ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Astronomia

UNA FAMIGLIA DI SISTEMI STELLARI TOROIDALI

Tesi di Laurea in Astrofisica

Relatore:
Prof. Luca Ciotti

Presentata da:
Francesco Giuseppe Bruno

Correlatori:
Dott. Carlo Nipoti,
Dott. Pasquale Londrillo

Sessione I
Anno Accademico 2007-2008

18/7/08

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Astronomia

UNA FAMIGLIA DI SISTEMI STELLARI TOROIDALI

Tesi di Laurea in Astrofisica

Relatore:
Prof. Luca Ciotti

Correlatori:
Dott. Carlo Nipoti,
Dott. Pasquale Londrillo

Presentata da:
Francesco Giuseppe Bruno

Sessione I
Anno Accademico 2007-2008

non credo in niente

e tutto mi affascina

Indice

1 Introduzione **13**

1.1 Modelli di sistemi stellari non-collisionali 14

1.2 Una nuova famiglia di sistemi stellari 15

1.3 Strutture toroidali in Astrofisica 16

1.4 Organizzazione della Tesi 18

2 Richiami di dinamica dei sistemi non-collisionali **21**

2.1 I sistemi non-collisionali 22

2.2 Lo spazio delle fasi e la funzione di distribuzione 22

2.3 Una descrizione Euleriana 25

2.4 Gli integrali primi del moto e il Teorema di Jeans 27

3 I nostri modelli nello spazio delle fasi **29**

3.1 La funzione di distribuzione 30

3.1.1 Costruire la funzione di distribuzione 31

3.2 Le funzioni macroscopiche nel caso $\Omega_p = 0$ 36

3.2.1 La densità 37

3.2.2 I momenti della velocità 38

3.3 Il caso della politropica generalizzata 40

3.4 L'equazione di Poisson 41

4 Soluzione numerica dell'equazione di Poisson **45**

4.1 L'equazione di Poisson 46

4.1.1 Le soluzioni nel piano meridionale 46

4.1.2 La trasposizione sulla griglia 48

4.2 La procedura numerica 50
4.2.1 Le approssimazioni adottate 51

5 I risultati **57**
5.1 Premesse 58
5.2 L'andamento delle soluzioni 60
5.2.1 Modelli con $\beta = 0.5$ 60
5.2.2 Modelli con $\beta = 1$ 64
5.2.3 Modelli con $\beta = 2$ 74
5.2.4 La famiglia dei modelli con $\alpha = 0$ 79

6 Conclusioni **85**
6.1 Conclusioni 86
6.2 Possibili sviluppi futuri 89

A Strumenti matematici **91**
A.1 Approssimare una derivata di ordine n-esimo 91
A.2 L'approssimazione dell'operatore L_r 99
A.3 Il metodo della successione di Newton 103
A.4 I polinomi di Legendre 105

B Il codice **109**
B.1 Descrizione del codice 109
B.1.1 La procedura principale 109
B.1.2 La subroutine `psolv` 119
B.2 I diagrammi di flusso 120

Ringraziamenti **121**

Bibliografia **122**

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Modelli di sistemi stellari non-collisionali

I modelli di sistemi stellari *non-collisionali* rivestono un ruolo astrofisico importante nell'interpretazione di oggetti come le galassie. Tra questi i modelli con simmetria sferica sono stati largamente indagati data la semplice geometria coinvolta, senza direzioni privilegiate, e le informazioni utili che comunque si possono ricavare. Citiamo ad esempio il modello di Plummer [5], che descrive un sistema isotropo, auto-gravitante e con espressione per la densità analoga a quella di una sfera di gas politropico; i modelli di King [6] o di Wilson [7] sempre isotropi ma troncati; i modelli di Sersic [8], con profilo di luminosità che generalizza la legge di de Vacouleurs [9]. In natura però sono rari i casi adeguatamente descritti dalla sfera: possiamo considerare i modelli sferici come approssimazioni di ordine zero di sistemi reali. Trattare sistemi non-sferici è quindi interessante ma allo stesso tempo implica una maggiore complessità. Ricavare il potenziale gravitazionale presenta difficoltà soprattutto di carattere analitico e la mancanza della condizione di isotropia rende la dinamica interna più articolata. Ad esempio i modelli assisimmetrici f_∞ di Bertin & Stiavelli [10] riproducono la distribuzione di densità luminosa di galassie ellittiche partendo da argomentazioni di Meccanica Statistica, o ancora quelli di Satoh [11] anch'essi assisimmetrici, generalizzano la sfera di Plummer effettuando uno "schiacciamento" dei poli.

Un modello di sistema stellare è definito dalla sua *funzione di distribuzione* f (anche indicata con DF, dall'inglese *distribution function*): una funzione non-negativa in $\mathbb{R}$, che descrive puntualmente la densità del sistema nello spazio delle fasi. Proprietà stutturali e dinamiche si ricavano a partire da questa [1]. Sfruttando la DF, sono possibili due approcci al probema della costruzione di modelli:

I. da f a ρ: partendo da f, come funzione di integrali primi del moto isolati, si ricavano la densità ρ e le altre grandezze. Quindi, perchéé il sistema abbia consistenza fisica, si risolve l'*equazione di Poisson* per il potenziale. Questo approccio è indicato se argomenti statistici o dinamici conducono ad un *ansatz* per la DF. Inoltre, le soluzioni ottenute

sono molto interessanti poiché rappresentano modelli di equilibrio fisicamente accettabili, anche se non necessariamente stabili. Un limite è l'impossibiltà di avere un controllo, a priori, del profilo di densità e delle altre quantità dinamiche risultanti.

II. da ρ a f: partendo da un profilo noto della densità ρ si ricava la funzione di distribuzione f sotto opportune ipotesi, di solito tramite l'inversione di equazioni integrali. È un approccio utile perché permette di partire da richieste precise sui profili, tipicamente motivate da osservazioni. Ha come limiti la non univocità della DF ricavata e sopratutto la mancanza di garanzie a priori sulla non-negatività di questa.

Noi costruiremo un modello di sistema stellare non-sferico, facendo ipotesi sulla funzione di distribuzione: dei due approcci indicati quindi seguiremo il primo.

1.2 Una nuova famiglia di sistemi stellari

In questo lavoro di Tesi presentiamo una nuova famiglia di modelli di sistemi stellari non-sferici che hanno come caratteristica l'essere

- *assisimmetrici,*
- *toroidali*
- e *troncati.*

Ne ricaviamo i profili di densità e le espressioni delle grandezze macroscopiche. Analizziamo il caso particolare di una *politropica generalizzata* [1] e risolviamo numericamente l'*equazione di Poisson* ad esso associata per mezzo di una procedura numerica basata sul *metodo della successione di Newton.* Illustriamo e discutiamo quindi i risultati al variare dei parametri di sistema e in assenza e in presenza di un potenziale esterno.

Un'indagine preliminare su alcuni casi particolari di modelli appartenenti alla famiglia qui presentata è stata documentata nell'articolo *Self-consistent stellar dynamical tori* di Ciotti, Bertin e Londrillo (2004) [12].

Per la vicinanza ai modelli trattati in questo elaborato, sono di particolare interesse quelli di Lynden-Bell [13], riguardanti profili di densità di ammassi globulari caratterizzati da simmetria assiale: questi per alcuni valori dei parametri impiegati generano strutture toroidali al centro dei sistemi, anche se probabilmente non stabili. Configurazioni toroidali auto-gravitanti per gas politropici sono più specificatamente trattate nel lavoro di Ostriker [14], ma di soluzioni che siano anche troncate non se ne conoscono.

L'interesse teorico è quindi dettato dalla possibilità di descrivere strutture fortemente non-sferiche, nello specifico toroidali e troncate.

1.3 Strutture toroidali in Astrofisica

La famiglia di modelli qui presentata può trovare riscontro interpretativo nelle diverse osservazioni che coivolgono presunti oggetti toroidali. Ad esempio, è probabile che i *box/peanut-shaped bulges*, interpretabili nella maggior parte dei casi come proiezioni di barre galattiche [15], determinino una struttura ad anello in corrispondenza delle regioni più esterne del rigonfiamento [16] e che tale anello corrisponda agli estremi interni della barra [17]: negli studi a cui facciamo riferimento, alle regioni interpretabili come proiezioni di un toro corrisponde un aumento di intensità del profilo luminoso osservato.

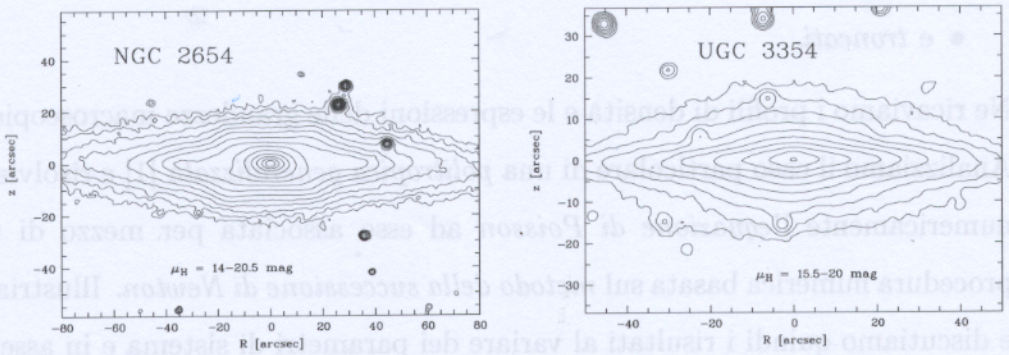


Figura 1.1: Curve isofote nelle osservazioni NIR di galassie con box/peanut-shaped bulge. A sinistra: NGC 2654 in the NIR. CA1, 25min in H. A destra: UGC 3354. CA1, 35min in H. (Le immagine sono prese dall'articolo "Box- and peanut-shaped bulges. II. NIR observations" [16])

Una maggiore evidenza di strutture toroidali viene da osservazioni fatte su galassie *early-type* con profili di luminosità che presentano una depressione centrale [18]. Dove sono disponibili dati raccolti in diversi colori, la diminuzione di intensità nella distribuzione luminosa non può essere associata ad assorbimento da parte di polveri, piuttosto è consistente con un toro di stelle che circonda il centro galattico, occupato con buona probabilità da una coppia di buchi neri super-massivi.

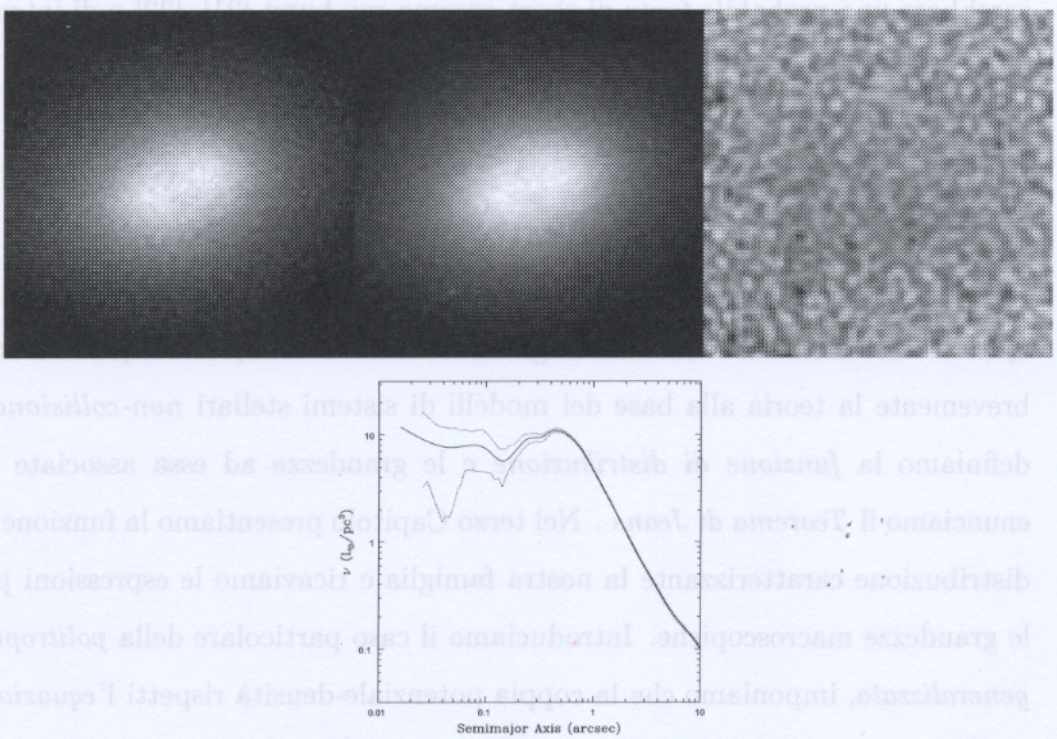


Figura 1.2: IN ALTO:La galassia NGC 6876 con depressione del profilo centrale di luminosità. I pannelli sinistro e centrale mostrano il suo nucleo in due filtri (F555W e F814W rispettivamente). Il pannello destro è il rapporto tra le due immagini. Le immagini ($4'' \times 4''$.) sono ottenute col WFPC2 dell'HST. IN BASSO: Il profilo di densità luminosa nella banda V per l'asse maggiore di NGC 6876. Le curve tratteggiate riportano l'inviluppo con l'errore $\pm 1\sigma$. Il profilo è stato corretto per l'estinzione. (Le immagini sono prese dall'articolo "Galaxies with a Central Minimum in Stellar Luminosity Density" [18])

