2007, Sazonov, Ostriker, Ciotti & Sunyaev 2005 e Xu & Wu 2007).

Una trattazione fisicamente consistente del problema dell'accrescimento con feedback, risulta essere però estremamente difficoltosa e richiede quindi uno studio semplificato di tale fenomeno.

Il modello di accrescimento più famoso è la 'Bondi Accretion' (Bondi 1952) che descrive in termini puramente idrodinamici il processo di accrescimento su un oggetto compatto secondo geometria sferica (si veda prossimo paragrafo).

In riferimento a quanto descritto finora, tale Teoria presenta un aspetto lasciato in sospeso: nel derivare la quantità di materia accresciuta nell'unità di tempo dal SMBH,  $\dot{M}_B$ , viene trascurata l'interazione tra la radiazione, emessa in seguito all'accrescimento, ed il gas circostante, ossia il feedback; il che è infatti in disaccordo con quanto ricavato nell'ambito di una trattazione più complessa, che, come vedremo in dettaglio nel lavoro di Tesi porta a un  $\dot{M}$  caratteristico, che in condizioni di stazionarietà, quali sono quelle del modello di Bondi, non può essere superato.

<sup>1</sup> Con il termine **feedback radiativo** si identifica l'insieme dei processi a catena che si instaurano tra un SMBH e la materia che lo circonda, dando luogo a trasferimento di energia al mezzo circostante il SMBH.

Precedentemente, Fukue (2001), con lo scopo di affrontare tale problematica, ha elaborato una trattazione non rigorosa del modello di Bondi con feedback radiativo. In questo lavoro svilupperemo tale tema secondo metodologie rigorose.

## 1.2 Principali modelli di accrescimento

Come abbiamo appena visto, lo studio dei processi di accrescimento su SMBH ha rivestito, nel corso degli ultimi anni, un ruolo sempre più rilevante in ambito astronomico. Prima di soffermarci però sul panorama della modellistica esistente a riguardo, ricordiamo molto sommariamente<sup>2</sup> alcune caratteristiche generali dei buchi neri, quali sorgenti di energia, senza sviluppare la Teoria fisica che è basata sulla Relatività Generale, ed è al di fuori dei nostri scopi.

La caratteristica primaria di un buco nero non ruotante (come quelli da noi considerati) è l'*orizzonte degli eventi*, ossia la superficie definita da un raggio caratteristico, detto *di Schwarzschild*, in corrispondenza del quale ogni radiazione emessa subisce uno spostamento Doppler gravitazionale infinito; in altri termini, tutto ciò che finisce dentro tale raggio non può più fuggire dal campo di gravità del SMBH. Si definisce poi l'energia liberata dall'accrescimento di materia ad un tasso  $\dot{M}$  su un buco nero come

$$L_{BH} = \epsilon \dot{M} c^2 = f L_{Edd} \quad (1.3)$$

dove  $c$  è la velocità della luce,  $\epsilon$  è l'efficienza con cui viene prodotta energia radiativa dal processo,  $f$  è una costante che dipende dal tipo di accrescimento considerato, ed infine  $L_{Edd}$  è il *limite di Eddington* corrispondente alla massa  $M_{BH}$ .

Quest'ultima grandezza fisica si riferisce a una situazione di equilibrio, in cui la pressione di radiazione, ossia la pressione esercitata dai fotoni emessi durante l'accrescimento sulle particelle di materia, controbilancia la forza di gravità e può essere superata se l'accrescimento non è a simmetria sferica.

---

<sup>2</sup> La trattazione fisica del processo di accrescimento sarà ripresa più dettagliatamente nello svolgimento della Tesi.

La fisica di base applicata alle interazioni tra materia e SMBH sarà ripresa più dettagliatamente nella trattazione radiativa del problema dell'accrescimento in questo lavoro di tesi.

Diamo ora una breve descrizione dei principali modelli di accrescimento esistenti sviluppati a partire da quello di Bondi, che introduciamo di seguito.

### **Bondi Accretion** (Bondi 1952)

E' il modello più semplice riguardo lo studio del problema dell'accrescimento. Si assume, per il fluido in caduta verso l'oggetto centrale, un moto stazionario e simmetricamente sferico. Il gas all'infinito è a riposo, segue una legge di gas perfetto e le trasformazioni sono politropiche. La dinamica è Newtoniana.

I risultati di questo lavoro portano a considerare che il caso fisicamente più probabile è quello avente massimo tasso di accrescimento (limite critico stimato nel modello) e che soluzioni transoniche si hanno solo per questo valore (si veda Sezione 2.1 per maggiori dettagli).

In questa 'semplice' trattazione puramente idrodinamica non vengono considerati molti aspetti importanti, quali: il momento angolare della materia in accrescimento, il campo magnetico dell'oggetto centrale, gli effetti relativistici e quelli della radiazione generata durante tale fenomeno. Quest'ultimi saranno oggetto della nostra indagine.

### **Modelli con dischi di accrescimento**

Viene studiato il problema in presenza di momento angolare. La distribuzione di gas sottoposta al campo gravitazionale del SMBH si dispone preferenzialmente lungo il piano perpendicolare all'asse di rotazione, formando un disco di accrescimento. Il materiale che si trova su una data orbita perde progressivamente momento angolare a seguito di processi di tipo viscoso e lentamente spiraleggia verso il buco nero centrale attraverso moti pressoché kepleriani. Generalmente si considerano diverse modalità di accrescimento a seconda del rapporto tra il tasso di massa accresciuta, e il tasso di accrescimento al limite di Eddington,  $\dot{M}_{Edd}$ , quest'ultimo definito come

$$\dot{M}_{Edd} \equiv \frac{L_{Edd}}{\varepsilon c^2}. \quad (1.4)$$

Per esempio, un caso interessante per un SMBH è quello di *disco sottile*. In queste condizioni la materia in caduta irradia con efficienza ed è presente un gradiente di temperature (più alte all'interno e meno all'esterno).

## Modelli a bassa efficienza

Sono modelli assisimmetrici (dischi spessi, tori) caratterizzati da bassa emissione di radiazione, per i quali si assume il fluido in accrescimento canalizzato in un disco di data viscosità ( $\alpha$ -disks). Sono stati recentemente molto utilizzati a seguito dell'osservazione che in molti casi la stima del tasso di accrescimento di Bondi accoppiata all'ipotesi della presenza di un disco sottile di materia in caduta, produce una sistematica sovrastima della luminosità dei SMBH in galassie (Pellegrini 2005).

I modelli più famosi sono:

- **ADAF** (Advection Dominated Accretion Flow), cioè flussi in cui la maggior parte dell'energia dissipata per viscosità è immagazzinata dallo stesso gas sotto forma di entropia, piuttosto che essere irradiata. Il gas diventa caldo e rarefatto ed emette con un'efficienza minore rispetto ai modelli standard, come la Bondi Accretion. L'energia sviluppata nell'accrescimento resta così negli ioni e viene trasportata in larga misura all'interno dell'*orizzonte degli eventi*. (es. Narayan & Yi 1994, 1995).
- **ADIOS** (Advection Dominated Inflow – Outflow Solution), cioè flussi in cui parte del materiale in accrescimento viene rimosso in direzione polare (es. Quataert & Narayan 1999).
- **CDAF** (Convection Dominated Accretion Flow), cioè flussi in cui i moti convettivi trasportano momento angolare verso le regioni interne di accrescimento, ossia in direzione opposta a quella che si ha in presenza degli usuali fenomeni di viscosità. Tale processo frena l'accrescimento di materia sul buco nero (Quataert & Gruzinov 2000).

## Classificazione dei modelli con feedback

Le famiglie di soluzioni sopra citate sono state classificate da Park e Ostriker (1998, Figura 1.1) (vedi anche Ostriker & Ciotti 2005) secondo due grandezze fisiche adimensionali:

$$l \equiv \frac{L_{BH}}{L_{Edd}} \quad \text{e} \quad \dot{m} \equiv \frac{\dot{M} c^2}{L_{Edd}} . \quad (1.5)$$

Da cui

$$\varepsilon \equiv \frac{L_{BH}}{\dot{M} c^2} = \frac{l}{\dot{m}} . \quad (1.6)$$

- Soluzioni aventi bassi tassi di accrescimento,  $\dot{m} \ll 1$ . Il flusso è otticamente sottile, ossia ogni tipo di interazione tra fotoni e particelle di gas è minima. Si possono trascurare quindi sia l'emissione che l'assorbimento della radiazione in uscita. Il gas presenta bassa densità ovunque (accrescimento quasi-sferico, es. Bondi 1952).
- Soluzioni aventi basse temperature e alti tassi di accrescimento, in cui  $\dot{m} \geq 0.1$ . Il gas si raffredda a grandi distanze dal buco nero e rimane a bassa temperatura fino a raggiungere il raggio di Schwarzschild (es. Nobili et al. 1991).
- Soluzioni per cui sia la temperatura che il tasso di accrescimento assumono valori alti. La radiazione emessa dalla materia in caduta sul buco nero è così intensa da scaldare il gas presente a distanze maggiori del raggio di accrescimento<sup>3</sup> più velocemente di quanto questo si stia raffreddando.

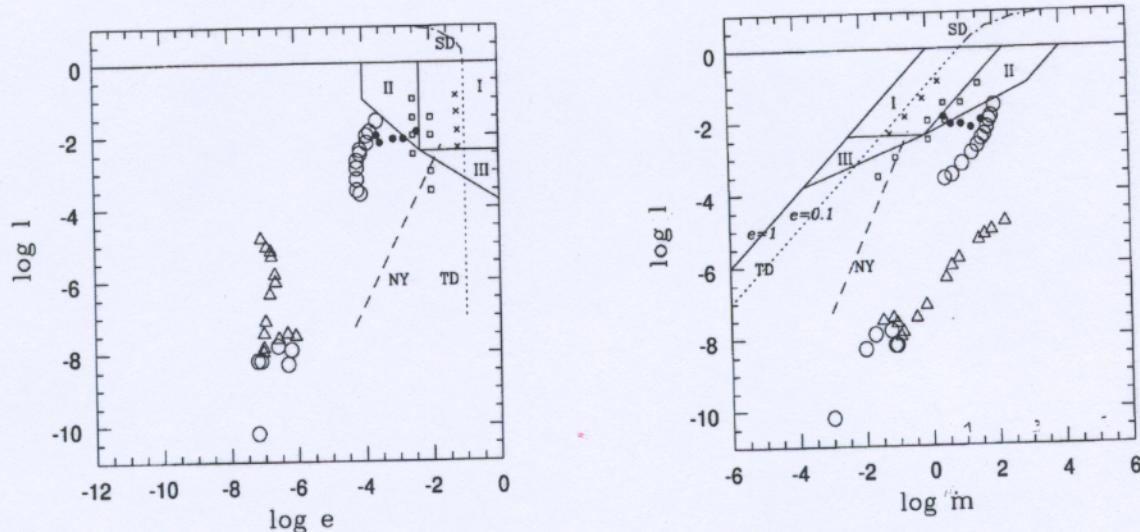


Figura 1.1: Soluzioni per flussi di accrescimento sferici ed assisimmetrici nei piani  $(l, \dot{m})$  e  $(l, e = \varepsilon)$ . I cerchi bianchi in basso a sinistra rappresentano le soluzioni di Park (1990), le soluzioni con alto tasso di accrescimento sferico sono illustrate con triangoli (Nobili 1991) se a bassa temperatura e con i cerchi bianchi in alto a destra se ad alta temperatura (Park 1990). Le soluzioni con disco di accrescimento sono rappresentate dalla linea punteggiata TD per dischi sottili, dalla linea punto-tratto SD per *slim disk* e dalla linea tratteggiata NY per modelli ADAF (Narayan & Yi 1995). I cerchi neri sono soluzioni di accrescimento sferico proposte da Park & Ostriker (1989), i quadratini sono soluzioni che considerano anche i campi magnetici ed infine le crocette sono soluzioni con *preheating shocks* (Chang & Ostriker 1985). (Figure tratte da Park & Ostriker 1998).

<sup>3</sup> Raggio caratteristico entro il quale domina la forza di gravità del SMBH.