In maniera meno diretta, i nostri modelli possono avere anche interessanti raffronti in contesti in cui gli oggetti del sistema non sono stelle ma molecole di

gas o partcelle di polvere. Ad esempio il Modello Standard Unificato degli AGN prevede una sorgente circondata da un toro di polveri [3]. Strutture toroidali sembrano essere coinvolte nei processi di formazione di alcuni sistemi stellari multipli [20] o in fasi evolutive di super giganti rosse che sono accompagnate da violente e instabili perdite di massa [19]. Ancora, il collasso ed il merging di stelle di neutroni doppie, per alcuni intervalli dei valori delle masse, risulterebbero nella formazione di buchi neri circondati da tori di polvere e sarebbero una probabile fonte di short gamma-ray burst [21], [22] o di intense onde gravitazionali [23].

1.4 Organizzazione della Tesi

Questa Tesi è strutturata come segue. Nel secondo Capitolo ripercorriamo brevemente la teoria alla base dei modelli di sistemi stellari *non-collisionali*, definiamo la *funzione di distribuzione* e le grandezze ad essa associate ed enunciamo il *Teorema di Jeans* . Nel terzo Capitolo presentiamo la funzione di distribuzione caratterizzante la nostra famiglia e ricaviamo le espressioni per le grandezze macroscopiche. Introduciamo il caso particolare della *politropica generalizzata*, imponiamo che la coppia potenziale-densità rispetti l'*equazione di Poisson* associata al sistema e ne diamo una formulazione adimensionale. Nel quarto Capitolo, una volta ridotto il problema al solo piano meridionale e trasposto sulla griglia numerica, descriviamo l'algoritmo che è stato usato per risolvere l'*equazione di Poisson*. Nel quinto Capitolo sono mostrati e discussi i risultati delle simulazioni numeriche. Indaghiamo l'intervallo di esistenza delle soluzioni e, al variare dei parametri, analizziamo il comportamento dei modelli ottenuti, sia per casi auto-gravitanti sia in presenza di un buco nero centrale. Il quinto Capitolo riporta le conclusioni. Nell'Appendice A sono illustrati alcuni tra gli strumenti matematici impiegati: l'approssimazione numerica delle derivazioni, il *Teorema di Newton* per la convergenza di successioni di funzioni e cenni sullo sviluppo in *polinomi di Legendre*. In fine, l'Appendice B raccoglie i diagrammi di flusso delle principali procedure del codice e la legenda

delle variabili usate e delle subroutine chiamate.

Capitolo 2

Richiami di dinamica dei sistemi non-collisionali

In questo Capitolo vengono ricordati gli aspetti teorici più importanti che riguardano le proprietà dei sistemi stellari non-collisionali.

2.1 I sistemi non-collisionali

I sistemi stellari argomento di questa Tesi sono immaginati composti da un numero N grande di oggetti. Assumere valida la possibilità di passare al continuo permette di descrivere un modello di sistema stellare tramite soltanto 6 coordinate – 3 per lo spazio usuale delle configurazioni e 3 per lo spazio delle velocità – anzi che $6N$. Nell'approssimazione in cui valgono le seguenti ipotesi:

1. le interazioni tra le stelle sono scorrelate, per cui l'effetto di ogni incontro è semplicemente addizionato a quello degli altri,

2. tutti gli incontri sono interazioni iperboliche a due corpi,

definiamo il *tempo di rilassamento* t_{2b} come il tempo necessario affinché un corpo di prova, che attraversa il sistema, subisca una variazione di energia a seguito degli incontri pari al valore iniziale della sua energia cinetica. Ricordo che il *tempo di rilassamento* è proporzionale al numero di oggetti N del sistema e al *tempo di attraversamento* t_{cross}, che è il tempo impiegato dal corpo di prova per attraversare il sistema, con una velocità caratteristica del sistema stesso [1],

$$t_{2b} \propto \frac{N}{\ln N} t_{cross} . \tag{2.1}$$

Un sistema per il quale non sia trascorso un tempo superiore a t_{2b} è tale che gli effetti cumulativi delle interazioni (collisioni) possono essere considerati trascurabili rispetto al potenziale gravitazionale medio. Un tale sistema è definito *non-collisionale* e l'approssimazione al continuo è dunque consentita.

Assumiamo i sistemi della nostra famiglia essere *non-collisionali.*

2.2 Lo spazio delle fasi e la funzione di distribuzione

Per costruire un modello di sistema stellare non-collisionale scegliamo come ambiente di lavoro lo spazio delle fasi γ, prodotto cartesiano dell'usuale spazio delle configurazioni con quello delle velocità: in coordinate cartesiane, $\gamma =$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$. Descriviamo puntualmente il sistema tramite la sua *funzione di distribuzione* (indicata in seguito anche con DF, dall'inglese *Distribution Function*) definita come:

$$f : \gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \tag{2.2}$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \geq 0 , \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \in \gamma \times \mathbb{R} , \tag{2.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d^3\mathbf{v} = \rho(\mathbf{x}, t) . \tag{2.4}$$

f è una funzione reale non-negativa con dominio nello spazio delle fasi *esteso* (messo cioè a prodotto cartesiano con l'intervallo dei tempi) e la cui integrazione sullo spazio delle velocità restituisce la densità ρ del sistema nel punto $\mathbf{x}$ all'istante t. Da quest'ultima proprietà segue che integrando ancora sull'intero volume dello spazio delle configurazioni si ha

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}, t)\, d^3\mathbf{x} = M(t) , \tag{2.5}$$

dove $M(t)$ è la massa totale del sistema all'istante t. Assumiamo inoltre che sia $M(t) < \infty$. La funzione di distribuzione, in pratica, restituisce puntualmente in $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ la densità del sistema nello spazio delle fasi γ all'istante di tempo t e la quantità

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{v}$$

dà la massa delle stelle che, all'istante di tempo t, sono presenti nel volumetto $d^3\mathbf{x}$ centrato su $\mathbf{x}$, nello spazio delle configurazioni, e con velocità compresa nell'intorno infinitesimo $d^3\mathbf{v}$ attorno a $\mathbf{v}$, dello spazio delle velocità.

È possibile definire *funzioni di distribuzione* analoghe alla (2.2)-(2.4), che ad esempio rappresentino la densità numerica del sistema piuttosto che quella di materia luminosa, ecc., [2]. Nella definizione (2.2)-(2.4) è però presente una ambiguità. Anche se i volumetti infinitesimali $d^3\mathbf{x}$ sono intesi essere sufficientemente grandi da contenere fisicamente qualche stella, in un sistema come una galassia la maggior parte dello spazio (delle configurazioni) non è occupato da stelle bensì, in senso lato, dal vuoto. Quindi la DF dovrebbe esser nulla quasi dappertutto. Queste difficoltà di interpretazione sono conseguenza dell'approssimazione al continuo di un sistema evidentemente discreto. Il

problema è presto superabile se intendiamo la funzione di distribuzione come *densità di probabilità* nello spazio delle fasi: la quantità $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\ d^3\mathbf{x}\ d^3\mathbf{v}$ interpreta così la probabiltà che una qualche massa si trovi, all'istante t, nel volumetto $d^3\mathbf{x}\ d^3\mathbf{v}$ attorno al punto $(\mathbf{x},\mathbf{v})$ dello spazio delle fasi γ.

Con questa interpretazione statistica la DF assume anche il ruolo di *funzione peso* nella descrizione del problema [2]. Sia infatti $G : \gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione generica del sistema che va dallo spazio delle fasi esteso in $\mathbb{R}$ e che chiameremo *funzione microscopica*, possiamo definire la sua *funzione macroscopica* associata $\bar{G}$ come la media di G, pesata su f, nello spazio delle velocità:

$$\bar{G}(\mathbf{x},t) \;=\; \frac{1}{\rho(\mathbf{x},t)} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\ f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\ d^3\mathbf{v}\ , \tag{2.6}$$

dove $\rho(\mathbf{x},t)$ è dato dall'equazione (2.4). Nella (2.6) quindi, f traduce la probabilità di trovare massa in un determinato punto di γ e $\bar{G}(\mathbf{x},t)$ è da intendere come il valor medio di G su tutte le velocità delle particelle che determinano la densità ρ in $\mathbf{x}$, al tempo t.

Delle funzioni macroscopiche che si definiscono, quelle più interessanti e rilevanti cinematicamente sono i *momenti della velocità*: indicando con i e j gli indici di due generiche coordinate nello spazio delle configurazioni, valgono le seguenti definizioni,

$$\overline{v_i}(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \int_{\Omega(\mathbf{x})} v_i\ f\ d^3\mathbf{v}\ , \tag{2.7}$$

$$\overline{v_i v_j}(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \int_{\Omega(\mathbf{x})} v_i\ v_j\ f\ d^3\mathbf{v}\ , \tag{2.8}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \int_{\Omega(\mathbf{x})} (v_i - \overline{v_i})\ (v_j - \overline{v_j})\ f\ d^3\mathbf{v}\ . \tag{2.9}$$

Se la prima funzione, detta *streaming velocity* o *velocità di flusso*, è la media ponderata sulla i-esima coordinata, la terza rappresenta invece lo scarto quadratico medio, come si nota più esplicitamente per $i = j$,

$$\sigma_i^2 \;=\; \sigma_{ii} \;=\; \overline{(v_i - \overline{v_i})^2}\ . \tag{2.10}$$

In generale vale la seguente relazione tra le tre grandezze,

$$\sigma_{ij} \;=\; \overline{v_i v_j} \;-\; \overline{v_i}\ \overline{v_j}\ . \tag{2.11}$$

Si noti che σ_{ij} è uguale a σ_{ji}. Definendo il *tensore di dispersione della velocità* σ^2, con componenti

$$[\sigma^2]_{ij} = \sigma_{ij} ,$$

questo è simmetrico ed esiste quindi, in ogni punto dello spazio delle configurazioni, un sistema di riferimento che lo diagonalizza. Con una semplice interpretazione geometrica [1], ad ogni punto del sistema stellare, associamo un *ellissoide di dispersione delle velocità* definito come

$$\sigma^2 = \sigma_{ij}\, n_i n_j , \quad \text{con} \parallel \mathbf{n} \parallel = 1 . \tag{2.12}$$

In generale, l'orientamento degli assi dell'ellissoide cambia da punto a punto, cioè cambia da punto a punto il riferimento che diagonalizza σ^2. Nel caso in cui l'ellissoide di dispersione fosse ovunque una sfera,

$$\sigma_{ij} = \sigma^2\, \delta_{ij} , \tag{2.13}$$

il tensore σ^2 è detto *isotropo*, altrimenti *anisotropo*. I *momenti della velocità* sono, in sostanza, campi di velocità nello spazio delle configurazioni, ottenuti come media ponderata delle coordinate cinetiche. Essi forniscono una descrizione della dinamica di sistema e a loro è associata la forma tensoriale del *teorema del viriale*, che mette in relazione l'energia cinetica e quella potenziale totali del sistema.