### 1.3 Il lavoro di Tesi

Scopo di questa Tesi è studiare, tramite estensione del modello classico di Bondi, il comportamento del tasso di accrescimento su un SMBH in un contesto in cui la descrizione puramente idrodinamica (*Bondi Accretion*) si combini con gli effetti più semplici della fisica della radiazione. Tutto questo rimanendo nell'ipotesi di stazionarietà propria dello stesso accrescimento di Bondi.

Il lavoro di tesi si articolerà secondo la seguente struttura:

**CAPITOLO 2: ACCRESCIMENTO DI BONDI CLASSICO E LIMITE DI EDDINGTON.** Viene esposta la trattazione del processo di accrescimento secondo due punti di vista diversi. Nella prima parte viene illustrato in dettaglio il modello di Bondi (1952), che, come abbiamo sopra citato, studia il fenomeno dell'accrescimento sferico prettamente nell'ambito della dinamica Newtoniana (trattazione classica). In un secondo momento, viene poi ripresa la fisica di base che riguarda tale processo in un contesto puramente radiativo, con conseguente definizione dell'energia generata dalla materia in caduta nella buca di potenziale del SMBH. Assumendo che l'interazione tra la radiazione in uscita e gli elettroni del gas in caduta sia di *scattering Thomson*, si ottiene un limite di luminosità per l'oggetto che accresce, detto *Luminosità di Eddington*. Utilizzando quest'ultima grandezza fisica si arriva a definire l'equazione con cui sviluppare, nello svolgimento della Tesi, il modello di Bondi classico.

**CAPITOLO 3: ACCRESCIMENTO DI BONDI CON FEEDBACK RADIATIVO.** Viene studiato il processo di accrescimento del flusso di Bondi su una sorgente sferica. Si amplia quindi il modello di Bondi classico partendo dall'equazione formulata nel capitolo precedente che tiene conto della radiazione generata dall'oggetto centrale. Viene così rivisitata la formulazione del problema e consequentemente risolta, cercando eventuali differenze rispetto a quella classica.

**CAPITOLO 4: RISULTATI .** Una volta risolto il problema di Bondi con feedback radiativo e determinate eventuali differenze rispetto al modello classico, viene studiato l'andamento del tasso di accrescimento rivisitato (che definiamo in questa trattazione vero) in funzione dell'analogo, ottenuto tramite il modello standard (Capitolo 2).

**CAPITOLO 5: CONCLUSIONI.** Vengono infine ripresi i risultati della '*Bondi Accretion*' ed esposti quelli ottenuti tramite sviluppo di quest'ultimo modello considerando il feedback radiativo (Capitolo 3 e Capitolo 4).

Si è scelto tale approccio per lo studio del processo di accrescimento in quanto il flusso puramente sferico è fisicamente ben definito, per cui, sfruttando la simmetria del problema è possibile dare una trattazione idrodinamica della distribuzione in accrescimento e prendere in considerazione accuratamente i processi di interazione tra gas-radiazione.

Un argomento a sfavore rimane il fatto che questo scenario è poco realistico per le reali situazioni astrofisiche.

## **Capitolo 2**

# **ACCRESCIMENTO DI BONDI CLASSICO E LIMITE DI EDDINGTON**

In questo capitolo verrà esposto in modo dettagliato il modello di accrescimento sferico secondo la trattazione idrodinamica (Bondi 1952) con relative soluzioni nel caso particolare di un buco nero supermassiccio.

Verrà poi preso in considerazione il problema dell'accrescimento sferico su di un SMBH da un punto di vista puramente radiativo e di conseguenza definito il termine di radiazione da inserire nel modello idrodinamico iniziale.

## 2.1 Accrescimento di Bondi classico

### 2.1.1 Ipotesi del modello

Il modello di Bondi studia, in chiave classica, il problema dell'accrescimento stazionario di una distribuzione simmetricamente sferica di gas, a riposo all'infinito, su di un oggetto compatto isolato (nel nostro caso un buco nero supermassiccio di massa  $M_{BH}$ ). Vengono quindi trascurati il momento angolare del gas, il suo moto relativo rispetto all'oggetto centrale e le implicazioni relativistiche dovute al campo gravitazionale del SMBH che viene quindi espresso, per ogni  $r$ , come

$$\phi(r) = -\frac{G M_{BH}}{r} \quad (2.1.1)$$

dove  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{Kg}^2$  è la costante di gravitazione universale.

Vengono inoltre trascurati la possibile presenza di campo magnetico e gli effetti della pressione di radiazione dovuti al feedback radiativo.

La distribuzione di gas è caratterizzata all'infinito dalla densità uniforme  $\rho_\infty$  e dalla temperatura  $T_\infty$ . Avvalendosi quindi di tali condizioni al contorno, la dinamica del flusso di materia viene descritta tramite le tre leggi dell'idrodinamica, insieme ad un'equazione di stato.

### 2.1.2 Equazioni fondamentali

Partendo dalle ipotesi presentate nella sezione precedente, si ricavano le due equazioni principali che descrivono matematicamente il problema di Bondi. Data la

simmetria del modello, vengono usate le coordinate polari ( $r, \theta, \phi$ ), aventi come origine il centro del SMBH.

Per la simmetria sferica, le variabili che descrivono il flusso sono indipendenti da  $\theta$  e  $\phi$  e la velocità ha solamente componente radiale (ossia le particelle di materia non avendo momento angolare cadono radialmente verso il centro).

Quindi, per una distribuzione di gas (viene preso in considerazione quale unico elemento l'Idrogeno, H) la trattazione idrodinamica viene formulata come segue.

Si assume che l'andamento della pressione del gas rispetto alla sua densità sia riconducibile ad una legge politropica

$$P = P_{\infty} \left( \frac{\rho}{\rho_{\infty}} \right)^{\gamma}, \quad 1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3} \quad (2.1.2)$$

dove  $P_{\infty}$  è la pressione del gas all'infinito e  $\gamma$  è l'indice politropico<sup>1</sup>. La relazione che lega densità, temperatura e pressione è data dalla *legge dei gas perfetti*

$$P = \frac{\kappa_B \rho T}{\mu m_H} \quad (2.1.3)$$

dove  $\kappa_B = 1.38 \times 10^{-16}$  erg K<sup>-1</sup> è la costante di Boltzmann,  $\mu$  è il peso molecolare medio e  $m_H$  ( $\cong m_P$  massa del protone) è la massa dell'atomo di idrogeno.

La conservazione della massa è data dall'*Equazione di continuità*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1.4)$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità del gas e,  $\rho$  e  $T$ , come già visto, rispettivamente la sua densità e temperatura. Tutte e tre queste grandezze sono funzioni della posizione  $r$ .

La seconda legge della Dinamica è invece contenuta nell'*Equazione di Eulero*

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{F}_{\text{TOT}} \quad (2.1.5)$$

dove  $\mathbf{F}_{\text{TOT}}$  è la risultante delle forze esterne agenti sul gas per unità di volume.

<sup>1</sup>  $\gamma = 1$  corrisponde al caso isotermo, mentre  $\gamma = 5/3$  al caso adiabatico (per un gas monoatomico).

Consideriamo ora il flusso stazionario, per cui  $\partial\rho/\partial t = 0$  e  $\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$ , e riprendiamo quindi le equazioni sopra citate.

La prima equazione fondamentale del modello si ricava dall'eq. (2.1.4), la quale, tenendo conto anche del teorema della divergenza in simmetria sferica, diventa

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r) . \quad (2.1.6)$$

Nell'identità qui sopra riportata,  $\dot{M}$  è il flusso costante di massa per unità di tempo ad ogni raggio  $r$ , detto tasso di accrescimento.

Nel problema di Bondi classico, nell'equazione di Eulero l'unico contributo alla forza esterna  $\mathbf{F}_{\text{TOT}}$  è dato dalla forza di gravità del SMBH che ha componente solamente radiale

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_{BH}\rho}{r^2} \quad (2.1.7)$$

quindi, imponendo la stazionarietà, si ottiene dall'eq. (2.1.5)

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM_{BH}}{r^2} = 0 . \quad (2.1.8)$$

Integrando quest'ultima su una *streamline* generica (linea tangente al campo di velocità) otteniamo *l'equazione di Bernoulli* in forma integrale

$$\frac{v^2}{2} + \int_{P_\infty}^P \frac{dP}{\rho} - \frac{GM_{BH}}{r} = 0 . \quad (2.1.9)$$

Infine dall'eq. (2.1.2) si ha

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma P_\infty}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] - \frac{GM_{BH}}{r} = 0 \quad (2.1.10)$$

che descrive la conservazione dell'energia ed è la seconda equazione fondamentale del modello.

### 2.1.3 Normalizzazione delle equazioni

Risolvere il problema di Bondi consiste quindi nel risolvere le eq. (2.1.6) e (2.1.10) nelle variabili  $v$  e  $\rho$  in termini di  $r$ , distanza dal SMBH.

Per ottenere la soluzione generale si procede alla normalizzazione del problema.

Introduciamo le variabili adimensionali

$$\tilde{\rho} \equiv \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad (2.1.11)$$

e

$$\tilde{T} \equiv \frac{T}{T_\infty} . \quad (2.1.12)$$

Considerando la velocità del suono ad un raggio  $r$

$$c_s^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\gamma \kappa_B T}{\mu m_p} = \gamma \frac{P}{\rho} = c_{s\infty}^2 \tilde{\rho}^{(\gamma-1)} \quad (2.1.13)$$

(dove  $c_{s\infty}^2 = \gamma P_\infty / \rho_\infty$  è la velocità del suono all'infinito) il campo di velocità del fluido normalizzato si scrive

$$u \equiv \frac{v}{c_s} . \quad (2.1.14)$$

Tale variabile non è altro che il *numero di Mach*, il cui significato fisico è di discriminante tra regime subsonico ( $u < 1$ ) e regime supersonico ( $u > 1$ ).

Si definisce poi il *raggio di Bondi*

$$r_B \equiv \frac{G M_{BH}}{c_{s\infty}^2} , \quad (2.1.15)$$

come scala naturale delle lunghezze. Tale raggio può essere interpretato come la distanza alla quale l'energia cinetica di caduta diventa paragonabile all'energia termica del gas all'infinito, ossia entro questo raggio diventa dominante l'attrazione gravitazionale del buco nero. Da quest'ultima equazione si ricavano le distanze dal SMBH normalizzate, date da

$$x \equiv \frac{r}{r_B} . \quad (2.1.16)$$

Sostituendo ora alle variabili le loro normalizzazioni così introdotte, le eq. (2.1.6) e (2.1.10) assumono la forma adimensionale

$$\lambda \equiv x^2 u \tilde{\rho}^{\frac{\gamma+1}{2}} = \frac{\dot{M} c_{S\infty}^3}{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho_\infty} \quad (2.1.17)$$

$$\tilde{\rho}^{\gamma-1} u^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)u^2} \right] = \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{x} \quad (2.1.18)$$

dove, contemporaneamente, nell'eq. (2.1.17) viene data la definizione del parametro adimensionale  $\lambda$  che riveste un ruolo fondamentale nel modello di Bondi; infatti, conosciuto  $\lambda$  e dati la massa del buco nero  $M_{BH}$  e le condizioni all'infinito  $\rho_\infty$  e  $P_\infty$ , è possibile determinare il tasso di accrescimento risolvendo tale equazione per  $\dot{M}$ . Come vedremo nella prossima sezione, un punto fondamentale nella risoluzione del problema di Bondi è la determinazione di  $\lambda$ .

#### 2.1.4 Procedura risolutiva

Per un generico  $\gamma$  assegnato, è possibile fornire una soluzione in termini di  $(x, u, \tilde{\rho})$  alle equazioni (2.1.17) e (2.1.18).

Sostituendo  $\tilde{\rho}$ , ottenuto dalla prima equazione (eq. [1.1.17]), nell'eq. (2.1.18), si arriva alla seguente formulazione del problema di Bondi, che deve essere soddisfatta per ogni  $x$

$$g(u) = \Lambda f(x) \quad (2.1.19)$$

dove

$$g(u) \equiv u^{\frac{4}{\gamma+1}} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)u^2} \right] \quad (2.1.20)$$

$$f(x) \equiv x^{\frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)}} \left( \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{x} \right) \quad (2.1.21)$$

$$\Lambda \equiv \lambda^{\frac{2(1-\gamma)}{(\gamma+1)}} \quad (2.1.22)$$

Poiché l'eq. (2.1.19) è trascendente e non risolvibile per via analitica, deve essere risolta numericamente. In ogni caso è utile procedere all'analisi nei cosiddetti regimi asintotici delle due funzioni  $g(u)$  e  $f(x)$  rappresentate rispettivamente nelle Fig. 2.1.1 e 2.1.2. Il loro studio permette così di determinare  $u$  in funzione di  $x$ , per  $\gamma$  e  $\lambda$  assegnati, in modo tale che l'eq. (2.1.19) sia identicamente verificata in *campo vicino* ( $x \ll 1$ ) e in *campo lontano* ( $x \gg 1$ ).

In ogni modo, ottenuta la funzione  $u = u(x)$  il problema è completamente risolto poiché dall'equazione (2.1.17) si ricava la relazione

$$\tilde{\rho} \propto \left( \frac{1}{x^2 u} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}} \quad (2.1.23)$$

da cui

$$c_s \propto \tilde{\rho}^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (2.1.24)$$

$$v \propto u \tilde{\rho}^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (2.1.25)$$

$$T \propto \tilde{\rho}^{\gamma-1} \quad (2.1.26)$$

Vedremo più avanti come il valore di  $\lambda$  non sia arbitrario, ma risulti essere limitato da un valore critico.

### 2.1.5 Studio asintotico

Per prima cosa, per  $\lambda$  e  $\gamma$  fissati, si analizzano le funzioni  $g(u)$  e  $f(x)$  nei due regimi asintotici  $x \gg 1$  e  $x \ll 1$ , per cui il discriminante tra questi due campi risulta essere il raggio di Bondi.

Nel caso  $x \gg 1$ , detto di *campo lontano*, ci si pone a una distanza elevata dal SMBH, dove il gas risente in misura ridotta dell'attrazione gravitazionale di questo. In tale regime l'andamento asintotico di  $f(x)$  si ottiene dall'eq. (2.1.21)

$$f(x) \approx \frac{x^{\frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)}}}{\gamma-1} \quad (2.1.27)$$

ossia a grandi raggi  $f(x)$  diverge. Per la condizione (2.1.19) anche la funzione  $g(u)$  deve avere lo stesso comportamento e ciò avviene secondo due possibilità: regime supersonico con  $u \gg 1$  o regime subsonico con  $u \ll 1$ .

Considerando il primo regime, dall'eq. (2.1.20) si ottiene

$$g(u) \approx \frac{u^{\frac{4}{\gamma+1}}}{2} \quad (u \rightarrow \infty) \quad (2.1.28)$$

dove sostituendo quest'ultima, insieme all'eq. (2.1.27), nella formulazione del problema, si ha la cosiddetta *soluzione di vento* in campo lontano

$$u \propto x^{\gamma-1}. \quad (2.1.29)$$

Infatti, poiché  $c_s$  tende al valore costante di  $c_{s\infty}$  per  $x \rightarrow \infty$ , a grandi distanze, la relazione (2.1.29) implica che anche  $v \rightarrow \infty$ . A tale soluzione di vento corrisponde ovviamente una soluzione di accrescimento, assicurata dalla parità del termine di velocità nell'equazione di Bernoulli, eq. (2.1.9).

Nel secondo regime quindi, sempre dall'eq. (2.1.20) si ottiene

$$g(u) \approx \frac{u^{\frac{2(1-\gamma)}{\gamma+1}}}{\gamma-1} \quad (u \rightarrow 0) \quad (2.1.30)$$

per cui applicando la stessa procedura del caso precedente si arriva *alla soluzione di accrescimento* in campo lontano

$$u \propto \frac{1}{x^2} . \quad (2.1.31)$$

Poiché in tale soluzione non compare l'indice  $\gamma$ , non vi è alcuna dipendenza dal tipo di fluido accresciuto.

Nel caso  $x \ll 1$ , detto di *campo vicino*, ci si pone a una distanza dal SMBH tale che la sua attrazione gravitazionale risulta essere molto intensa.

Anche per piccoli raggi l'andamento della funzione  $f(x)$  diverge

$$f(x) \approx x^{\frac{3\gamma-5}{\gamma+1}} \quad (x \rightarrow 0) \quad (2.1.32)$$

per cui, anche in questo caso, il comportamento asintotico di  $g(u)$  continuerà ad essere quello nei due diversi regimi, subsonico e supersonico, appena considerato.

La *soluzione di vento* in campo vicino, quindi per  $u \ll 1$ , che si ottiene rispettivamente dall'eq. (2.1.30), è

$$u \propto x^{\frac{3\gamma-5}{2(1-\gamma)}} . \quad (2.1.33)$$

La *soluzione di accrescimento* in campo vicino,  $u \gg 1$ , si ricava invece dall'eq. (2.1.28), che in questo caso risulta essere l'andamento più rilevante ai fini del problema dell'accrescimento; per cui si ha

$$u \propto x^{-\frac{3\gamma-5}{4}} \quad (2.1.34)$$

e tenendo conto di questo risultato, gli andamenti asintotici delle altre quantità fisiche sono dati da

$$\rho \propto r^{-\frac{3}{2}} \quad (2.1.35)$$

$$v \propto r^{-\frac{1}{2}} \quad (2.1.36)$$

$$T \propto r^{\frac{3}{2}(1-\gamma)} \quad (2.1.37)$$

Si riconoscono nella soluzione gli andamenti tipici di una caduta *free-fall*, infatti il bilancio energetico è dominato dal contributo dell'energia cinetica del gas in accrescimento.

### 2.1.6 Limite sul parametro $\lambda$

Nella precedente sezione si può notare come le soluzioni ottenute dall'analisi asintotica non forniscono alcuna informazione sul valore di  $\lambda$ , ossia per ogni valore di tale parametro è possibile determinare la soluzione asintotica corrispondente.

Si vede invece, di seguito, come dal calcolo dei minimi delle due funzioni  $f(x)$  e  $g(u)$  si arriva a formulare la soluzione completa del problema che definisce un valore massimo per  $\lambda$ . Sostituendo poi tale  $\lambda_{CRIT}$  nell'eq. (2.1.17) si può determinare un valore massimo per il tasso di accrescimento, data la massa del SMBH,  $M_{BH}$ , e le condizioni del gas all'infinito.

Procediamo quindi allo studio delle due funzioni (2.1.20) e (2.1.21).

Assegnato  $\gamma$ ,  $1 \leq \gamma \leq 5/3$ , entrambe le funzioni  $g(u)$  e  $f(x)$  sono la somma di una potenza positiva e di una negativa nelle rispettive variabili, per cui sono dotate di minimo. Questo implica, considerando la condizione (2.1.19), che per il parametro  $\lambda$  vi sia un valore critico.

Si calcola quindi la derivata prima di  $g(u)$ , da cui, ponendo  $g'(u) = 0$ , si ottiene

$$u_{\min} = 1 \quad \text{ossia} \quad v = c_s \quad (2.1.38)$$

dove in questa posizione la funzione assume il valore minimo

$$g_{\min} = \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (2.1.39)$$

Risulta quindi che la somma dell'energia cinetica e dell'entalpia del fluido è minima al punto sonico. Inoltre dall'eq. (2.1.20) si può vedere che per  $u < u_{min}$  domina il contributo dell'entalpia mentre per  $u > u_{min}$  domina l'energia cinetica. Infine si noti che la funzione  $g(u)$  è universale per il problema di accrescimento con simmetria sferica poiché non dipende dal particolare potenziale gravitazionale considerato.

Non si può dire la stessa cosa per la funzione  $f(x)$  che invece è tipica del problema di Bondi giacché contiene il termine di potenziale gravitazionale.

Risolvendo l'equazione  $f'(x) = 0$ , il minimo di  $f(x)$  si ha per

$$x_{\min} = \frac{5-3\gamma}{4} \quad (2.1.40)$$

e assume il valore di

$$f_{\min} = \frac{1}{4} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[ \frac{5-3\gamma}{4} \right]^{-\frac{(5-3\gamma)}{\gamma+1}}. \quad (2.1.41)$$

Si noti che  $x_{\min}$  è prossimo al raggio di Bondi ma non è con esso coincidente.

Ora dall'eq. (2.1.19), tenendo conto dei minimi delle due funzioni, si ricava il valore critico di  $\lambda$ :

$$\lambda_{CRIT} = \left( \frac{f_{\min}}{g_{\min}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{1}{4} \left( \frac{2}{5-3\gamma} \right)^{\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}}. \quad (2.1.42)$$

L'eq. (2.1.42) rappresenta, così, il limite massimo per  $\lambda$ , infatti si può vedere che se ci si pone nella posizione  $x_{\min}$  non è permesso ricercare una soluzione per  $\lambda > \lambda_{CRIT}$ , in quanto si otterrebbe un valore  $g(u) < g_{\min}$ , e tale richiesta è ovviamente impossibile per la definizione stessa di  $g_{\min}$ . Tale risultato si riscontra anche in Fig. 2.1.3 dove viene rappresentata la soluzione completa del problema.

Si noti infine che il valore critico di  $\lambda$  dipende dall'indice politropico e quindi dal tipo di fluido accresciuto.

### 2.1.7 Soluzione completa

Verranno ora argomentati i risultati del modello di accrescimento di Bondi, ossia verrà preso in considerazione il comportamento del campo di velocità del fluido,  $u$ , al variare della distanza dal SMBH,  $x$ , nei tre casi: (i)  $\lambda = 1/4 \lambda_{CRIT}$ , (ii)  $\lambda = \lambda_{CRIT}$  e (iii)  $\lambda = 4 \lambda_{CRIT}$  (Fig. 2.1.3).

(i) Per  $\lambda < \lambda_{CRIT}$  le soluzioni sono o supersoniche ovunque (curva A'B'C') o subsoniche ovunque (curva ABC), con  $u(x_{min})$  rispettivamente valore minimo o massimo del numero di Mach.

Nel caso di moto subsonico, al diminuire di  $x$ ,  $u$  aumenta gradualmente fino ad un massimo (B) e diminuisce a zero (C) per  $x$  che tende a zero. Più il valore di  $\lambda$  si fa prossimo al suo valore critico e più il massimo della curva (B) risulta essendo piccato. Non si considera invece di interesse fisico la curva A'B'C', lungo la quale il moto si mantiene supersonico, in quanto  $u$  non soddisfa le condizioni all'infinito (infatti  $u$  ha valore elevato sia all'infinito che per  $x = 0$ ).

Non è inoltre permesso nessun salto da una curva all'altra in quanto ciò richiederebbe un'accelerazione infinita (discontinuità), il che sta a significare che non vi è alcuna soluzione transonica la quale implicherebbe, per fluidi transonici, la presenza di un'onda d'urto (infatti nel punto sonico,  $u(x_s) = 1$  e  $x_s \neq x_{min}$  poiché  $\lambda \neq \lambda_{CRIT}$ , si ha  $u'(x_s) = \infty$ , onda d'urto).

(ii) Per  $\lambda = \lambda_{CRIT}$  le curve che rappresentano questo caso si incontrano in  $B = B'$ . Le due alternative fisicamente accettabili sono date dai grafici ABC e ABC'.

Il primo caso rappresenta la forma limite per le curve con  $\lambda < \lambda_{CRIT}$ . Nel punto B, caratterizzato da velocità transoniche,  $u = 1$ , si nota una tangente discontinua che descrive un salto di accelerazione finita. Anche se tale fenomeno non ha riscontro fisico plausibile, non vi è alcun argomento che ne vietи la veridicità.

La curva ABC' invece è monotona continua e si vede che per  $x > x_B$  il moto è subsonico mentre per  $x < x_B$  il moto è supersonico (soluzione di accrescimento).

(iii) Per  $\lambda > \lambda_{CRIT}$  l'andamento di  $u = u(x)$  cambia come mostrato in Fig. 2.1.3 e nessuna soluzione è possibile, come già visto nel paragrafo precedente.