2.3 Una descrizione Euleriana

Da un punto di vista fisico, l'uso della funzione di distribuzione sottintende la scelta di una descrizione di tipo *Euleriano*: il sistema è osservato da un riferimento esterno e fisso, non solidale al moto delle singole stelle, e le grandezze fisiche associate sono interpretate come campi (scalari o vettoriali) nello spazio delle fasi. Una descrizione *Lagrangiana* del problema, invece, seguirebbe il moto di un singolo oggetto di sistema (o elemento di volume) nella sua evoluzione temporale. Volendo analizzare il moto della singola stella nello spazio delle fasi e lungo la sua orbita, senza abbandonare la descrizione *Euleriana*, la sola derivata temporale della DF non basta, perché

ci informerebbe solo di come varia la densità tra gli istanti t e $t+dt$ nel punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, senza tener conto che in quel tempuscolo la stella si sarà mossa. Usiamo quindi la traduzione Euleriana della derivata temporale Lagrangiana,

$$\begin{aligned}\frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + <\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}> + <\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}> = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + <\nabla_{\mathbf{x}} f, \dot{\mathbf{x}}> + <\nabla_{\mathbf{v}} f, \dot{\mathbf{v}}>,\end{aligned} \tag{2.14}$$

che si chiama appunto *derivata materiale in forma Lagrangiana* o semplicemente *derivata Lagrangiana*. Questa è anche la funzione che descrive il flusso di un fluido ideale, nello spazio delle fasi. Più precisamente nella quantità

$$\frac{Df}{Dt}\, d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial t}\, d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{v} + (<\nabla_{\mathbf{x}} f, \dot{\mathbf{x}}> + <\nabla_{\mathbf{v}} f, \dot{\mathbf{v}}>)\, d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{v} \tag{2.15}$$

il primo addendo indica il tasso di variazione della massa nel volumetto $d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{v}$, attorno al punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, mentre, applicando il *teorema della divergenza*, il secondo addendo ci dice a quanto rapidamente il fluido abbandoni il volumetto [2]. Posta uguale a zero la (2.14) restituisce l'equazione di continuità del fluido, che equivale a chiedere che le stelle – il nostro fluido – né scompaiano né vengano create, ma si conservino e al più traslino con continuità in γ.

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + <\nabla_{\mathbf{x}} f, \dot{\mathbf{x}}> + <\nabla_{\mathbf{v}} f, \dot{\mathbf{v}}> = 0. \tag{2.16}$$

Sostituendo le equazioni del moto nella (2.16),

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\dfrac{\partial \Phi_T}{\partial \mathbf{x}}, \end{cases} \tag{2.17}$$

si ottiene l'*equazione di Boltzmann non-collisionale* (in seguito CBE, dall'inglese *Collisionless Boltzmann Equation*).

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + <\mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}> - <\frac{\partial \phi_T}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial v}> = 0\,, \tag{2.18}$$

Facciamo un'altra assunzione: il sistema è *stazionario*, ossia non c'è dipendenza diretta della funzione di distribuzione dal tempo. Intersecando questa richiesta con la (2.18) otteniamo la versione *stazionaria* della CBE.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 0 \\ <\mathbf{v}, \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}> - <\dfrac{\partial \phi_T}{\partial \mathbf{x}}, \dfrac{\partial f}{\partial v}> = 0\,. \end{cases} \tag{2.19}$$

Da un punto di vista interpretativo significa che osservando il sistema nello spazio delle configurazioni, le grandezze macroscopiche ad esso associate restano invariate nel tempo. I motivi di una tale richiesta sono essenzialmente di due tipi. Il primo è che osservativamente la maggior parte dei sistemi stellari sono caratterizzati da proprietà (morfologia, profilo di densità, cinematica, ecc.) sufficientemente regolari e costanti da suggerire che si trovino in un stato stazionario (o quasi-stazionario): e questo rende la trattazione di interesse fisico, perché eventuali risultati sono confrontabili con gli osservabili reali. In secondo luogo, l'assunzione della stazionarietà mette a disposizione il *Teorema di Jeans* sulle proprieà generali della funzione di distribuzione. Questo che potrebbe sembrare un mero guadagno matematico è in effetti un elemento indispensabile per la risoluzione del problema (visto che si ha a che fare con equazioni differenziali non sempre integrabili) e ancor di più è il fondamento stesso del metodo di costruzione impiegato per il nostri modelli di sistema, senza il quale questo lavoro di Tesi non sarebbe possibile.

2.4 Gli integrali primi del moto e il Teorema di Jeans

Allo scopo di enunciare il *Teorema di Jeans* introduciamo brevemente gli *integrali primi del moto*, o semplicemente *integrali del moto*. Nello spazio delle fasi, chiamo *integrale del moto* qualunque funzione $I : \gamma \to \mathbb{R}$, costante nel tempo lungo una qualunque orbita. In una descrizione Lagrangiana, per l'integrale del moto I vale

$$I\Big(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{v}(t_1)\Big) \;=\; I\Big(\mathbf{x}(t_2), \mathbf{v}(t_2)\Big)\,. \tag{2.20}$$

dove $\Big(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{v}(t_1)\Big)$ e $\Big(\mathbf{x}(t_2), \mathbf{v}(t_2)\Big)$ sono le coordinate ai tempi t_1 e t_2 lungo una generica orbita [2]. Eulerianamente invece la (2.20) diventa:

$$\frac{D}{Dt}\, I(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \;=\; 0\,, \tag{2.21}$$

e dato che non dipende direttamente dal tempo, I rispetta la CBE stazionaria,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial t} = 0 \\ < \mathbf{v}, \dfrac{\partial I}{\partial \mathbf{x}} > - < \dfrac{\partial \phi_T}{\partial \mathbf{x}}, \dfrac{\partial I}{\partial v} > = 0 \, . \end{cases} \tag{2.22}$$

In alcuni casi si hanno a disposizione integrali del moto semplici da scrivere: per un potenziale gravitazionale statico a conservarsi su ogni orbita è l'energia; se invece il potenziale ha simmetria sferica, si conservano le tre componenti del momento angolare **J**, piuttosto che la sola componente lungo l'asse di rotazione nel caso di una simmetria assiale.

A questo punto possiamo enunciare il

Teorema 2.1. *(Teorema di Jeans)*

Ogni soluzione stazionaria della CBE dipende dalle coordinate dello spazio delle fasi solo tramite gli integrali del moto, ed ogni funzione degli integrali del moto è soluzione stazionaria per la CBE.

Dimostrazione: Supponiamo che f sia una soluzione stazionaria per la CBE, quindi, in base alla loro definizione, f fa parte degli integrali del moto e la prima parte del teorema è così dimostrata.

Inversamente, siano $I_1, \ldots, I_n$ n integrali del moto e sia f una funzione di questi, allora si ha che:

$$\frac{D}{Dt} f\big[I_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \ldots, I_n(\mathbf{x}, \mathbf{v})\big] = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial I_m} \frac{DI_m}{Dt} = 0 \tag{2.23}$$

dato che $\dfrac{D}{Dt} I_m = 0, \ \forall m$. f è quindi soluzione dell'equazione di *Boltzmann non-collisionale stazionaria.* □

Il teorema nella sua seconda parte ci dice che è possibile costruire una funzione di distribuzione semplicemente come funzione (sufficientemente regolare) degli integrali del moto ed aver garanzia che questa risolva la CBE stazionaria. Sulla base di questo risultato, nella Sezione 3.1.1, costruiremo i modelli per i sistemi stellari della nostra famiglia.

Capitolo 3

I nostri modelli nello spazio delle fasi

In questo Capitolo presentiamo la funzione di distribuzione della nostra famiglia di sistemi stellari. Ricaviamo le espressioni delle grandezze macroscopiche e, per il caso di una *politropica generalizzata*, formuliamo il *problema di Poisson* che sarà risolto numericamente con la procedura descritta nel Capitolo a seguire.

3.1 La funzione di distribuzione

I sistemi stellari della nostra famiglia sono caratterizzati dall'essere *assisimmetrici*, *toroidali* e *troncati*. In coordinate cilindriche $(R, z, \varphi, v_R, v_z, v_\varphi)$, sono definiti a partire dalla funzione di distribuzione

$$f(Q, J_z) \;=\; f_0 \, |J_z|^{2\alpha} \, h(Q - Q_0) \, \Theta(Q - Q_0) \;, \tag{3.1}$$

con

- f_0 un parametro dimensionale,
- α un numero reale positivo,
- J_z la componente del momento angolare lungo l'asse di simmetria z,
- Q_0 l'energia di troncamento,
- Θ la funzione gradino,
- h una funzione arbitraria sufficientemente regolare.

La quantità Q che compare nella DF ha espressione

$$Q \;=\; \mathcal{E} \;+\; \Omega_p J_z - \frac{J_z^2}{2R_a^2} \;, \tag{3.2}$$

dove $\mathcal{E}$ è l'*energia relativa*,

$$\mathcal{E} = \Psi_T \;-\; \frac{\mathbf{v}^2}{2} \;=\; \Psi_T(R, z) \;-\; \frac{\left(v_R^2 + v_z^2 + v_\varphi^2\right)}{2} \;, \tag{3.3}$$

con

$$\Psi_T \;=\; -\Phi_T \;, \tag{3.4}$$

e Φ_T il *potenziale gravitazionale totale*, generato dalla distribuzione stessa e da un eventuale potenziale esterno, quale potrebbe essere quello di un buco nero o di un disco o altro,

$$\Phi_T \;=\; \Phi \;+\; \Phi_{ext} \;. \tag{3.5}$$

Per sistemi auto-gravitanti il potenziale esterno Φ_{ext} sarà ovviamente nullo. A grandi distanze dall'origine,

$$\Phi_T \sim O\left(r^{-1}\right) , \qquad \text{per } r \longrightarrow \infty , \tag{3.6}$$

con $r = \sqrt{R^2 + z^2}$.

Ω_p è la velocità angolare del sistema nel caso in cui ruoti attorno all'asse centrale z e R_a è il raggio di anisotropia.

3.1.1 Costruire la funzione di distribuzione

Sulla base dei risultati teorici del Capitolo 2, ripercorriamo il procedimento che ci ha portato a scrivere la funzione di distribuzione (3.1) associata ai nostri modelli di sistemi stellari. Facciamo questo partendo dagli *integrali primi del moto* a nostra disposizione e scegliendo funzioni opportune di questi perché la DF possa rispettare le richieste di *simmetria assiale*, di presenza di una *struttura toroidale* e di *troncamento*.

La ricerca degli integrali primi del moto

La costruzione dalla funzione di distribuzione comincia cercando quegli integrali primi del moto validi per la nostra famiglia di sistemi, nell'ottica di usare poi il *Teorema di Jeans*. Non esistendo metodi generali per determinarli, partiamo sfruttando le proprietà e le simmetrie del caso.