Risultano quindi due tipi differenti di moto (riconducibili alle due curve di interesse fisico nella Fig. 2.1.3).

*Tipo 1 (velocity-limited)*: si ha per  $\lambda \leq \lambda_{CRIT}$ . Il moto è subsonico ovunque (tranne che per  $x = x_{min}$  se  $\lambda = \lambda_{CRIT}$ ). Il campo di velocità  $u$  è dotato di un unico massimo, tale che  $u_{min} \leq 1$ .

*Tipo 2 (temperature-limited)*: si verifica solamente per  $\lambda = \lambda_{CRIT}$ . Il moto si mantiene subsonico per  $x > x_{min}$ , diviene transonico per  $x = x_{min}$ , per poi cambiare in supersonico per  $x < x_{min}$  (soluzione di accrescimento).

A questo punto, poiché si è visto che la soluzione del problema esiste per un qualsivoglia  $\lambda$ , nell'intervallo  $0 \leq \lambda \leq \lambda_{CRIT}$ , rimane da determinare il valore che tale parametro assume nel particolare sistema considerato.

La procedura che si segue è quella di ricercare in quale stato (e quindi per quale  $\lambda$ ) il sistema possiede energia minore; questo è l'unico stato stabile.

L'equazione di Bernoulli (eq. [2.1.9]) ci assicura che l'energia del gas per unità di massa è costante. Consideriamo quindi  $\tilde{\rho}$  in funzione di  $\lambda$  per un  $x$  fissato.

Nel caso di moto *velocity-limited*, dall'eq. (2.1.17) si vede che per  $u < 1$ , all'aumentare del parametro  $\lambda$ ,  $\tilde{\rho}$  diminuisce, per cui lo stato avente energia minore risulta essere quello con  $\lambda = \lambda_{CRIT}$ .

Ora, confrontando i due tipi di moto per  $\lambda = \lambda_{CRIT}$ , si verifica subito che, per  $x \geq x_{min}$  le densità sono le stesse (stessa soluzione), mentre per  $x < x_{min}$  lo stato avente densità minore, e quindi energia minore, è quello *temperature-limited*.

Poiché non è stato preso in considerazione nessun processo capace di limitare il fenomeno di accrescimento, tale risultato è in accordo con l'idea intuitiva che questo si verifichi al maggior tasso possibile ( $\lambda = \lambda_{CRIT}$ ), dato da

$$\dot{M}_B = \frac{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho_\infty \lambda_{CRIT}}{c_{S\infty}^3}. \quad (2.1.43)$$

Si noti che si è arrivati a tale limite prendendo in considerazione solo gli effetti dinamici (moto relativo SMBH – fluido) e trascurando così gli effetti della pressione di radiazione.

Introduciamo quindi, qui di seguito, quest'ultimo contributo, essendo uno dei due termini chiave, insieme alla trattazione idrodinamica di Bondi (1952), per lo studio del processo di accrescimento all'interno del nostro progetto di Tesi.

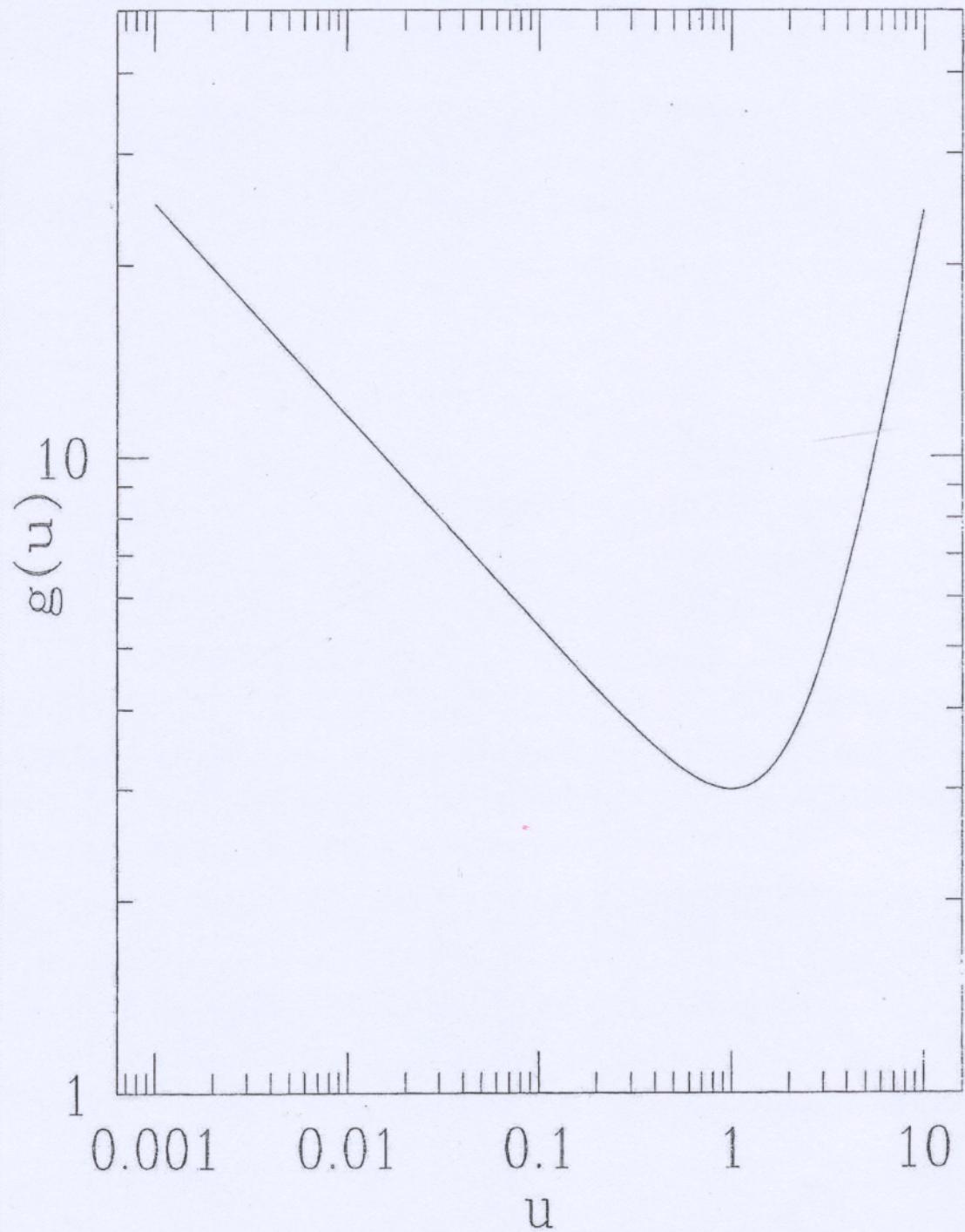


Figura 2.1.1: Grafico della funzione  $g(u)$  rispetto ad  $u$  per un gas con  $\gamma = 7/5$  (Figura tratta da Pedaletti G. 2005).

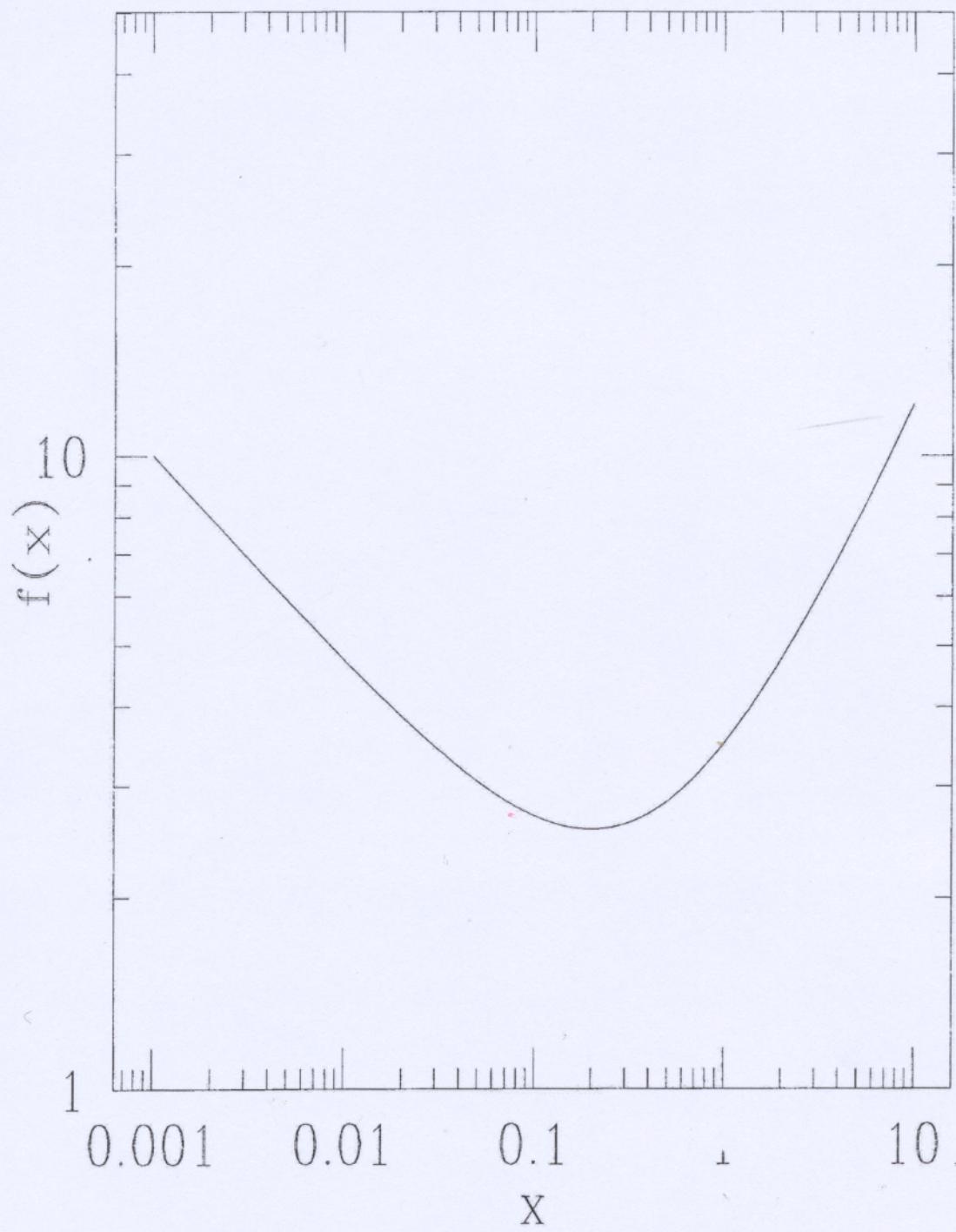


Figura 2.1.2: Grafico della funzione  $f(x)$  rispetto a  $x$  per un gas con  $\gamma = 7/5$  (Figura tratta da Pedaletti G. 2005).