Il problema è stazionario, il che implica un potenziale gravitazionale indipendente dal tempo e quindi la conservazione dell'energia totale E lungo le orbite. In coordinate cartesiane,

$$\frac{\partial \Phi_T}{\partial t} = 0 \longrightarrow \frac{D}{Dt} E = \frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Phi_T(\mathbf{x})\right] = 0. \tag{3.7}$$

Nell'equazione (3.7) E indica l'*energia per unità di massa* nel punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, dello spazio delle fasi γ, e Φ_T il *potenziale gravitazionale totale*, come indicato nelle equazioni (3.5) e (3.6). Per un ipotetico corpo di massa unitaria, in quiete in $\mathbf{x}$, la sola energia che lo lega al sistema è quella gravitazionale Φ_T, negativa. Posso interpretare il suo opposto Ψ_T, dalla (3.4), come l'energia

necessaria a portarlo a distanza infinita. Più in generale, con $\mathbf{v}^2$ non nullo, l'energia necessaria allo stesso scopo sarà Ψ_T meno il contributo d'energia cinetica. L'*energia relativa* definita come

$$\mathcal{E} = -E \,, \tag{3.8}$$

è quindi l'energia di legame per unità di massa ed anche il nostro primo integrale del moto.

$$I_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \Psi_T(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{v}^2}{2} \,. \tag{3.9}$$

Il secondo integrale lo ricaviamo dalla simmetria assiale richiesta. In questa configurazione a conservarsi lungo le orbite è infatti la componente del momento angolare $\mathbf{J}$ parallela all'asse di simmetria z [1]. In coordinate cartesiane, scriviamo il secondo integrale del moto come:

$$I_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = J_z(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = x\, v_y - y\, v_x \,. \tag{3.10}$$

La simmetria del caso ha conseguenze anche sulla forma del potenziale: dovendo rispettarla, Ψ_T ammette come dipendenze solo la distanza dall'origine $\|\mathbf{x}\|$ e la coordinata z [2]. Possiamo scrivere pertanto

$$\Psi_T = \Psi_T(\|\mathbf{x}\|, z) \,, \tag{3.11}$$

anche se, in seguito, utilizzeremo indistintamente la notazione $\Psi_T(\mathbf{x})$.

La nostra ricerca termina qui. Nonostante esista una versione *forte* del *Teorema di Jeans* che dice che un sistema stazionario, assisimmetrico e con orbite *regolari* (che ammettano cioè tanti integrali primi quante sono le dimensioni spaziali) abbia una DF che *dipende da soli tre* integrali del moto [2], il terzo di questi non è facile da determinare. Usare, invece, solo i due familiari integrali del moto per la costruzione dei nostri sistemi semplifica di molto i calcoli ed è comunque uno strumento estremamente utile, in grado di fornirci un gran numero di informazioni su possibili casi reali pur partendo da modelli generalizzati.

La scelta delle coordinate

Prima di procedere con la formulazione della DF effettuiamo alcuni cambi di coordinate. La simmetria in gioco nello spazio delle configurazioni ci suggerisce l'utilizzo di coordinate cilindriche, invece che cartesiane. In entrambi i riferimenti comunque, l'asse z mantiene il suo ruolo di asse di simmetria e di rotazione.

$$(x, y, z) \longmapsto (R, \varphi, z) \,, \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \longmapsto \begin{cases} R = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z \,, \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} R \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \forall z \in \mathbb{R} \,. \end{cases} \tag{3.14}$$

Le velocità in coordinate cilindriche sono:

$$\begin{cases} v_R = \dot{R} \\ v_\varphi = R\dot{\varphi} \\ v_z = \dot{z} \,, \end{cases} \tag{3.15}$$

I due integrali del moto si esprimono ora come

$$I_1 = \mathcal{E} = \Psi_T(R, z) - \frac{\mathbf{v}^2}{2} \,, \tag{3.16}$$

$$I_2 = J_z = R\, v_\varphi \,. \tag{3.17}$$

La forma della funzione di distribuzione

Studiamo quale forma la funzione di distribuzione f debba avere per descrivere un modello di sistema stellare con struttura toroidale e troncamento. Ricordo che grazie al Teorema di Jeans possiamo scrivere f come funzione degli integrali del moto (3.16) e (3.17).

$$f = f(\mathcal{E}, J_z) \,. \tag{3.18}$$

Innanzitutto, per un sistema assisimmetrico , con *toro* intendiamo una struttura la cui densità vada a zero avvicinandosi all'asse di simmetria: f deve esser cioè tale da rimuovere le orbite più vicine all'asse z. In termini di integrali primi del moto queste orbite sono caratterizzate da valori di $|J_z|$ piccoli, a cui corrispondono valori piccoli della distanza radiale dall'origine.

$$R \longrightarrow 0 \Longrightarrow \left[|J_z|^{2\alpha} = |R\, v_\varphi|^{2\alpha} \right] \longrightarrow 0\,, \qquad \text{per} \quad \alpha > 0\,, \tag{3.19}$$

nell'ipotesi che esista $V_\varphi \in \mathbb{R}^+$, tale che $|v_\varphi| < V_\varphi$. Per le orbite più vicine all'asse z, quindi, la quantità $|J_z|^{2\alpha}$ assume valori molto piccoli e noi richiediamo

$$f(\mathcal{E}, J_z) \propto |J_z|^{2\alpha}\,. \tag{3.20}$$

perché il profilo di densità associato alla DF possa andare a zero avvicinandosi all'asse z. Si noti che con $\alpha = 0$ la condizione (3.19) non è soddisfatta e in linea di principio la DF non descriverebbe un toro.

La seconda richiesta che facciamo alla DF riguarda il troncamento. Dobbiamo definire, in termini degli integrali primi del moto, una condizione al di fuori della quale la f "non trovi più" massa appartenente al sistema. Tale condizione è esprimibile come segue:

$$\mathcal{E} < Q_0 \Longrightarrow f(\mathcal{E}, J_z) = 0\,. \tag{3.21}$$

Chiediamo anzi che sia

$$\mathcal{E} - \frac{J_z^2}{2R_a} < Q_0 \Longrightarrow f(\mathcal{E}, J_z) = 0\,, \tag{3.22}$$

in modo da rimuovere le orbite con valore assoluto del momento angolare troppo alto e quindi poco legate. Facciamo poi un'ulteriore generalizzazione. Ipotizziamo che il sistema ruoti attorno all'asse z con velocità angolare costante Ω_p e manteniamo il nostro riferimento solidale a questo moto di rotazione. Non saremo più quindi in un riferimento inerziale e il sistema continuerà ad esser visto come fermo. A conservarsi allora non è E ma la quantità $E - \Omega_p J_z$, detta *integrale di Jacobi* [2]. In questa nuova condizione la (3.22) diventa:

$$\mathcal{E} + \Omega_p J_z - \frac{J_z^2}{2R_a} < Q_0 \Longrightarrow f(\mathcal{E}, J_z) = 0\,, \tag{3.23}$$

Definita la quantità

$$Q = \mathcal{E} + \Omega_p J_z - \frac{J_z^2}{2R_a} , \tag{3.24}$$

la sostituiamo nelle dipendenze di f,

$$f(\mathcal{E}, J_z) \longmapsto f(Q, J_z) . \tag{3.25}$$

Data la *funzione gradino* $\Theta : \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\Theta(Q - Q_0) = \begin{cases} 1 , & \text{per } Q > Q_0 \\ 0 , & \text{per } Q \leq Q_0 \end{cases} , \tag{3.26}$$

possiamo introdurre in f la richiesta di troncamento,

$$f(Q, J_z) \propto \Theta(Q - Q_0) . \tag{3.27}$$

Prima di procedere oltre, soffermiamoci sull'espressione per Q. Dal modulo quadro del vettore *velocità meridionale*, $v_m^2 = v_R^2 + v_z^2$, e dalla definizione di *potenziale di legame efficace* Ψ_{eff},

$$\Psi_{eff} = \Psi_T + \frac{\Omega_p^2 R^2}{2\,(1 + R^2/R_a^2)} , \tag{3.28}$$

possiamo riscrivere la (3.24) come

$$Q = \Psi_{eff} - \frac{v_m^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{R_a^2}}\, v_\varphi - \frac{\Omega_p R}{\sqrt{1 + R^2/R_a^2}}\right)^2 , \tag{3.29}$$

che si riduce semplicemente a

$$Q = \Psi_{eff} - \frac{v^2}{2} , \tag{3.30}$$

una volta adottate coordinate sferiche nello spazio delle velocità.

$$(v_R, v_\varphi, v_z) \longmapsto (v, \xi, \zeta) , \tag{3.31}$$

$$\begin{cases} v_R = v \cos\xi \sin\zeta \\ v_\varphi = \dfrac{v \cos\zeta}{\sqrt{1 + R^2/R_a^2}} + \dfrac{\Omega_p R}{\sqrt{1 + R^2/R_a^2}} \\ v_z = v \sin\xi \sin\zeta , \end{cases} \tag{3.32}$$

$$\begin{cases} 0 \leq v \leq \sqrt{2\left(\Psi_{eff}(\mathbf{x}) - Q_0\right)} \\ 0 \leq \xi \leq 2\pi \\ 0 \leq \zeta \leq \pi \, , \end{cases} \tag{3.33}$$

con

$$dv_R \, dv_z \, dv_\varphi = \frac{v^2 \, \sin\zeta}{\sqrt{1 + R^2/R_a^2}} \, dv \, d\xi \, d\zeta \, . \tag{3.34}$$

Come si osserva nella (3.33), l'espressione (3.30) per Q e la condizione di troncamento (3.27) forniscono una condizione sul modulo della velocità:

$$v \leq \sqrt{2\left(\Psi_{eff}(\mathbf{x}) - Q_0\right)} \equiv R_v\left[\Omega(\mathbf{x})\right] \, . \tag{3.35}$$

Ad ogni punto $\mathbf{x}$ dello spazio delle configurazioni, corrisponde nello spazio delle velocità una sfera $\Omega(\mathbf{x})$ di raggio $R_v\left[\Omega(\mathbf{x})\right]$, al di fuori della quale f si annulla. La condizione (3.35) ci garantisce che l'intervallo di definizione della velocità azimutale v_φ sia limitato. Posto

$$V_\varphi \equiv \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \left(R_v\left[\Omega(\mathbf{x})\right]\right) \tag{3.36}$$

è soddisfatto quindi quanto richiesto dalla (3.19) perché la funzione di distribuzione descriva il toro.

Infine, mettendo assieme la (3.20) e la (3.27), possiamo scrivere la forma generale della funzione di distribuzione f, già vista nell'equazione (3.1):

$$f(Q, J_Z) = f_0 \, |J_z|^{2\alpha} \, h(Q - Q_0) \, \Theta(Q - Q_0) \, ,$$

dove, $h(Q - Q_0)$ è una funzione sufficientemente regolare di Q e f_0 è un opportuno fattore dimensionale. Una DF siffatta rispetta, per costruzione, la CBE stazionaria (2.19).

3.2 Le funzioni macroscopiche nel caso $\Omega_p = 0$

Integriamo la funzione di distribuzione f per ricavare le grandezze macroscopiche della nostra famiglia di sistemi.

Le quantità che calcoleremo riguardano il caso

$$\Omega_p = 0 \, , \tag{3.37}$$

ovvero il caso in cui il sistema non ruota.

3.2.1 La densità

La densità nel punto di coordinate $\mathbf{x}$ dello spazio delle configurazioni è data da

$$\rho(\mathbf{x}) \;=\; \int_{\Omega(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},\mathbf{v})\; d^3\mathbf{v}\;, \tag{3.38}$$

dove il dominio nello spazio delle velocità è la sfera $\Omega(\mathbf{x})$. Esplicitando f ed esprimendo la velocità nelle coordinate (3.31), l'espressione si risolve in:

$$\rho(\mathbf{x}) \;=\; \int_{\Omega(\mathbf{x})} f_0\;|J_z|^{2\alpha}\;h(Q-Q_0)\;\Theta(Q-Q_0)\;d^3\mathbf{v} \;=$$

$$= \int_{v=0}^{\sqrt{2[\Psi_{eff}(\mathbf{x})-Q_0]}} \int_{\xi=0}^{2\pi} \int_{\zeta=0}^{\pi} f_0 \left|\frac{v\cos\zeta}{\sqrt{1+R^2/R_a^2}}\right|^{2\alpha} h(Q-Q_0)\cdot$$

$$\cdot\;\frac{v^2\;\sin\zeta}{\sqrt{1+R^2/R_a^2}}\;dv\;d\xi\;d\zeta \;=$$

$$= \rho(\mathbf{x}) \;=\; 4\pi\; f_0\; g(R)\;\frac{1}{2\alpha+1}\int_{v=0}^{\sqrt{2[\Psi_{eff}(\mathbf{x})-Q_0]}} dv\; v^{2+2\alpha}\; h(Q-Q_0)\;, \tag{3.39}$$

con

$$g(R) \;\equiv\; \frac{R^{2\alpha}}{(1+R^2/R_a^2)^{\alpha+1/2}}\;. \tag{3.40}$$

che presenta una simmetria cilindrica.