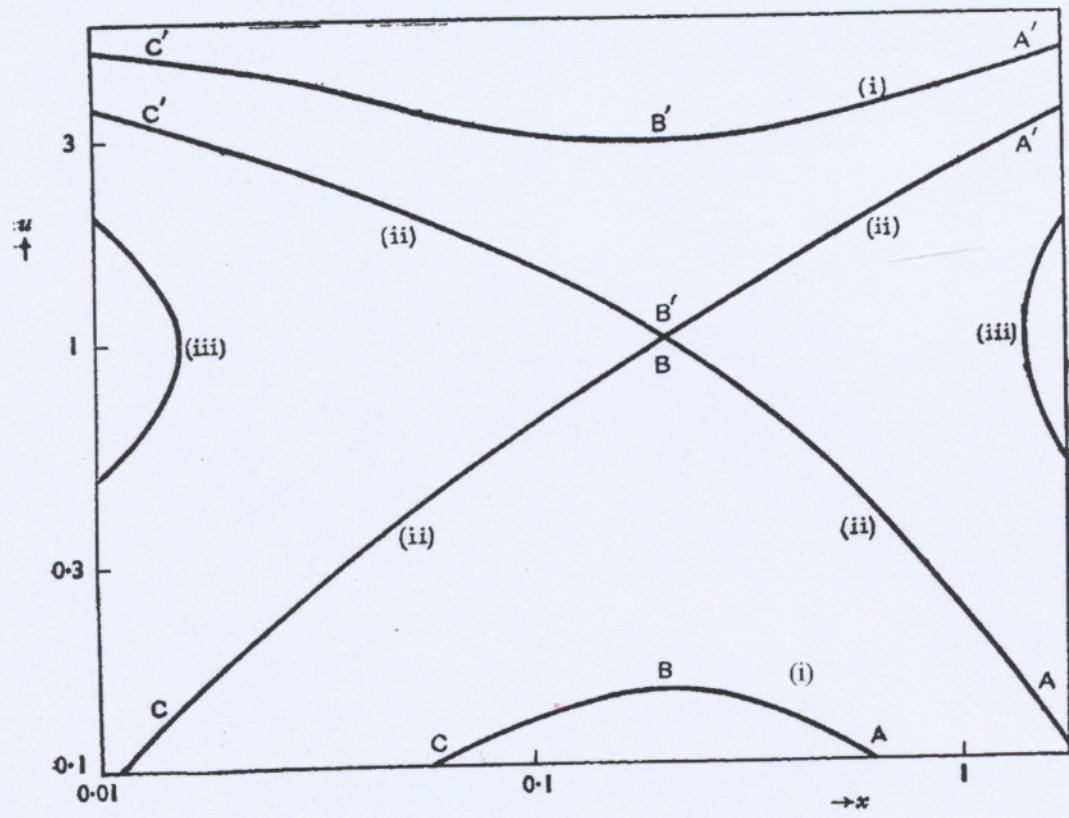


Figura 2.1.3: Soluzione completa nel piano  $(x, u)$  per un gas con  $\gamma = 7/5$ , nei tre casi:  
 (i)  $\lambda = 1/4 \lambda_{CRIT}$ , (ii)  $\lambda = \lambda_{CRIT}$ , (iii)  $\lambda = 4 \lambda_{CRIT}$  (Figura tratta da Bondi 1952).

## 2.2 Limite di Eddington

### 2.2.1 Luminosità di accrescimento

In generale, l'energia gravitazionale rilasciata dall'accrescimento di una massa  $m$  proveniente dall'infinito, sulla superficie di un corpo di massa  $M$  e raggio  $R$ , è data da

$$\Delta E_{accr} = \frac{G M m}{R} , \quad (2.2.1)$$

da cui si ricava l'efficienza con cui viene prodotta energia, definita come

$$\varepsilon = \frac{\Delta E_{accr}}{m c^2} = \frac{R_S}{2R} , \quad (2.2.2)$$

ossia come il rapporto tra l'energia liberata da una certa massa e la sua energia a riposo.

$R_S$ , detto *Raggio di Schwarzschild*, è la distanza dall'oggetto centrale alla quale la velocità di fuga uguaglia la velocità della luce  $c$ , da cui

$$R_S \equiv \frac{2 G M}{c^2} . \quad (2.2.3)$$

Per un SMBH *non ruotante* (come quello da noi considerato)  $R_S$  definisce l'*orizzonte degli eventi*, ossia la superficie al di fuori della quale particelle di materia possono scappare dall'attrazione del buco nero, mentre tutto ciò che si trova dentro rimane intrappolato per sempre.

Come risulta dall'eq. (2.2.1) l'accrescimento dipende fortemente dalla compattezza dell'oggetto che accresce, ossia maggiore è il rapporto  $M/R$ , maggiore sarà l'energia sviluppata da tale processo.

Per una Stella di Neutroni  $\varepsilon \approx 0.2$ , che è un'efficienza elevatissima se confrontata con quella di processi nucleari come la fissione dell'Uranio ( $\varepsilon \approx 10^{-3}$ ) o la

combustione termonucleare (per cui l'efficienza, ad esempio, di bruciamento nel *ciclo p-p* di Idrogeno in Elio ha  $\varepsilon \approx 10^{-2}$ ). Per un Buco Nero  $\varepsilon$  oscilla nell'intervallo  $0.001 \leq \varepsilon \leq 0.15$ ; ecco perché si ritiene che la gravità abbia un ruolo essenziale per quanto riguarda l'emissione radiativa da parte di oggetti molto compatti che accrescono, dando luogo a radiazione ad alta energia.

Si noti inoltre che per un dato valore del rapporto  $M/R$ , la luminosità del sistema che accresce dipende dalla quantità di massa 'catturata' nell'unità di tempo, ossia per un corpo di massa  $M$  che accresce ad un ritmo  $\dot{M}$  si avrà

$$L_{accr} = \dot{M} \varepsilon c^2 . \quad (2.2.4)$$

A differenza di quanto avviene per oggetti collassati, quali Nane Bianche o Stelle di Neutroni, un buco nero non possiede una superficie solida sulla quale il materiale in caduta possa impattare e convertire in altre forme l'energia cinetica acquistata nella caduta. Una particella catturata finirebbe inevitabilmente entro l'orizzonte degli eventi e l'energia così acquistata 'scomparirebbe'. Tuttavia si ritiene vi siano dei processi dissipativi al di fuori dell'orizzonte, di tipo 'viscoso', che tendono a convertire almeno parzialmente, l'energia cinetica di caduta in energia termica e, in misura maggiore o minore, in radiazione; in altri termini il gas cadendo viene compresso, la sua temperatura cresce ed emette.

## 2.2.2 Interazione radiazione – materia

La radiazione così emessa interagisce con il gas in accrescimento, il cui stato termico viene quindi alterato. Descriviamo di seguito tale processo.

Assumiamo quale scenario di partenza un buco nero di massa  $M_{BH}$  e luminosità  $L_{BH}$ , eq. (2.2.4), immerso in una distribuzione simmetricamente sferica di Idrogeno completamente ionizzato (plasma per cui  $n_e$ , densità di elettroni, è uguale a  $n_p$ , densità di protoni).

Ci poniamo quindi nel caso di *spessore ottico sottile*, per cui la frequenza di urti tra fotoni e particelle del fluido è molto bassa, e di conseguenza l'interazione che andiamo a considerare è quella di *electron scattering (diffusione Thomson)*.

Sotto tali ipotesi la rappresentazione qualitativa dell'area geometrica associabile a un singolo elettrone che intercetta la quantità  $dE/dt$  di radiazione incidente è data dalla *sezione d'urto Thomson*

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \cong 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (2.2.5)$$

dove  $e = 4.8 \times 10^{-10}$  esu è la carica elettrica dell'elettrone di massa  $m_e$ .

I protoni sono praticamente 'invisibili' ai fotoni, essendo la loro sezione d'urto ridotta di un fattore  $(m_e/m_p)^2 \cong (5 \times 10^{-4})^2$  rispetto a quella degli elettroni.

Durante il processo di interazione, tramite urto elastico, ogni fotone incidente su un elettrone trasferisce totalmente a quest'ultimo il suo impulso

$$\Delta p_\gamma = \frac{h \nu}{c} \quad (2.2.6)$$

dove  $h \cong 6.63 \times 10^{-34}$  J s è la costante di Planck e  $\nu$  è la frequenza dell'onda elettromagnetica associata al fotone incidente.

Ora, considerando il numero totale di fotoni di frequenza  $\nu$  a distanza  $r$  dal buco nero per unità di tempo  $t$  e per unità di area, dato da

$$\Delta N_\gamma = \frac{L_{BH}}{4\pi r^2} \frac{1}{h\nu} \quad (2.2.7)$$

e il numero di elettroni che vi interagiscono,  $n_e \cdot \sigma_T$ , l'impulso totale che viene trasferito, dalla radiazione al plasma, nell'unità di tempo ad una distanza  $r$  dal buco nero, è

$$F_{Rad} = \frac{L_{BH}}{4\pi r^2 c} n_e \sigma_T \cdot \quad (2.2.8)$$

Sul plasma agiscono quindi due forze: la forza dovuta alla pressione di radiazione, eq. (2.2.8), e la forza di gravità, di segno opposto, che agisce sostanzialmente sui protoni, data da

$$F_{Grav} = - \frac{G M_{BH}}{r^2} n_p m_p = - \frac{G M_{BH}}{r^2} \rho \quad (2.2.9)$$

dove  $\rho = (n_e m_e + n_p m_p) \cong n_p m_p$  densità della materia in accrescimento, è una buona approssimazione.

Poiché elettroni e protoni sono legati da intense forze elettrostatiche (campo Coulombiano) possiamo considerare la forza  $F_{Rad}$  come applicata alla densità totale. In definitiva possiamo assumere che le particelle del plasma in accrescimento siano soggette ad una forza attrattiva effettiva che risulta dalla somma del contributo di radiazione e quello di gravità, data da

$$F_{\text{eff}} \equiv -\frac{G M_{BH}}{r^2} \rho + \frac{L_{BH}}{4\pi r^2 c} n_e \sigma_T . \quad (2.2.10)$$

### 2.2.3 Limite di Eddington

La luminosità di accrescimento (eq. [2.2.4]), la cui origine è sostanzialmente la gravità, non può essere arbitrariamente grande, ma ha un limite superiore, detto *Limite di Eddington* (luminosità per cui la forza di pressione radiativa bilancia la forza di gravità). Uguagliando (situazione di equilibrio) quindi le due forze a cui sono soggette le particelle del plasma, ossia ponendo uguale a zero l'eq. (2.2.10) e risolvendola per  $L_{BH}$  si ha

$$L_{Edd} \equiv L_{BH} = \frac{4\pi G M_{BH} c}{\sigma_T} \frac{\rho}{n_e} \cong \frac{4\pi G M_{BH} c}{\sigma_T} m_p . \quad (2.2.11)$$

Il processo di accrescimento è quindi controllato da una specie di "termostato" (processo di autoregolazione). Si può facilmente dedurre, infatti, che se  $L_{BH}$  è circa  $L_{Edd}$  allora l'attrazione gravitazionale del SMBH viene bilanciata dalla pressione di radiazione e l'accrescimento viene interrotto.

Come conseguenza dell'eq. (2.2.4) si ha che anche la massa accresciuta per unità di tempo non può essere arbitrariamente grande ma, ad alte luminosità, sarà limitata dal momento uscente trasferito dalla radiazione al materiale in accrescimento, per cui il suo valore massimo è dato da

$$\dot{M}_{Edd} = \frac{L_{Edd}}{\varepsilon c^2} = \frac{4\pi G M_{BH}}{\varepsilon c} \frac{m_p}{\sigma_T}. \quad (2.2.12)$$

Assumendo quindi che  $L_{BH} \approx L_{Edd}$ , dalla luminosità osservata di un buco nero in accrescimento, possiamo stimare il limite inferiore per la massa di tale oggetto e il tasso massimo a cui può accrescere materia.

## 2.2.4 Ipotesi di lavoro

Passiamo adesso al tentativo di unire i due risultati, ovvero l'accrescimento di Bondi con la luminosità di Eddington.

Possiamo riscrivere l'eq. (2.2.10), forza di attrazione effettiva che agisce sulle particelle del plasma in accrescimento sottoposte a pressione di radiazione, in funzione di  $L_{Edd}$ , eq. (2.2.11); per cui si ottiene

$$F_{eff} = -\frac{GM_{BH}}{r^2} \rho \left(1 - \frac{L_{BH}}{L_{Edd}}\right). \quad (2.2.13)$$

Come si può vedere facilmente da quest'ultima equazione, il problema, posto in tale forma, si riduce infine allo studio del processo di accrescimento di un plasma sottoposto a un'accelerazione gravitazionale effettiva data da

$$G_{eff} \equiv G \left(1 - \frac{L_{BH}}{L_{Edd}}\right). \quad (2.2.14)$$

Abbiamo così individuato l'ipotesi di lavoro su cui estendere il modello di accrescimento sferico di Bondi, precedentemente descritto.

## **Capitolo 3**

# **ACCRESCIMENTO DI BONDI CON FEEDBACK RADIATIVO**

Verrà ora ripreso il modello di Bondi classico (1952) considerando sia gli effetti legati puramente all'idrodinamica del gas in accrescimento, sia gli effetti dovuti alla pressione di radiazione (feedback radiativo), per condizioni al contorno fissate.

A tale scopo, si svilupperà il problema di base (trattazione idrodinamica del processo di accrescimento sferico) integrandovi 'l'ipotesi di lavoro' (trattazione radiativa) formulata nel capitolo precedente.

### 3.1 Ipotesi aggiuntive

Consideriamo il problema dell'accrescimento del flusso di Bondi su una sorgente sferica (un buco nero supermassiccio, SMBH) di luminosità  $L_{BH}$ , data da

$$L_{BH} = \dot{M} \varepsilon c^2 \quad (3.1)$$

dove per regimi di accrescimento standard si ha  $\varepsilon \lesssim 0.1$ .

Si assume che tutta la radiazione emergente abbia origine durante la caduta del gas in accrescimento, tramite trasformazione di massa in energia ad opera del campo gravitazionale presente. Si suppone la distribuzione di gas (dove continuiamo ad assumere principalmente Idrogeno completamente ionizzato) *otticamente sottile* e sottoposta alla pressione di radiazione, generata dallo stesso processo di accrescimento sull'oggetto centrale.

Viene preso in considerazione solo il processo di trasporto radiativo e vengono trascurati gli effetti di riscaldamento e raffreddamento del plasma attraversato dalla radiazione. Infatti, in definitiva i fotoni emessi dal gas nelle regioni centrali dell'accrescimento interagiscono, per *scattering di Thomson*, con gli elettroni del gas producendo un'accelerazione delle coppie elettrone – protone verso l'esterno e, come ben noto, in questo processo i fotoni trasferiscono impulso, ma non perdono energia.

In questo scenario, riprendendo la *trattazione radiativa* descritta nel Capitolo 2, la forza di attrazione effettiva che agisce radialmente sul fluido in accrescimento per unità di volume ad opera del buco nero, è data da

$$F_{\text{eff}} = -\frac{G_{\text{eff}} M_{BH}}{r^2} \rho \quad (3.2)$$

dove

$$G_{\text{eff}} \equiv G \left( 1 - \frac{L_{BH}}{L_{Edd}} \right) = G \left( 1 - \frac{\dot{M}_v}{\dot{M}_{Edd}} \right). \quad (3.3)$$

Si identifica con  $\dot{M}_v$  il tasso di accrescimento vero, derivante dal modello di Bondi

rivisitato. In altri termini, la forza di gravità effettiva, in questo nuovo contesto con feedback radiativo, è ridotta di un fattore  $1 - \dot{M}_V / \dot{M}_{Edd}$  rispetto al modello di Bondi classico.

Consideriamo, infine, come di consueto, trasformazioni politropiche per il gas, ossia  $P \propto \rho^\gamma$ , con valori dell'indice  $\gamma$  compresi nell'intervallo  $1 \leq \gamma \leq 5/3$ .

### 3.2 Equazioni fondamentali rivisitate

Ricaviamo ora la trattazione matematica del problema di Bondi con feedback radiativo, partendo direttamente dalle due equazioni fondamentali del modello classico (eq. [2.1.6] ed eq. [2.1.10], Capitolo 2).

L'*Equazione di conservazione della massa* rimane invariata, per cui si ha ancora

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r) . \quad (3.4)$$

Nell'*Equazione del moto* (*Equazione di Eulero* [2.1.8], Capitolo 2) si deve tenere conto, invece, del nuovo contributo alla risultante delle forze esterne agenti sul gas per unità di volume, dovuto alla pressione di radiazione; ossia consideriamo, quale  $\mathbf{F}_{TOT}$ , la forza data dall'eq. (3.2). Si ha quindi

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{G_{eff} M_{BH}}{r^2} = 0 . \quad (3.5)$$

Procedendo all'integrazione di quest'ultima, così come al Capitolo 2, si ottiene la seconda equazione fondamentale del problema (*Equazione di conservazione dell'energia o di Bernoulli*), data da

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma P_\infty}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] - \frac{G_{eff} M_{BH}}{r} = 0 . \quad (3.6)$$

### 3.3 Normalizzazione delle equazioni

Anche in questo caso si semplifica il problema normalizzando le variabili  $r$ ,  $v$  e  $\rho$  che entrano in gioco nelle equazioni fondamentali, come già fatto nel precedente capitolo.

Considerando sempre la velocità del suono locale, definita nel Cap.2, il campo di velocità della distribuzione di gas è dato dall'eq. (2.1.14). Rimangono inoltre invariate le normalizzazioni della densità e della temperatura del plasma (rispettivamente eq. [2.1.11] ed eq. [2.1.12]).

Indichiamo invece con

$$\xi \equiv \frac{\dot{M}_v}{\dot{M}_{Edd}} \quad (3.7)$$

il tasso di accrescimento vero normalizzato al tasso di accrescimento necessario per sostenere la luminosità di Eddington e definiamo il *raggio di Bondi rivisitato* come

$$r_{B_V} \equiv \frac{G_{eff} M_{BH}}{c_{S_\infty}^2} = \frac{G M_{BH}}{c_{S_\infty}^2} (1 - \xi) \quad (3.8)$$

dove si mantiene l'interpretazione originale del modello classico, per cui  $r_{B_V}$  è la distanza dal SMBH alla quale l'energia cinetica del gas in caduta è dello stesso ordine di grandezza dell'energia termica del gas all'infinito.

Si ricavano così le distanze adimensionali dal buco nero, date da

$$y \equiv \frac{r}{r_{B_V}} = \frac{x}{1 - \xi} . \quad (3.9)$$

Procedendo alla sostituzione delle variabili, le eq. (3.4) e (3.6) assumono la forma rispettivamente

$$\lambda_v \equiv x^2 (1 - \xi)^{-2} u \tilde{\rho}^{\frac{\gamma+1}{2}} = \frac{\dot{M}_v c_{S_\infty}^3}{4 \pi G^2 (1 - \xi)^2 M_{BH}^2 \rho_\infty} \quad (3.10)$$

$$\tilde{\rho}^{\gamma-1} u^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)u^2} \right] = \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1-\xi}{x}. \quad (3.11)$$

Si può vedere ora come entrambe le equazioni fondamentali del problema di Bondi rivisitato risentano del contributo della pressione di radiazione. Si noti di conseguenza che il tasso di accrescimento vero,  $\dot{M}_v$ , determinato dalle condizioni ambiente del gas, risulta essere proporzionale a  $(1 - L / L_{Edd})^2$ .

### 3.4 Procedura risolutiva

Procedendo come al Capitolo 2, dalle eq. (3.10) e (3.11) si arriva alla formulazione matematica del problema rivisitato, strutturalmente simile a quella originale.

In quanto funzione universale per il problema dell'accrescimento, poiché indipendente dal potenziale gravitazionale considerato,  $g(u)$  rimane invariata, mentre  $f(x)$  e  $\Lambda_v$  risentono del contributo della radiazione. Per cui abbiamo

$$g(u) = \Lambda_v f(x) \quad (3.12)$$

dove

$$f(x) \equiv x^{\frac{4(\gamma-1)}{(\gamma+1)}} \left( \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1-\xi}{x} \right) \quad (3.13)$$

$$\Lambda_v \equiv \lambda_v^{\frac{2(1-\gamma)}{(\gamma+1)}} (1-\xi)^{\frac{4(1-\gamma)}{\gamma+1}}. \quad (3.14)$$

Si noti che  $\Lambda_v$  dipende sia dall'indice politropico che dal parametro  $\xi$ , ossia  $\Lambda_v(\gamma, \xi)$ , dove per  $\xi = 0$  si ricade nel caso classico.

Come visto in precedenza, una volta determinata la funzione  $u = u(x)$ , per  $\lambda_v$  e  $\gamma$  fissati, tramite lo studio asintotico dell'eq. (3.12), il problema è completamente risolto

e si possono quindi stimare le variabili  $c_s$ ,  $v$  e  $T$ , questa volta dipendenti anche loro dalla pressione di radiazione.

Risulta infatti

$$\tilde{\rho} \propto \left[ \frac{(1-\xi)^2}{x^2 u} \right]^{\frac{2}{\gamma+1}} \quad (3.15)$$

da cui

$$c_s \propto \tilde{\rho}^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (3.16)$$

$$v \propto u \tilde{\rho}^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (3.17)$$

$$T \propto \tilde{\rho}^{\gamma-1}. \quad (3.18)$$

Studiamo adesso il problema in regimi asintotici nel caso in cui si ha  $\lambda_v = \lambda_{v CRIT}$ , dove in primo luogo andiamo a calcolare, qui di seguito, il valore di  $\lambda_{v CRIT}$  per il modello di Bondi rivisitato.

### 3.5 Autovalore vero

Riprendiamo ora il calcolo del parametro  $\lambda$  nel caso di accrescimento critico, per sondare eventuali differenze, di quest'ultimo, rispetto all'analogo del modello classico.

Per un  $\gamma$  assegnato, abbiamo già visto come il valore di  $\lambda_{v CRIT}$  si definisca tramite l'eq. (3.12) nel punto in cui sia  $g(u)$  che  $f(x)$  sono minime.

Essendo invariata rispetto al modello classico, la prima funzione continua ad assumere valore minimo per  $u_{min} = 1$ , che corrisponde al punto sonico ( $v = c_s$ ), come nel caso precedente. Per quanto riguarda la seconda funzione invece, la posizione di minimo si ha per

$$x_{min} = \frac{5-3\gamma}{4} (1-\xi) \quad (3.19)$$

da cui

$$f_{min} = \frac{1}{4} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left( \frac{5-3\gamma}{4} \right)^{-\frac{(5-3\gamma)}{\gamma+1}} (1-\xi)^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}} \quad (3.20)$$

ovvero  $f_{min}$  si sposta a raggi più piccoli all'aumentare di  $\xi$ .

Riprendendo quindi l'eq. (3.12) e considerando i valori  $g_{min}$  e  $f_{min}$  abbiamo infine

$$\lambda_{\nu CRIT} = \left[ \frac{f_{min}}{g_{min}} (1-\xi)^{-\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{1}{4} \left( \frac{2}{5-3\gamma} \right)^{\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}}, \quad (3.21)$$

primo risultato fondamentale del lavoro di Tesi.

Si noti infatti che,  $\lambda_{\nu CRIT}$  (*modello di Bondi rivisitato*)  $\equiv \lambda_{CRIT}$  (*modello standard di Bondi*), ossia il valore critico del tasso di accrescimento normalizzato non dipende dalla pressione di radiazione ma solo dal tipo di fluido accresciuto. Questo è il primo risultato del lavoro di Tesi e ci permette di studiare in modo rigoroso l'andamento di  $\dot{M}_{\nu}$  in funzione del tasso di accrescimento di Bondi,  $\dot{M}_B$ .

Ci soffermiamo prima brevemente sullo studio asintotico dell'eq. (3.12) per alcune considerazioni.

### 3.6 Studio asintotico

Analizziamo il problema dell'accrescimento sferico su una sorgente compatta con pressione di radiazione, nel caso in cui  $\lambda_{\nu} = \lambda_{\nu CRIT}$ , tramite analisi asintotica nei due regimi:  $x \gg 1$  e  $x \ll 1$ , così come è stato fatto nel modello classico di Bondi.

Nel caso di campo lontano,  $x \gg 1$ , la funzione  $f(x)$  si comporta asintoticamente come già visto nella trattazione precedente (§.2.1.5, eq. [2.1.27]), ossia, è divergente e di

conseguenza, sempre per validità della condizione (3.12), anche l'andamento di  $g(u)$  rimane invariato nei due regimi subsonico e supersonico. Sostituendo quindi, nella formulazione matematica del problema, gli andamenti delle due funzioni nei casi  $u \gg 1$  e  $u \ll 1$ , si hanno

$$u \approx \left( \frac{2}{\gamma - 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{4}} \lambda_{V CRIT}^{\frac{1-\gamma}{2}} \left( \frac{x}{1-\xi} \right)^{\gamma-1} \quad (3.22)$$

$$u \approx \lambda_{V CRIT} \frac{(1-\xi)^2}{x^2} \quad (3.23)$$

rispettivamente *soluzione di vento* e *soluzione di accrescimento* in campo lontano.