Definiamo

$$t \;=\; Q-Q_0 \;=\; \Psi_{eff} \;-\; \frac{v^2}{2} \;-\; Q_0 \tag{3.41}$$

e si ha:

$$v^2 \;=\; 2\,(\Psi_{eff} \;-\; Q_0 \;-\; t)\;, \tag{3.42}$$

$$dv^2 \;=\; 2v\;dv \;=\; -2dt\,, \tag{3.43}$$

$$v=0 \;\Longrightarrow\; t=\Psi_{eff}-Q_0\;, \tag{3.44}$$

$$v=\sqrt{2\,(\Psi_{eff}-Q_0)} \;\Longrightarrow\; t=0\;. \tag{3.45}$$

Sostituendo le (3.41)–(3.45) nella (3.39), l'espressione per ρ diventa

$$\rho(\mathbf{x}) \;=\; 4\pi\; f_0\; g(R)\;\frac{2^{\alpha+1/2}}{2\alpha+1}\int_{t=0}^{\Psi_{eff}-Q_0} (\Psi_{eff} \;-\; Q_0 \;-\; t)^{\alpha+1/2}\; h(t)\;dt\;. \tag{3.46}$$

3.2.2 I momenti della velocità

Per un sistema a simmetria assiale come il nostro, in cui f non dipende esplicitamente da né v_R né da v_z, il rapporto

$$\frac{\overline{v_R}}{\overline{v_z}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dv_\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \int_{-\infty}^{+\infty} f\, v_R dv_R}{\int_{-\infty}^{+\infty} dv_\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dv_R \int_{-\infty}^{+\infty} f\, v_z dv_z} \tag{3.47}$$

è banalmente uguale a 1, dato che gli integrali al numeratore e al denominatore sono identici [2], quindi

$$\overline{v_R} = \overline{v_z} \,. \tag{3.48}$$

Per la definizione di velocità meridionale risulta

$$\overline{\mathbf{v}_m} = \overline{\mathbf{v}_R} + \overline{\mathbf{v}_z} = \overline{v_R}\,\hat{\mathbf{R}} + \overline{v_z}\,\hat{\mathbf{z}} = \overline{v_R}\,(\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{z}}) \,. \tag{3.49}$$

Calcoliamo ora i *momenti della velocità* secondo le (2.7)-(2.9).

$$\rho(\mathbf{x})\,\overline{v_R}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega(\mathbf{x})} v_R\, f\, d^3\mathbf{v} =$$

$$= f_0\, g(R) \int_{\xi=0}^{2\pi} \cos\xi\, d\xi \cdot$$

$$\cdot \int_{v=0}^{\sqrt{2[\Psi_{eff}(\mathbf{x})-Q_0]}} \int_{\zeta=0}^{\pi} \sin^2\zeta\, |\cos\zeta|^{2\alpha}\, h(Q-Q_0)\, v^{2\alpha+3}\, dv\, d\zeta \,.$$

Dato che

$$\int_{\xi=0}^{2\pi} \cos\xi\, d\xi = 0 \,, \tag{3.50}$$

si ha

$$\overline{v_R}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \int_{\Omega(\mathbf{x})} v_R\, f\, d^3\mathbf{v} = 0 \,, \tag{3.51}$$

quindi anche

$$\overline{v_z}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \int_{\Omega(\mathbf{x})} v_z\, f\, d^3\mathbf{v} = 0 \,. \tag{3.52}$$

Essendo ambe due i suoi componenti *macroscopici* nulli, risulta $\overline{v_m}(\mathbf{x}) = 0$.

Per $\overline{v_\varphi}$ invece:

$$\rho(\mathbf{x})\,\overline{v_\varphi}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega(\mathbf{x})} v_\varphi\, f\, d^3\mathbf{v} =$$

$$= 2\pi\, f_0\, g(R) \int_{\zeta=0}^{\pi} \sin\zeta\, \cos\zeta\, |\cos\zeta|^{2\alpha}\, d\zeta \cdot$$

$$\cdot \int_{v=0}^{\sqrt{2[\Psi_{eff}(\mathbf{x})-Q_0]}} \frac{v^{2\alpha+3}}{\sqrt{1+\frac{R^2}{R_a^2}}}\, dv \,.$$

L'integrale in ζ è nullo, a causa dell'antisimmetria della funzione coseno sull'intervallo di integrazione,

$$\int_{\zeta=0}^{\pi} \sin\zeta\, \cos\zeta\, |\cos\zeta|^{2\alpha}\, d\zeta = 0 \,, \tag{3.53}$$

quindi

$$\overline{v_\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \int_{\Omega(\mathbf{x})} v_\varphi\, f\, d^3\mathbf{v} = 0 \,. \tag{3.54}$$

Riportiamo in fine le espressioni per le componenti del tensore di dispersione.

$$\rho\, \sigma_m^2 = \int_{\Omega(\mathbf{x})} (v_R^2 + v_z^2)\, f\, d^3\mathbf{v} =$$

$$= 4\pi\, f_0\, g(R)\, \frac{2^{\alpha+5/2}}{(2\alpha+1)\,(2\alpha+3)} \int_0^{\Psi_{eff}-Q_0} \left(\Psi_T - Q_0 - t\right)^{\alpha+\frac{3}{2}} h(t) dt \,. \tag{3.55}$$

$$\rho\, \sigma_\varphi^2 = \int_{\Omega(\mathbf{x})} v_\varphi^2\, f\, d^3\mathbf{v} =$$

$$= 4\pi\, f_0\, g(R)\, \frac{1}{1+R^2/R_a^2}\, \frac{2^{\alpha+3/2}}{2\alpha+3} \int_0^{\Psi_T-Q_0} \left(\Psi_{eff} - Q_0 - t\right)^{\alpha+\frac{3}{2}} h(t)\, dt \,. \tag{3.56}$$

Tutti gli altri elementi del tensore di dispersione di velocità σ^2 sono nulli.

La relazione tra la dispersione di velocità meridionale σ_m^2 e quella azimutale σ_φ^2 è descrivibile tramite la funzione

$$a(R) = 1 - \frac{2\sigma_\varphi^2}{\sigma_m^2} = 1 - \frac{2\alpha+1}{1+\frac{R^2}{R_a^2}} = \frac{R^2 - 2\alpha R_a^2}{R^2 + R_a^2} \,. \tag{3.57}$$

Quando $a(R) > 0$ (quindi per $2\sigma_\varphi^2 < \sigma_m^2$), il sistema è *radialmente anisotropo* ed ha un ellissoide di dispersione prolato. Questo accade per i punti con coordinata radiale R tale che

$$R^2 > 2\alpha R_a^2 \implies a(R) > 0 \,. \tag{3.58}$$

Viceversa per

$$R^2 < 2\alpha R_a^2 \implies a(R) < 0 \,, \tag{3.59}$$

il sistema è *tangenzialmente anisotropo*, con un ellissoide di dispersione oblato. La condizione in cui $a(R) = 0$ si verifica per tutti punti con $R^2 = 2\alpha R_a^2$ e vede il tensore di dispersione *isotropo*, quindi di forma sferica. In conclusione osserviamo che per i modelli appartenenti alla nostra famiglia di sistemi stellari, indipendentemente della particolare scelta per la funzione h, nel caso in cui $\Omega_p = 0$ il tensore σ^2 è globalmente anisotropo.

3.3 Il caso della politropica generalizzata

Il caso specifico che prendiamo in esame, in questo lavoro di Tesi, è quello in cui la funzione $h(Q - Q_0)$ è una *politropica generalizzata*, ossia un semplice *legge di potenza* della forma

$$h(Q - Q_0) \;=\; (Q - Q_0)^{\beta} \,, \tag{3.60}$$

con β un parametro adimensionale.

In letteratura [1] è noto che la soluzione per il caso di una sfera autogravitante di gas politropico è matematicamente la stessa del caso di una DF che dipenda dalla sola legge di potenza di $\mathcal{E}$. In considerazione di ciò, la scelta fatta per h permette di reinterpretare questa sottofamiglia di modelli come un caso politropico con troncamento e densità che va a zero lungo l'asse z.

Con la sostituzione di h, la nostra funzione di distribuzione diventa:

$$f(Q, J_z) \;=\; f_0 \, |J_z|^{2\alpha} \, (Q - Q_0)^{\beta} \, \Theta(Q - Q_0) \,. \tag{3.61}$$

Negli integrali delle grandezze macroscopiche sarà presente

$$\int_0^{\Psi_T - Q_0} \Big(\Psi_T - Q_0 - t\Big)^{\alpha+p} \, h(t) dt \,, \tag{3.62}$$

con $p \in \mathbb{Q}$, che varia da grandezza a grandezza. Usando la definizione di *funzione beta di Eulero completa*,

$$B(x, y) = B(y, x) = \int_0^1 \tau^{x-1} \, (1 - \tau)^{y-1} \, d\tau \,,$$

è possibile dimostrare che l'integrale (3.62) diventa

$$\int_0^{\Psi_T - Q_0} \Big(\Psi_T - Q_0 - t\Big)^{\alpha+p} \, h(t)dt \;=\; \Big(\Psi_T - Q_0\Big)^{\alpha+\beta+p+1} \, B\Big(\alpha+p+1\,,\;\beta+1\Big). \tag{3.63}$$

Sostituendo nelle espressioni (3.46), (3.55) e (3.56) ricaviamo

$$\rho(\mathbf{x}) \;=\; 4\pi\, f_0\, g(R)\, \frac{2^{\alpha+1/2}}{2\alpha+1} \Big(\Psi_T - Q_0\Big)^{\alpha+\beta+\frac{3}{2}} \, B\Big(\alpha+\frac{3}{2}\,,\;\beta+1\Big), \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned} \rho\, \sigma_m^2 \;&= \\ &= \; 4\pi\, f_0\, g(R)\, \frac{2^{\alpha+5/2}}{(2\alpha+1)\,(2\alpha+3)} \Big(\Psi_T - Q_0\Big)^{\alpha+\beta+\frac{5}{2}} \, B\Big(\alpha+\frac{5}{2}\,,\;\beta+1\Big), \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned} \rho\, \sigma_\varphi^2 \;&= \\ &= \; 4\pi\, f_0\, g(R)\, \frac{1}{1+R^2/R_a^2}\, \frac{2^{\alpha+3/2}}{2\alpha+3} \Big(\Psi_T - Q_0\Big)^{\alpha+\beta+\frac{5}{2}} \, B\Big(\alpha+\frac{5}{2}\,,\;\beta+1\Big). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Si noti che, con la scelta fatta per h, per la descrizione completa del sistema ci vogliono cinque paremetri: tre con dimensioni fisiche, f_0, R_a, Q_0, e due adimensionali, α, β.

3.4 L'equazione di Poisson

Affinché i sistemi definiti dall'equazione (3.61) abbiano consistenza fisica imponiamo che rispettino l'*equazione di Poisson* per il campo gravitazionale,

$$\Delta\Psi_T(\mathbf{x}) \;=\; -4\pi G\rho(\mathbf{x})\;. \tag{3.67}$$

Riformuliamo il problema (3.67) in forma *adimensionale*: normalizziamo cioé le grandezze *dimensionali* che figurano, con opportune quantità fisiche caratteristiche dei modelli. In questo modo, un'unica scelta per i valori di queste quantità ci permette di descrivere il problema su scale diverse. Dei tre parametri dimensionali a disposizione, f_0 serve a dare le dimensioni opportune alla funzione di distribuzione, mentre R_a e Q_0 sono impiegabili allo scopo in

quanto grandezze fisiche specifiche dei sistemi. Con questa scelta, il problema in forma adimensionale diventa

$$\tilde{\Delta}\phi \;=\; -\lambda\,\tilde{\rho}\;, \tag{3.68}$$

in cui valgono le seguenti:

$$\tilde{\rho} \;\equiv g(\tilde{R})\,\Big(\phi-1\Big)^{\gamma}\,\Theta(\phi-1)\;, \tag{3.69}$$

$$\gamma \;\equiv \alpha+\beta+\frac{3}{2}\;, \tag{3.70}$$

$$\phi \;\equiv \frac{\Psi_T}{Q_0}\;, \tag{3.71}$$

$$\tilde{\Delta} \;\equiv R_a^2\,\Delta\;, \tag{3.72}$$

$$g(\tilde{R}) \;\equiv \frac{\tilde{R}^{2\alpha}}{(1+\tilde{R}^2)^{\alpha+1/2}}\;, \tag{3.73}$$

$$\tilde{R} \;\equiv \frac{R}{R_a}\;, \tag{3.74}$$

$$\tilde{z} \;\equiv \frac{z}{R_a}\;, \tag{3.75}$$

$$\lambda \;\equiv \left[(4\pi)^2\,G\,f_0\,\frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}}}{2\alpha+1}\,B\Big(\alpha+\frac{3}{2}\,,\,\beta+1\Big)\,R_a^{2\alpha+2}\,Q_0^{\gamma-1}\right]. \tag{3.76}$$

λ è una quantità adimensionale con ruolo di autovalore nell'equazione (3.68); ad un suo dato valore corrisponde un'intera sottofamiglia modelli, tutti quelli cioè per cui la scelta di f_0, R_a e Q_0 rispettano la (3.76).

In questa formulazione, la densità ρ è proporzionale a $\tilde{\rho}$ secondo la relazione

$$\rho = \frac{Q_0}{R_a^2}\,\frac{1}{4\pi G}\,\lambda\,\tilde{\rho}\;, \tag{3.77}$$

mentre le componenti del *tensore di dispersione delle velocità* diventano

$$\tilde{\sigma}_m^2 \;= \frac{2}{\gamma+1}\,(\phi-1)\,\Theta(\phi-1)\;, \tag{3.78}$$

$$\tilde{\sigma}_\varphi^2 \;= \frac{2\alpha+1}{\gamma+1}\,\frac{1}{1+\tilde{R}^2}\,(\phi-1)\,\Theta(\phi-1)\;. \tag{3.79}$$

Associamo anche alle grandezze *totali* del sistema delle nuove quantità normalizzate. Alla *massa totale*, che sostituendo diventa

$$M = \int_0^\infty dR \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dz\;\rho\,R =$$

$$= \frac{Q_0\, R_a}{2G}\, \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{\rho}\, \tilde{R}\, d\tilde{R}\, d\tilde{z}\ ,$$

associamo la quantità adimensionale $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} = \frac{2G}{Q_0\, R_a} M = \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{\rho}\, \tilde{R}\, d\tilde{R}\, d\tilde{z}\ . \tag{3.80}$$

Analogamente all'*energia potenziale gravitazionale* interna ed esterna associamo rispettivamente le quantità

$$\mathcal{W}_{in} = \frac{2G}{Q_0^2\, R_a} V_{in} = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{\rho}\, \phi_{in}\, \tilde{R}\, d\tilde{R}\, d\tilde{z}\ , \tag{3.81}$$

$$\mathcal{W}_{ext} = \frac{2G}{Q_0^2\, R_a} V_{ext} = \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{\rho}\, \phi_{ext}\, \tilde{R}\, d\tilde{R}\, d\tilde{z}\ . \tag{3.82}$$

L'equazione di Poisson nella sua forma originale (3.67), come in quella adimensionale (3.68), per la nostra funzione di distribuzione non ha soluzione analitica. Si rende necessaria l'implementazione di una procedura numerica per risovere il problema, determinando se, per una data scelta dei parametri, esista o meno una soluzione e quale forma abbia.

Capitolo 4

Soluzione numerica dell'equazione di Poisson

Perché i sistemi modellati siano fisicamente consistenti, potenziale e densità devono rispettare l'*equazione di Poisson*, ma nel nostro caso questa non ammette soluzione analitica. In questo Capitolo illustriamo la procedura numerica usata per la sua risoluzione. Dopo aver ridotto il problema al solo piano meridionale e averlo linearizzato per adattarlo alla trattazione numerica, ci occupiamo della struttura dell'algoritmo che è basato sul *metodo della successione di Newton.*

4.1 L'equazione di Poisson

L'equazione di Poisson in forma adimensionale si presenta come

$$\tilde{\Delta}\phi \;=\; -\lambda\,\tilde{\rho}\;, \tag{4.1}$$

o, esplicitando $\tilde{\rho}$ dalla (3.69),

$$\tilde{\Delta}\phi \;=\; -\lambda\; g(\tilde{R})\,\Big(\phi-1\Big)^{\gamma}\;\Theta(\phi-1)\;, \tag{4.2}$$

dove

$$g(\tilde{R}) \;=\; \frac{\tilde{R}^{2\alpha}}{(1+\tilde{R}^2)^{\alpha+1/2}} \tag{4.3}$$

e $\alpha > 0$. Condizione al contorno per il potenziale, nelle coordinate cilindriche normalizzate (3.74) e (3.75), è

$$\phi \sim \frac{1}{\sqrt{\tilde{R}^2+\tilde{z}^2}}\;, \quad \text{per} \quad \sqrt{\tilde{R}^2+\tilde{z}^2} \longrightarrow \infty\;. \tag{4.4}$$

Si noti che il termine $g(\tilde{R})$ deriva dalla quantità $|J_z|^{2\alpha}$ che compare nella funzione di distribuzione (3.1). Il problema (4.2) nel caso $g(\tilde{R}) \equiv 1$ è stato largamente studiato in letteratura [2] e porta a soluzioni con simmetria sferica, corrispondenti ad una distribuzione di Plummer troncata con equazione di Poisson del tipo

$$\Delta\Psi_T \;=\; \eta\,\Big(\Psi_T - Q_0\Big)^{\beta+\frac{3}{2}}\;\Theta(\Psi_T - Q_0)\;, \tag{4.5}$$

con η costante. Il fattore $g(R)$ è quindi il responsabile della geometria di sistema: ci riferiremo ad esso come al *fattore geometrico*.

4.1.1 Le soluzioni nel piano meridionale

Senza perdita di generalità ed efficacia, possiamo ridurre lo studio del problema al solo piano meridionale. Infatti la simmetria assiale del sistema implica che il potenziale non dipende dalla variabile azimutale φ:

$$\phi \;=\; \phi(\tilde{R},\tilde{z})\;. \tag{4.6}$$

Dato che essa non compare neanche nel fattore geometrico $g(\tilde{R})$, è l'intera equazione di Poisson ad esserne indipendente. Cerchiamo quindi soluzioni sul solo piano meridionale, per fissato φ della tripletta $(\tilde{R}, \tilde{z}, \varphi)$,

$$(\tilde{R}, \tilde{z}, \varphi) \longmapsto (\tilde{R}, \tilde{z}) \, . \tag{4.7}$$

Il resto del sistema, nello spazio delle configurazioni, è ricavabile tramite rotazione attorno all'asse z della soluzione bidimensionale trovata.

Una volta sul piano meridionale è più pratico usare coordinate polari

$$(\tilde{R}, \tilde{z}) \longmapsto (r, \theta) \, , \tag{4.8}$$

secondo la trasformazione

$$\begin{cases} \tilde{R} &= r \, \sin\theta \\ \tilde{z} &= r \, \cos\theta \, . \end{cases} \tag{4.9}$$

Nelle nuove coordinate l'equazione di Poisson (4.2) si riscrive

$$[L_r + L_\theta] \, \phi \; = \; -\lambda \, r^2 \, g(r \sin\theta) \, \Big(\phi - 1\Big)^\gamma \, \Theta(\phi - 1) \, , \tag{4.10}$$

dove la somma degli operatori $L_r + L_\theta$ è il Laplaciano $\tilde{\Delta}$ moltiplicato per r^2,

$$\begin{cases} L_r \; = \dfrac{\partial}{\partial r} \, r^2 \, \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \\ L_\theta \; = \dfrac{1}{\sin\theta} \, \dfrac{\partial}{\partial\theta} \, \sin\theta \, \dfrac{\partial}{\partial\theta} \, . \end{cases} \tag{4.11}$$

Il fattore geometrico, che ora dipende da ambo le coordinate polari, ha espressione

$$g(r \sin\theta) \; = \; \frac{(r \, \sin\theta)^{2\alpha}}{(1 + r^2 \, \sin^2\theta)^{\alpha + 1/2}} \, . \tag{4.12}$$

La condizione sul potenziale si risolve semplicemente in

$$\phi \sim \frac{1}{r} \, , \quad \text{per} \quad r \longrightarrow \infty \, . \tag{4.13}$$

Associamo, in fine, all'equazione (4.10) il funzionale

$$F(\phi) \; = \; [L_r + L_\theta] \, \phi \; + \; \lambda \, r^2 \, g(r \sin\theta) \, \Big(\phi - 1\Big)^\gamma \, \Theta(\phi - 1) \, . \tag{4.14}$$

Cercare soluzioni per l'equazione di Poisson (4.1) equivale a cercare gli zeri del funzionale F. Posto

$$h(r,\theta,\phi) \;=\; r^2\, g(r\sin\theta)\,\Big(\phi-1\Big)^{\gamma}\,\Theta(\phi-1)\;, \tag{4.15}$$

il nostro problema è diventato risolvere l'equazione

$$F(\phi) \;=\; [L_r + L_\theta]\;\phi \;+\; \lambda\, h(r,\theta,\phi) \;=\; 0. \tag{4.16}$$

4.1.2 La trasposizione sulla griglia

L'equazione (4.16) sarà risolta numericamente, dato che non ammette soluzione analitica. Non avendo a disposizione uno spazio geometrico continuo ed infinito nella simulazione numerica, campioneremo il valore delle funzioni in un numero necessariamente finito di punti. Nello spazio delle configurazioni delineamo quindi la *griglia* (in inglese *grid*) dei punti a nostra disposizione:

$$(r,\theta) \;\longmapsto\; (\chi_j,\theta_k)\;, \tag{4.17}$$

$$\chi_{j+1} \;-\; \chi_j \;=\; \text{cost.}\;, \quad \text{per} \quad j=0,\dots,N_\chi-1\;, \tag{4.18}$$

$$\theta_{k+1} \;-\; \theta_k \;=\; \text{cost.}\;, \quad \text{per} \quad k=0,\dots,N_\theta-1\;, \tag{4.19}$$

secondo la definizione

$$r(\chi) \;=\; l_{sc}\tan\frac{\chi}{2}\;, \tag{4.20}$$

$$r_j \;=\; r(\chi_j) \;=\; l_{sc}\tan\frac{\chi_j}{2}\;, \tag{4.21}$$

dove l_{sc} è una lunghezza scala. Con questa sostituzione copriamo il dominio radiale con un intervallo limitato, $\chi\in\,]0,\pi[$. Le r_j avranno una progressione tangenziale, con passo più lungo man mano che ci si allontana dall'origine. Sottolineo però che questa sostituzione ha un valore pratico e matematico più che descrittivo, tant'è che ci troveremo più spesso a ragionare in termini di coordinata r e di grid (r_j,θ_k) che in termini di χ. Con il cambio di variabile, la condizione al contorno sul potenziale diventa

$$\phi \;\sim\; \tan^{-1}\frac{\chi}{2}\;, \quad \text{per} \quad \chi\longrightarrow\pi\;, \tag{4.22}$$

mentre come nuova espressione per la parte radiale del Laplaciano abbiamo

$$L_\chi = \frac{1}{4} \cos^2(\chi/2) \frac{\partial}{\partial \chi} \sin^2(\chi/2) \frac{\partial}{\partial \chi} , \tag{4.23}$$

e l'equazione da risolvere diventa

$$F(\phi) = [L_\chi + L_\theta] \phi + \lambda h(\chi, \theta) = 0 . \tag{4.24}$$

Una volta sul grid, il problema (4.24) assume forma

$$F_{jk} = A_{jk}^{\ j'k'} \phi_{j'k'} + \lambda h_{jk} = 0 , \tag{4.25}$$

con

$$j, j' = 0, \ldots, N_\chi , \tag{4.26}$$

$$k, k' = 0, \ldots, N_\theta , \tag{4.27}$$

$$\phi_{jk} = \phi(\chi_j, \theta_k) , \tag{4.28}$$

$$F_{jk} = F(\phi_{jk}) , \tag{4.29}$$

$$h_{jk} = h(\chi_j, \theta_k, \phi_{jk}) . \tag{4.30}$$

Le quantità indicizzate sono array pluridimensionali che raccolgono i valori delle corrispondenti funzioni nei punti di griglia. Si noti che nella (4.25) è stata adottata la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti: nelle forme monomiali in cui compare uno stesso indice ripetuto più volte (come nella quantità $A_{jk}^{\ j'k'} \phi_{j'k'}$) è sottintesa una sommatoria su quell'indice per tutti i valori che esso può assumere. A indica l'approssimazione numerica dell'operatore $[L_\chi + L_\theta]$ e traduce quindi le derivazioni ad esso associate. La sua costruzione, in effetti, porterà ad una struttura in parte diversa da una matrice quadridimensionale con elemento $A_{jk}^{\ j'k'}$; questo perché useremo esprimere le funzioni sulla base dei *polinomi di Legendre*, modificando così la loro dipendenza da θ. Ad ogni modo, gli indici usati per A nella (4.25) servono ad evidenziare intuitivamente la dipendenza tanto dalla coordinata radiale quanto da quella angolare. In forma compatta l'equazione (4.25) si scrive

$$F = A \cdot \phi + \lambda h = 0 . \tag{4.31}$$

4.2 La procedura numerica

Descriviamo la procedura che ci permetterà di risolvere l'equazione di Poisson (4.1). Sottolineo che le approssimazioni che facciamo sono dettate dalla necessità di avere un'algoritmo sufficientemente semplice ma efficace. Il codice in linguaggio Fortran90 è descritto nell'Appendice B.