Nel caso di *campo vicino*,  $x \ll 1$ , la funzione  $f(x)$  continua ad essere divergente ma dipendente questa volta dalla pressione di radiazione secondo

$$f(x) \approx x^{\frac{3\gamma-5}{\gamma+1}} (1-\xi) \quad (x \rightarrow 0). \quad (3.24)$$

Considerando quindi gli andamenti subsonico e supersonico della funzione  $g(u)$ , dall'eq. (3.12) ricaviamo rispettivamente la *soluzione di vento*

$$u \approx (\gamma - 1)^{\frac{\gamma+1}{2(1-\gamma)}} \lambda_{V CRIT} \left( \frac{x}{1-\xi} \right)^{\frac{3\gamma-5}{2(1-\gamma)}} \quad (3.25)$$

e la *soluzione di accrescimento*

$$u \approx 2^{\frac{\gamma+1}{4}} \lambda_{V CRIT}^{\frac{1-\gamma}{2}} \left( \frac{x}{1-\xi} \right)^{\frac{3\gamma-5}{4}}. \quad (3.26)$$

Poiché  $\lambda_V CRIT \equiv \lambda_{CRIT}$  (risultato fondamentale di questo lavoro), ossia il tasso di accrescimento critico normalizzato ottenuto dal modello rivisitato coincide con l'analogo dato dal modello standard di Bondi, possiamo considerare la soluzione di accrescimento in campo vicino (relazione [3.26]) in funzione solamente della distanza adimensionale dal buco nero:

$$u \propto \left( \frac{x}{1-\xi} \right)^{\frac{3\gamma-5}{4}} \quad (3.27)$$

e ricavare gli andamenti asintotici di  $\rho$ ,  $v$  e  $T$  rispettivamente dalle equazioni (3.15), (3.17) e (3.18) in modo da verificare eventuali differenze con la trattazione classica.

Per cui si ha:

$$\rho \propto \left( \frac{1-\xi}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.28)$$

$$v \propto \left( \frac{1-\xi}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

$$T \propto \left( \frac{1-\xi}{r} \right)^{\frac{3}{2}(\gamma-1)}. \quad (3.30)$$

Si noti che l'andamento di tali grandezze rimane nel caso  $\lambda_v = \lambda_{v CRIT} \equiv \lambda_{CRIT}$ , quello di caduta *free-fall* e che considerando il contributo della pressione di radiazione, ossia il feedback radiativo, i valori di  $\rho$ ,  $v$  e  $T$  ad uno stesso  $r$  dal SMBH sono ridotti di un fattore  $(1-\xi)^\alpha$  rispetto alla trattazione classica di Bondi<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Dove  $\alpha$  è un esponente numerico che assume i valori  $\alpha = 3/2, 1/2$  e  $3/2(\gamma-1)$  rispettivamente per  $\rho$ ,  $v$  e  $T$ .

## **Capitolo 4**

### **RISULTATI**

In questa parte finale verrà portato a termine lo studio del lavoro di Tesi. Verrà analizzato l'andamento del tasso di accrescimento *vero*, dato dal modello di Bondi rivisitato col contributo della pressione di radiazione, in funzione del tasso di accrescimento che verrebbe stimato, applicando la trattazione standard alle medesime condizioni al contorno.

## 4.1 Studio dell'autovalore

Vogliamo studiare il comportamento del tasso di accrescimento vero,  $\dot{M}_V$  al variare di  $\dot{M}_B$ , tasso che verrebbe stimato applicando la Teoria standard, nel caso particolare di accrescimento critico definito da  $\lambda_V = \lambda_{V\ CRIT} \equiv \lambda_{CRIT}$  (si veda § 3.5).

Date quindi le due espressioni che descrivono rispettivamente il tasso di accrescimento vero (eq. [3.10]) per  $\lambda_V = \lambda_{V\ CRIT}$ , e il tasso di accrescimento di Bondi (eq. [2.1.43], Cap.2),

$$\dot{M}_V = \frac{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho_\infty}{c_{S\infty}^3} (1-\xi)^2 \lambda_{V\ CRIT}, \quad (4.1)$$

$$\dot{M}_B = \frac{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho_\infty}{c_{S\infty}^3} \lambda_{CRIT}, \quad (4.2)$$

l'equazione che andiamo a studiare è data dal loro rapporto. Ricordiamo che la relazione (4.2) da cui si ottiene  $\dot{M}_B$  si ricava applicando la Teoria standard.

Per cui, considerando il risultato rilevante  $\lambda_{V\ CRIT} \equiv \lambda_{CRIT}$  (appena trovato nel capitolo precedente), che rende rigorosa la nostra analisi, si ottiene

$$\boxed{\frac{\dot{M}_V}{\dot{M}_B} = \left(1 - \frac{\dot{M}_V}{\dot{M}_{Edd}}\right)^2.} \quad (4.3)$$

Per semplificare la trattazione dividiamo, al primo membro, numeratore e denominatore per il tasso di accrescimento di Eddington. Quest'ultima grandezza fisica è considerata quale discriminante tra *regime sub-Eddington* e *regime super-Eddington*. Indichiamo poi con

$$\dot{m} = \frac{\dot{M}_B}{\dot{M}_{Edd}} \quad (4.4)$$

il tasso di accrescimento di Bondi normalizzato che verrebbe stimato nella Teoria classica. Inserendo tale quantità insieme alla normalizzazione  $\xi = \dot{M}_V / \dot{M}_{Edd}$  nell'eq. (4.3) così rielaborata, otteniamo l'equazione di secondo grado

$$\xi^2 - \left(2 + \frac{1}{\dot{m}}\right)\xi + 1 = 0 \quad (4.5)$$

avente determinante

$$\Delta = \left(2 + \frac{1}{\dot{m}}\right)^2 - 4 > 0 \quad \text{poiché} \quad \dot{m} > 0 . \quad (4.6)$$

Dobbiamo quindi studiare le soluzioni di tale equazione.

La prima considerazione che possiamo fare è che, l'equazione (4.5) presenta due variazioni di segno dei coefficienti e quindi, essendo il determinante positivo, la regola di Cartesio assicura che le sue radici sono reali positive. Questa prima analisi insieme al fatto che  $\xi = 1$  (ossia  $\dot{M}_V = \dot{M}_{Edd}$ ) non verifica l'eq. (4.5), è un indizio di un comportamento peculiare delle stesse soluzioni. Ciò, infatti, indirizza il nostro studio verso due possibili risultati interessanti: se le soluzioni sono entrambe minori dell'unità, bisogna in primo luogo determinare quale delle due è quella di accrescimento e conseguentemente capire il perché di un flusso sub-Eddington ( $\dot{M}_V < \dot{M}_{Edd}$ ); mentre nel caso vi sia una soluzione maggiore dell'unità bisogna indagare il perché la trattazione sembri prevedere anche accrescimenti super-Eddington ( $\dot{M}_V > \dot{M}_{Edd}$ ).

Prima, però, di risolvere l'equazione e discuterne il senso fisico è utile studiare il comportamento asintotico delle soluzioni

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left[ \left(2 + \frac{1}{\dot{m}}\right) - \sqrt{\Delta} \right] \quad (4.7)$$

e

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \left[ \left(2 + \frac{1}{\dot{m}}\right) + \sqrt{\Delta} \right] \quad (4.8)$$

nei due regimi:  $\dot{m} \rightarrow 0$  e  $\dot{m} \rightarrow \infty$ .

CASO A: *Basso accrescimento* stimato dalla Teoria standard ( $\dot{m} \rightarrow 0$ ). Risolvendo l'eq. (4.5), con sviluppo di Taylor di second'ordine per il termine  $\sqrt{\Delta}$ , si ottengono i due andamenti asintotici

$$\xi_1 \cong \dot{m} > 0$$

per  $\dot{m} \rightarrow 0$

$$\xi_2 \cong 2 + \frac{1}{\dot{m}} > 0 .$$

Possiamo quindi concludere preliminarmente che una delle due soluzioni ( $\xi_1$ ) segue l'andamento del tasso di accrescimento classico normalizzato, essendo comunque ridotta in valore di un fattore  $(1 - \xi)^2$  (si veda eq. [4.3]), mentre l'altra ( $\xi_2$ ) mostra un andamento asintotico del tutto differente e dovrà quindi essere ulteriormente studiata.

CASO B: *Alto accrescimento* stimato dalla Teoria standard ( $\dot{m} \rightarrow \infty$ ). In questo regime asintotico dalla formula risolutiva (eq.[4.7] ed eq.[4.8]) si ottengono direttamente i due andamenti

$$\xi_1 \cong 1 - \dot{m}^{-\frac{1}{2}} < 1$$

per  $\dot{m} \rightarrow \infty$

$$\xi_2 \cong 1 + \dot{m}^{-\frac{1}{2}} > 1 .$$

Dai risultati dello studio asintotico si deduce quindi che, per un  $\dot{m}$  fissato, vale la relazione d'ordine  $\xi_1 < 1 < \xi_2$ .

Per la soluzione,  $\xi_1 < 1$ , rappresentata in Figura 4.2, possiamo dire che:

- $\xi_1$  è consistente con una soluzione di accrescimento, in quanto per bassi regimi di accrescimento segue la trattazione standard, la quale si ritiene essere fisicamente corretta;
- tale soluzione pur avendo lo stesso andamento del tasso di accrescimento stimato dalla Teoria standard si mantiene, in valore, inferiore a questo di un fattore  $(1 - \xi)^2$  (si veda eq. [4.3]). Qual è il senso fisico di tale correzione?

Poiché il tasso normalizzato di accrescimento classico,  $\dot{m}$ , non tiene conto della pressione di radiazione, risulta evidente che il diverso comportamento della soluzione  $\xi_1$ , che invece risente degli effetti dovuti alla luminosità di accrescimento,  $L_{BH}$ , sia dovuto proprio al feedback radiativo. Infatti essendo la direzione della radiazione uscente - generata durante la caduta di materia sul SMBH - contraria a quella del flusso in accrescimento, parte del materiale viene

frenato; ossia nell'unità di tempo la quantità di materia in caduta verso il SMBH sarà minore.

Tale interpretazione è consistente con l'ipotesi iniziale (si veda Sezione 2.2) di flusso di Bondi in accrescimento sottoposto a un'accelerazione gravitazionale effettiva

$$G_{\text{eff}} \equiv G (1 - \xi) \quad (4.9)$$

ridotta di un fattore  $(1 - \xi)$  rispetto alla trattazione standard;

- infine, mentre nel modello classico di Bondi non viene preso in considerazione nessun processo capace di limitare il fenomeno di accrescimento su SMBH ( $\dot{m} \rightarrow \infty$ ), risulta invece  $\xi_1 < 1$ . Il processo di accrescimento è quindi limitato dagli effetti del feedback radiativo.

Possiamo affermare che  $\xi_1$  è la *soluzione di accrescimento* che si ottiene quale stima della Teoria standard di Bondi rivisitata tenendo conto degli effetti della pressione di radiazione e che tale soluzione si mantiene inferiore all'unità.

Tale risultato è in accordo con quanto Fukue (2001) ha sviluppato in modo non rigoroso, partendo dalla trattazione classica di Bondi. Considerando gli effetti della radiazione generata dal processo di accrescimento, Fukue è arrivato infatti a determinare una soglia massima per il tasso di accrescimento prossima al limite di Eddington (Figura 4.1).

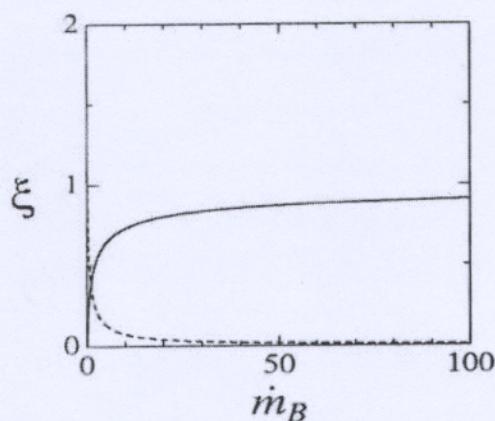


Figura 4.1: Andamento della luminosità canonica normalizzata  $\Gamma_{\text{can}} = L_{\text{can}} / L_{\text{Edd}}$  (curva solida) e del tasso di accrescimento normalizzato  $m = \dot{M} / \dot{M}_{\text{Edd}}$  (curva tratteggiata) in funzione del tasso di accrescimento di Bondi normalizzato  $\dot{m}_B = \dot{M}_B / \dot{M}_{\text{Edd}}$ . (Figura tratta da Fukue 2001).