Per trovare gli zeri del funzionale (4.14) impieghiamo il *metodo della successione di Newton* (si veda l'Appendice A). La successione di funzioni definita per ricorrenza

$$\phi_{n+1} \;=\; \phi_n + \delta\phi_n \;=\; \phi_n \;-\; \left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n^{-1} \; F_n \;, \tag{4.32}$$

è tale che

$$\phi_n \;\longrightarrow\; \overline{\phi}\;, \qquad \text{per } \; n \to +\infty \;, \tag{4.33}$$

$$F\left(\,\overline{\phi}\,\right) \;=\; 0\;. \tag{4.34}$$

Nella (4.32), $\delta\phi_n$ è il passo n-esimo della successione e $\left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n$ lo Jacobiano del funzionale calcolato in $\phi = \phi_n$ che dalla (4.24) risulta

$$\left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n \;=\; [L_r + L_\theta] \;+\; \gamma\,\lambda\, r^2\, g(r,\theta)\,\left(\phi_n - 1\right)^{\gamma-1}\,\Theta(\phi_n - 1)\;. \tag{4.35}$$

Nota una funzione ϕ_n, l'equazione che ci interessa risolvere è

$$\delta\phi_n \;=\; -\left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n^{-1} F_n \;=\; \left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n^{-1} \delta F_n\;. \tag{4.36}$$

dove δF_n è il differenziale del funzionale F n-esimo.

La procedura iterativa ci consente una convergenza quadratica ma richiede, sulla griglia, l'inversione della matrice multidimensionale che traduce il Laplaciano . Per ovviare al problema espandiamo le funzioni in polinomi di Legendre nella coordinata θ: l'operatore L_θ allora diventerà una semplice matrice diagonale. Approssimato L_r con derivazioni numeriche (si veda l'Appendice A) e mediato il secondo addendo della (4.35) sull'intervallo della coordinata angolare, lo Jacobiano $\left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n$ sarà una matrice tri o penta diagonale facile da invertire.

L'algoritmo è strutturato come segue:

1. F_n e ϕ_n noti sul grid,
2. calcolare la rappresentazione di F_n nello spazio di Legendre,
3. calcolare e invertire $\left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n$ nello spazio di Legendre,
4. applichare $\left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n^{-1}$ al funzionale $-F_n$ nello spazio di Legendre,
5. ricavare $\delta\phi_n$ nello spazio di Legendre,
6. ritornare con $\delta\phi_n$ sul grid,
7. calcolare ϕ_{n+1} sul grid,
8. ricalcolare F_{n+1} sul grid,
9. ricominciare dal punto 2, fin quando F o $\delta\phi$ non diventino sufficientemente piccoli.

4.2.1 Le approssimazioni adottate

In questa sezione descriviamo più esplicitamente i passaggi effettuati e le approssimazioni adottate per risolvere numericamente l'equazione (4.36),

$$\delta\phi_n = \left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n^{-1} \delta F_n \, .$$

Lasciamo da parte i pedici n allo scopo di alleggerire la notazione ed esplicitiamo l'espressione dell'operatore $\frac{\delta F}{\delta \phi}$ che vogliamo invertire,

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \phi} &= \frac{\delta}{\delta \phi} \left[[L_r + L_\theta]\, \phi \, + \, \lambda\, r^2\, g(r,\theta) \left(\phi - 1\right)^\gamma \Theta(\phi - 1) \right] = \\ &= [L_r + L_\theta] \, + \, \gamma\, \lambda r^2\, g(r,\theta) \left(\phi - 1\right)^{\gamma - 1} \Theta(\phi - 1) \, . \end{aligned} \tag{4.37}$$

Il differenziale del funzionale F è

$$\begin{aligned} \delta F &= \left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right) \delta\phi \, = \\ &= \left[[L_r + L_\theta] \, + \, \lambda\, \gamma\, r^2\, g(r,\theta) \left(\phi - 1\right)^{\gamma - 1} \Theta(\phi - 1) \right] \delta\phi \, = \\ &= [L_r + L_\theta]\, \delta\phi \, + \, \lambda\, \gamma\, r^2\, g(r,\theta) \left(\phi - 1\right)^{\gamma - 1} \Theta(\phi - 1)\, \delta\phi \, . \end{aligned} \tag{4.38}$$

Il primo addendo della (4.38) è il solito Laplaciano di $\delta\phi$, mentre il secondo indica la moltiplicazione per una funzione. Avendo i due comportamenti e proprietà molto diversi ne discutiamo separatamente i casi.

L'approssimazione del Laplaciano

Ricordo che i polinomi di Legendre sono le autofunzioni dell'operatore L_θ.

$$L_\theta \left[P_l(\cos\theta)\right] = l(l+1)\, P_l(\cos\theta)\ . \tag{4.39}$$

Esprimiamo la funzione $\delta\phi$ nello spazio di Legendre (si veda l'Appendice A),

$$\delta\phi(r,\theta) = \sum_l c_l(r)\, P_l(\cos\theta)\ , \tag{4.40}$$

e, dalla (4.39), per il generico termine dello sviluppo si ha

$$\begin{aligned}
[L_r + L_\theta] \left[c_l(r)\, P_l(\cos\theta)\right] &= \\
&= L_r \left[c_l(r)\, P_l(\cos\theta)\right] + L_\theta \left[c_l(r)\, P_l(\cos\theta)\right] = \\
&= P_l(\cos\theta)\, L_r \left[c_l(r)\right] + c_l(r)\, L_\theta \left[P_l(\cos\theta)\right] = \\
&= P_l(\cos\theta)\, L_r \left[c_l(r)\right] + l(l+1)\, c_l(r)\, P_l(\cos\theta)\ .
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Semplifichiamo l'operatore L_r. La quantità $L_r \left[c_l(r_j)\right]$ implica delle derivazioni di c_l da calcolare nel punto di coordinata r_j. Conoscendo il valore della funzione c_l in altri punti di un intorno di r_j, è possibile approssimare le derivate con metodi numerici, facendo così assumere a L_r un aspetto matriciale (si veda l'Appendice A). Sia A_r questa matrice, possiamo scrivere l'equazione (4.41) calcolata nel punto (r_j, θ_k) della griglia, come

$$\begin{aligned}
[L_r + L_\theta]\, \delta\phi_{jk} &= \\
&= \sum_l \left[P_l(\cos\theta_k)\, L_r \left[c_l(r_j)\right] + l(l+1)\, c_l(r_j)\, P_l(\cos\theta_k)\right] \simeq \\
&\simeq \sum_l \left[P_l(\cos\theta_k)\, A_{r,\ j}^{\ \ j'}\, c_l(r_{j'}) + l(l+1)\, c_l(r_j)\, P_l(\cos\theta_k)\right] = \\
&= \sum_l \left[A_{r,\ j}^{\ \ j'} + l(l+1)\, \delta_j^{\ j'}\right] c_l(r_{j'})\, P_l(\cos\theta_{k'})\ .
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Ponendo

$$A_{r,\ j}^{\ \ j'} + l(l+1)\, \delta_j^{\ j'} = \hat{A}_j^{l\ j'} \tag{4.43}$$

traduciamo nello spazio di Legendre l'operatore Laplaciano. Notiamo che si tratta di un array a tre dimensioni e la cosa più interessante ed importante è che a fissato l corrisponderà una matrice tri o penta diagonale, dipendente dalla sola coordinata radiale. L'espressione (4.42) diventa

$$[L_r + L_\theta]\ \delta\phi_{jk} \simeq \sum_l \hat{A}^{l\ j'}_{j}\, c_l(r_{j'})\ P_l(\cos\theta_k)\ . \tag{4.44}$$

La media sulla variabile angolare

Applichiamo lo sviluppo in polinomi di Legendre al secondo addendo dell'equazione (4.38):

$$\begin{aligned} &\lambda\ \gamma\ g(r,\theta)\ \Big(\phi(r,\theta)-1\Big)^{\gamma-1}\ \Theta(\phi-1)\ \delta\phi\ = \\ &= \left[\lambda\ \gamma\ g(r,\theta)\ \Big(\phi(r,\theta)-1\Big)^{\gamma-1}\ \Theta(\phi-1)\right]\cdot\ \delta\phi\ = \\ &= \left[\sum_{l'}\ a_{l'}(r)\ P_{l'}(\cos\theta)\right]\cdot\ \left[\sum_{l}\ c_l(r)\ P_l(\cos\theta)\right]\ , \end{aligned} \tag{4.45}$$

dove

$$a_{l'}(r)\ =\ \frac{2l'+1}{2}\ \int_{-1}^{1}\ \Big(\lambda\ \gamma\ g(r,\theta)\ \Big(\phi(r,\theta)-1\Big)^{\gamma-1}\ \Theta(\phi-1)\ \Big)\cdot \\ \cdot\ P_l(\cos\theta)\ d(\cos\theta)\ . \tag{4.46}$$

La (4.45) può anche essere scritta come

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{l'}\ a_{l'}(r)\ P_{l'}(\cos\theta)\right]\cdot\ \left[\sum_{l}\ c_l(r)\ P_l(\cos\theta)\right]\ = \\ &= \sum_l\ \left[\sum_{l'}\ a_{l'}(r)\ P_{l'}(\cos\theta)\right]\ c_l(r)\ P_l(\cos\theta)\ . \end{aligned} \tag{4.47}$$

Tradurre $[\sum_l\ a_{l'}(r)\ P_{l'}(\cos\theta)]$ numericamente in un array, come per l'espressione (4.42), porta a una matrice con termini non nulli sparsi ovunque, annullando la semplificazione ottenuta nel caso del Laplaciano. Risolviamo con un'approssimazione: manteniamo nello sviluppo il solo termine $l = 0$, che

equivale a considerare il valor medio della funzione sulla variabile angolare θ.

$$\begin{aligned}
&\Big[\, a_{l'}(r)\; P_{l'}(\cos\theta) \,\Big]_{l'=0} = \\
&= a_0(r)\; P_0(\cos\theta) \;=\; a_0 \cdot\; 1 \;=\; a_0 \;= \\
&= \left[\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big(\lambda\,\gamma\; g(r,\theta)\; \Big(\phi(r,\theta)-1\Big)^{\gamma-1}\; \Theta(\phi-1)\Big) \;\cdot\; 1\; d(\cos\theta)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \Big(\lambda\,\gamma\; g(r,\theta)\; \Big(\phi(r,\theta)-1\Big)^{\gamma-1}\; \Theta(\phi-1)\Big)\; \sin\theta\; d\theta\;.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