Rimane ora da considerare la soluzione  $\xi_2 > 1$ , rappresentata in Figura 4.2.

Chiaramente tale soluzione è inconsistente con un accrescimento. L'andamento di  $\xi_2$  corrisponde infatti ad una soluzione di vento, conforme ad una gravità effettiva positiva ( $G_{eff} < 0$ , eq. [4.9]), la cui esistenza è assicurata dalla parità del termine di velocità nell'equazione di Bernoulli ( eq. [3.6], Capitolo 3).

## 4.2 Conseguenze sul tasso di accrescimento di un SMBH

Nel precedente paragrafo abbiamo ottenuto una stima del tasso di accrescimento vero,  $\xi$ , in funzione del tasso di accrescimento definito dalla Teoria classica,  $\dot{m}$ , entrambi normalizzati a Eddington. Abbiamo verificato che, nel caso di accrescimento con pressione di radiazione, la quantità di materia che cade nell'unità di tempo sul SMBH è ridotta di un fattore  $(1 - \xi)^2$  rispetto a quanto descritto dalla trattazione standard di Bondi.

Andiamo a vedere ora cosa comporta tale risultato nel caso particolare di accrescimento al limite di Eddington.

Per  $\dot{m}=1$  dalla formula risolutiva (4.7) si ottiene  $\xi \approx 0.4$ .

Questo è un risultato molto interessante, infatti in letteratura astrofisica si fanno spesso considerazioni che utilizzano una crescita dei buchi neri stazionari ad Eddington; da quanto appena trovato, tale assunzione porta a una sovrastima di circa il 60%.

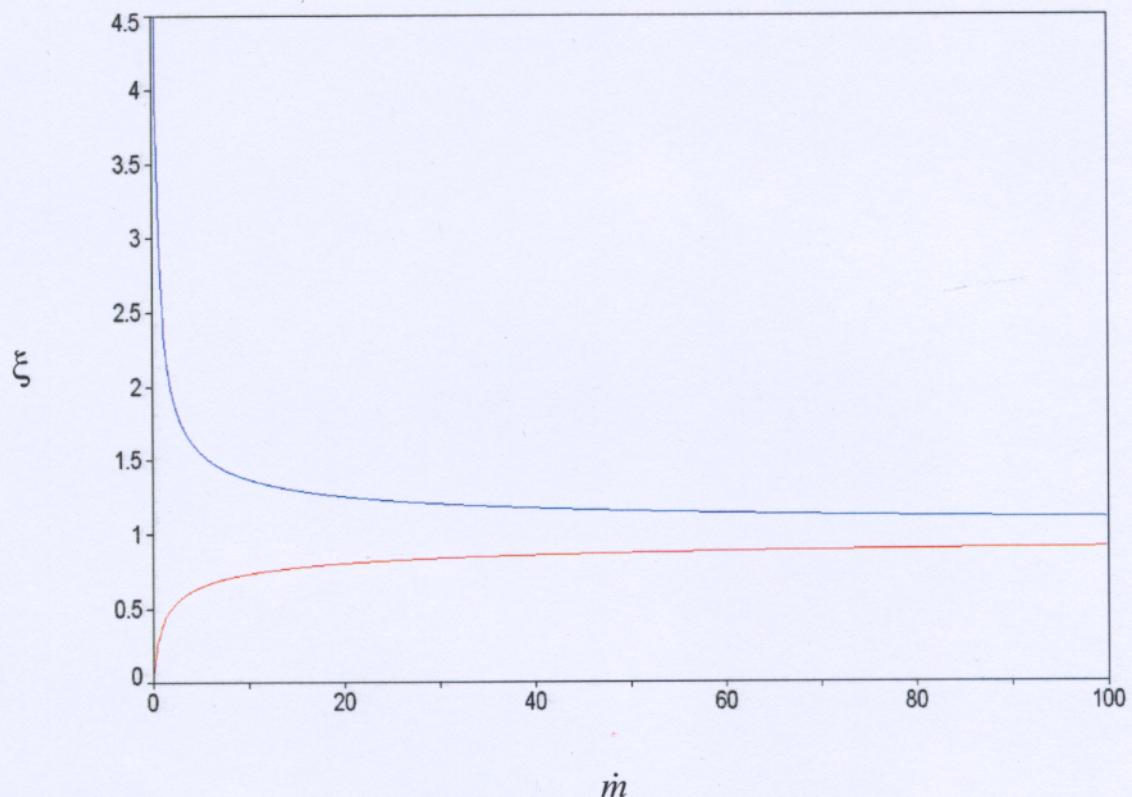


Figura 4.2 : Andamento del tasso di accrescimento vero normalizzato  $\xi = \dot{M}_V / \dot{M}_{Edd}$  in funzione del tasso di accrescimento di Bondi normalizzato  $\dot{m} = \dot{M}_B / \dot{M}_{Edd}$ .  
 (curva rossa: accrescimento; curva blu: vento)

## **Capitolo 5**

### **CONCLUSIONI**

Scopo di questa Tesi era quello di studiare all'interno del modello di Bondi (1952) gli effetti dovuti alla pressione di radiazione, generata dallo stesso processo di accrescimento, sul flusso di materia in caduta.

In questo capitolo verranno quindi ripresi i risultati da cui siamo precedentemente partiti e redatti quelli ottenuti nel lavoro di sviluppo. Vengono infine proposte, eventuali ipotesi verso cui indirizzare ricerche future sullo studio degli effetti del feedback radiativo all'interno del processo di accrescimento.

## 5.1 Considerazioni finali

Scopo di questa Tesi era quello di studiare, tramite estensione del modello classico di Bondi, il comportamento del tasso di accrescimento su un SMBH in presenza della pressione di radiazione. Tutto questo rimanendo nell'ipotesi di stazionarietà propria del modello di Bondi.

Riprendiamo brevemente qui di seguito i risultati del lavoro di Tesi, citando inizialmente quelli da cui siamo partiti, per evidenziarne eventuali limiti.

Dalla trattazione standard di Bondi (1952) risulta che il caso fisicamente più probabile è quello in cui il tasso di accrescimento ha valore massimo,  $\dot{M}_B$  ( $\lambda \equiv \lambda_{CRIT}$ ) e che soluzioni transoniche sono possibili solo per questo valore critico del parametro di accrescimento (si veda § 2.1.7). Si noti che si è arrivati a tale limite prendendo in considerazione solo gli effetti dinamici (moto relativo SMBH – fluido).

Parallelamente, dalla trattazione puramente radiativa del processo di accrescimento sferico su SMBH si arriva a definire  $L_{Edd}$ , *Luminosità di Eddington*, a cui corrisponde il tasso di accrescimento massimo  $\dot{M}_{Edd}$ . Si deduce che, quando  $L_{BH} \approx L_{Edd}$ , l'attrazione gravitazionale del buco nero viene bilanciata dalla pressione di radiazione e l'accrescimento viene interrotto.

Introducendo quindi gli effetti della radiazione, prodotta durante la caduta di materia sul SMBH, nella trattazione standard di Bondi, si ottiene:

- primo risultato rilevante è l'indipendenza, in caso di accrescimento critico, del parametro  $\lambda_V$  dalla pressione di radiazione, per cui si ha

$$\lambda_{VCRIT} (\text{modello di Bondi rivisitato}) \equiv \lambda_{CRIT} (\text{modello standard di Bondi});$$

- $\dot{M}_V$ , tasso di accrescimento stimato dalla Teoria standard di Bondi rivisitata

$\dot{M}_B$ ,

con  $(\dot{M}_V / \dot{M}_{Edd})$ : pressione di radiazione è ridotto in valore di un fattore  $(1 - \xi)^2$

$$\dot{M}_V = \dot{M}_B (1 - \xi)^2;$$

rispetto a con  $\xi =$

- ed infine risulta, nel caso di accrescimento a Eddington, una sovrastima del 60% circa del tasso di accrescimento stimato dalla trattazione standard. Infatti:

per  $m=1$  si trova  $\xi \approx 0.4$ .

In conclusione, in questo lavoro ci siamo focalizzati sullo studio del rate di accrescimento sferico su un SMBH in presenza di pressione di radiazione,  $\dot{M}_v$ , trovando, in caso di accrescimento a Eddington, una sovrastima del tasso ottenuto tramite trattazione standard di Bondi,  $\dot{M}_B$ , di circa il 60%.

Poiché  $\dot{M}_B$  è spesso utilizzato in letteratura astrofisica per stimare l'emissione attesa da un SMBH avente massa  $M_{BH}$  circondato da un gas di data densità e temperatura, può essere quindi interessante, tramite survey  $X$ , stimare la luminosità  $L_{X,nucl}$  di sorgenti centrali in galassie, considerando questa volta  $\dot{M}_v$ . Risulta infatti in tali osservazioni una sistematica sovrastima di  $L_{X,nucl}$ .

In aggiunta, le nostre considerazioni portano anche a riconsiderare i tassi di accrescimento utilizzati per spiegare la massa attuale dei buchi neri al centro di galassie. È ovvio infatti che, se ad un accrescimento stimato al limite di Eddington nel caso standard, corrisponde in realtà un accrescimento sostanzialmente ridotto, questo significa che il periodo di accrescimento medio dei buchi neri debba essere stato proporzionalmente più lungo.

## BIBLIOGRAFIA

- Binney, J. J., & Tabor, G. 1995, MNRAS, 276, 663
- Bondi, H. 1952, MNRAS, 112, 195
- Chang, K. M., & Ostriker, J. P. 1985, ApJ, 288, 428
- Ciotti, L., & Ostriker, J. P. 1997, ApJ, 487, L105
- Ciotti, L., & Ostriker, J. P. 2001, ApJ, 551, 131
- Ciotti, L., & Ostriker, J. P. 2007, (astro-ph/0703057v2)
- Einstein, A. 1916, AdP, 49, 769
- Ferrarese, L., & Merritt, D. 2000, ApJ, 539, L9
- Frank, J., King, A., & Raine, D. 2002, *Accretion Power in Astrophysics*, (Cambridge: Cambridge University Press), 3
- Fukue, J. 2001, PASJ, 53, 687
- Gebhardt, K., et al. 2000a, ApJ, 539, L13
- Magorrian, J., et al. 1998, AJ, 115, 2285
- Marconi, A., & Hunt, L. K. 2003, ApJ, 589, L21
- McLure, R. J., & Dunlop, J.S. 2002, MNRAS, 331, 795
- Narayan, R., & Yi, I. 1994, ApJ, 428, L13
- Narayan, R., & Yi, I. 1995, ApJ, 444, 231
- Nobili, L., et al. 1991, ApJ, 383, 250
- Ostriker, J. P., & Ciotti, L. 2005, Phil.Trans. of Roy.Soc., part A, 363, 667
- Park, M., -G. 1990b, ApJ, 354, 83
- Park, M. -G., & Ostriker, J.P. 1989, ApJ, 347, 679
- Park, M. -G., & Ostriker, J.P. 1998, Adv. Space Res., 22, 951

Pedaletti, G. 2005, *Accrescimento di Bondi su Buchi Neri in Galassie*, tesi di laurea discussa presso l'Università degli Studi di Bologna

Pellegrini, S. 2005, ApJ, 624, 155

Quataert, E., & Gruzinov, A. 2000, ApJ, 539, 809

Quataert, E., & Narayan, R. 1999, ApJ, 520, 298

Rees, M. J. 1984, ARAA, 22, 471

Sazonov, S. Yu., Ostriker, J. P., Ciotti, L., & Sunyaev, R. A. 2005, MNRAS, 358, 168

Tremaine, S., Gebhardt, K., Bender, R., et al. 2002, ApJ, 574, 740

Xu, B. -X., & Wu, X. -B. 2007, ApJ, 667, 92