La (4.45) allora diventa semplicemente

$$\lambda\,\gamma\; g(r,\theta)\; \Big(\phi(r,\theta)-1\Big)^{\gamma-1}\; \Theta(\phi-1)\; \delta\phi \;\simeq\; \sum_{l} a_0(r_j)\; c_l(r_j)\; P_l(\cos\theta_k)\;. \tag{4.49}$$

L'approssimazione per il differenziale del funzionale

Mettiamo insieme la (4.44) e la (4.49), esplicitando che lo sviluppo sui polinomi è troncato in corrispondenza del termine l_{max} (si veda l'Appendice A),

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta F}{\delta\phi}\right)\; \delta\phi_{jk} \;&= [L_r + L_\theta]\delta\phi_{jk} \;+\; \lambda\,\gamma\; g(r_j,\theta_k)\; \Big(\phi-1\Big)^{\gamma-1}\; \Theta(\phi-1)\; \delta\phi_{jk} \;\simeq \\
&\simeq \sum_{l=0}^{l_{max}} \hat{A}_j^{l\;\,j'}\; c_l(r_{j'})\; P_l(\cos\theta_{k'}) \;+\; \sum_{l=0}^{l_{max}} a_0(r_j)\; c_l(r_j)\; P_l(\cos\theta_k) \;= \\
&= \sum_{l=0}^{l_{max}} \Big[\hat{A}_j^{l\;\,j'} \;+ a_0(r_j)\delta_j^{\;\,j'}\Big]\; c_l(r_{j'})\; P_l(\cos\theta_k)\;.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$\Big[\hat{A}_j^{l\;\,j'} + a_0(r_j)\delta_j^{\;\,j'}\Big]$ è un array con le stesse caratteristiche di $\hat{A}_j^{l\;\,j'}$: a fissato l, corrisponde una matrice tri o penta diagonale. Sia allora

$$A_j^{l\;\,j'} \;=\; A_{r,\;j}^{\;\;\;\;\;\;j'} \;+\; l(l+1)\;\delta_j^{\;\,j'} \;+\; a_0(r_j)\delta_j^{\;\,j'}\;, \tag{4.51}$$

come approssimazione del differenziale del funzionale, equazione (4.38), sulla griglia risulta

$$\left(\frac{\delta F}{\delta\phi}\right)\; \delta\phi_{j,k} \;\simeq\; \sum_{l=0}^{l_{max}} A_j^{l\;\,j'}\; c_l(r_{j'})\; P_l(\cos\theta_k)\;. \tag{4.52}$$

La risoluzione dell'equazione per ricorrenza

Riscriviamo la (4.36), senza pedice n,

$$-F = \left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right) \delta\phi \,, \tag{4.53}$$

e sviluppiamo sui polinomi di Legendre il membro di sinistra, fino al termine l_{max},

$$-F \simeq -\sum_{l=0}^{l_{max}} f_l(r)\, P_l(\cos\theta) \,. \tag{4.54}$$

Sostituendo la (4.54) e la (4.52) nell'equazione (4.53) abbiamo

$$-\sum_{l=0}^{l_{max}} f_l(r_j)\, P_l(\cos\theta_k) \simeq \sum_{l=0}^{l_{max}} A_j^{l\ j'}\, c_l(r_{j'})\, P_l(\cos\theta_{k'}) \,. \tag{4.55}$$

Data l'ortonormalità dei polinomi, possiamo anche scrivere

$$-f_l(r_j) = A_j^{l\ j'}\, c_l(r_{j'}) \,. \tag{4.56}$$

o, usando una rappresentazione matriciale,

$$-\begin{pmatrix} f_0(r_j) \\ \vdots \\ f_{l_{max}}(r_j) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_0(r_{j'}) \\ \vdots \\ c_{l_{max}}(r_{j'}) \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

La forma estremamente semplice di A ci consente di invertirla con facilità. Sia A^{-1} l'inversa, allora

$$c_l(r_{j'}) = -\left[A^{-1}\right]_{j'}^{l\ j} f_l(r_j) \,, \tag{4.58}$$

o per i vettori colonna

$$\begin{pmatrix} c_0(r_{j'}) \\ \vdots \\ c_{l_{max}}(r_{j'}) \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} f_0(r_j) \\ \vdots \\ f_{l_{max}}(r_j) \end{pmatrix} \,. \tag{4.59}$$

Invertendo gli apici dell'espressione (4.58) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &-\sum_{l=0}^{l_{max}} \left[A^{-1}\right]_j^{l\ j'} f_l(r_{j'})\ P_l(\cos\theta_k) = \\ &= \sum_{l=0}^{l_{max}} c_l(r_j)\, P_l(\cos\theta_k) = \delta\phi(r_j,\theta_k) = \delta\phi_{jk} \,. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Ricavato $\delta\phi$ sul grid e reintrodotto l'indice n, abbiamo in fine il successivo termine della successione di Newton,

$$\phi_{n+1,\,jk} = \phi_{n,\,jk} + \delta\phi_{n,\,jk} \,. \tag{4.61}$$

Con questo calcoliamo $F_{n+1,\,jk}$ e ricominciamo, fino ad un $\delta\phi_n$ o un F_n sufficientemente piccolo.

Capitolo 5

I risultati

In questo capitolo presentiamo i risultati ottenuti dalla risoluzione numerica dell'equazione di Poisson. Illustriamo il comportamento delle soluzioni al variare dei parametri di sistema, sia in assenza che in presenza di buco nero centrale.

5.1 Premesse

Al variare dei parametri α e β – definiti nelle equazioni (3.1), (3.61) e (3.70) – sono state analizzate soluzioni corrispondenti a diversi valori di λ – definita nell'equazione (3.76).

Le soluzioni ottenute mostrano una proporzionalità inversa tra λ e la massa totale del sistema $\mathcal{M}$. Inoltre all'aumentare di α e β, i valori massimi raggiunti da λ nelle soluzioni sono risultati diminuire a causa della funzione Beta di Eulero che compare nella definizione (3.76). Consideriamo soluzioni con $\lambda \geq \lambda_{crt} = 10^{-4}$ in quanto per valori inferiori i modelli mostrano poca sensibilità alle variazioni dell'autovalore λ.

In ogni ciclo di ricerca di soluzioni per l'equazione di Poisson (4.10), si è partiti da un valore iniziale $\lambda = \lambda_0$ calcolato dal potenziale ϕ_{sph} di una sfera uniforme di massa $\mathcal{M}_0$ e raggio $\tilde{R}_0$ e integrato sul piano meridionale,

$$\lambda_0 = \frac{\int \nabla^2 \phi_{sph}\, r^2\, dr\, d\theta}{\int g(r\sin\theta)\ (\phi_{sph}-1)^{\gamma}\ \Theta(\phi_{sph}-1)\, r^2\, dr\, d\theta}\,. \tag{5.1}$$

Trovata una coppia potenziale-densità considerata valida, il valore di λ è stato incrementato (o decrementato) per procedere alla ricerca di una nuova soluzione.

Sono state ottenute soluzioni sia nel caso auto-gravitante sia in presenza di un potenziale esterno. Per semplicità ed interesse astrofisico il potenziale esterno adottato è quello di un corpo centrale massivo (identificabile con un buco nero) di massa M_{bh}; normalizzato a Q_0 e in coordinate cilindriche è

$$\phi_{ext} = \frac{\mu_{bh}}{\sqrt{\tilde{R}^2+\tilde{z}^2}} = \frac{4\pi G}{Q_0\ R_a}\,\frac{M_{bh}}{\sqrt{\tilde{R}^2+\tilde{z}^2}}\,, \tag{5.2}$$

con

$$\mu_{bh} = \frac{4\pi G}{Q_0\ R_a}\ M_{bh} \tag{5.3}$$

la massa normalizzata. Un nuovo parametro che caratterizza i modelli è quindi il rapporto tra la massa del buco nero e quella totale del toro, che dalla (3.80) risulta

$$\frac{M_{bh}}{M} = \frac{\mu_{bh}}{\mathcal{M}}\,. \tag{5.4}$$

La quantità μ_{bh} è fissata all'inizio di ogni ciclo di soluzioni mentre $\mathcal{M}$ e quindi il rapporto delle due sono dati come risultati del calcolo non fissabili a priori. Nella ricerca di soluzioni sono stati indagati modelli per cui

$$0.01 \leq \frac{\mu_{bh}}{\mathcal{M}_0} \leq 1 \,. \tag{5.5}$$

Analiticamente è possibile fare alcune osservazioni sugli andamenti delle soluzioni, a prescindere dai risultati numerici. Nell'ipotesi che il potenziale ϕ associato alla distribuzione sia regolare, dalle equazioni (3.69), (3.70) e (3.77), per il caso auto-gravitante si ricava

$$\rho \sim \tilde{R}^{2\alpha} \,, \qquad \text{per} \quad \tilde{R} \longrightarrow 0 \,, \tag{5.6}$$

percui, con $\alpha > 0$, la densità si annulla sull'asse z. In presenza del buco nero l'espressione (5.6) diventa

$$\rho \sim \frac{\tilde{R}^{2\alpha}}{\left(\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}\right)^{\alpha+\beta+3/2}} \,, \qquad \text{per} \quad \tilde{R} \longrightarrow 0 \,. \tag{5.7}$$

Con $\alpha > 0$ e per $z \neq 0$ la (5.7) implica ancora una densità nulla lungo l'asse di simmetria, ma per $z = 0$,

$$\rho \sim \tilde{R}^{\alpha-\beta-3/2} \,, \qquad \text{per} \quad \tilde{R} \longrightarrow 0 \,, \tag{5.8}$$

la densità sul piano equatoriale diverge nell'origine se $\alpha < \beta + 3/2$. Allo scopo di evitare questa divergenza nei risultati numerici, il potenziale di buco nero effettivamente usato dal codice è

$$\phi_{ext} = \frac{\mu_{bh}}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2 + \epsilon^2}} \,, \tag{5.9}$$

con ϵ è una costante arbitraria non nulla. Per questo motivo e per la risoluzione di griglia adottata, in alcune soluzioni non sono visibili gli andamenti asintotici appena descritti.

Tutte le grandezza riportate in questo capitolo sono da considerarsi adimensionate secondo le quantità Q_0, R_a e la costante di gravitazione universale G.

5.2 L'andamento delle soluzioni

L'equazione di Poisson (4.10) ha soluzione per combinazioni di α e β appartenenti all'intervallo $]0, 4[$. In corrispondenza di diversi valori di β, all'aumentare di α è possibile distinguere tre tipi di comportamento delle soluzioni, corrispondenti a tre intervalli di valori per λ.

I nostri modelli, in base alle richieste associate alle equazioni (3.19) e (3.20), sono definiti con $\alpha > 0$. Per un confronto, alla fine del Capitolo, presentiamo anche alcuni esempi di soluzioni per il caso $\alpha = 0$.

5.2.1 Modelli con $\beta = 0.5$

Presentiamo due soluzioni con $\beta = 0.5$ e illustriamo un primo tipo di comportamento, al variare di α, che si ha per $\lambda \simeq 10^2$.

I casi con $\alpha = 0.25$ e $\alpha = 1$ sono riportati in Figura 5.1 e Figura 5.2 rispettivamente. Sono graficate, in coordinate cilindriche normalizzate a R_a, le superfici di livello sul piano meridionale di ϕ (il potenziale normalizzato a Q_0) e di $\lambda\tilde{\rho}$ (la densità normalizzata a $\frac{Q_0}{4\pi G R_a^2}$) e i profili intrinseci di potenziale e densità alle quote $\tilde{z} = 0$, $\tilde{z} = \frac{\tilde{R}_{max}}{2}$ e $\tilde{z} = \frac{\tilde{R}_{max}}{4}$ sul piano meridionale, con $\tilde{R}_{max}$ il raggio di troncamento. Per il primo dei due sistemi le superfici di livello della densità descrivono una struttura con due lobi estremamente ravvicinati, tanto che con la risoluzione adottata per la griglia, i profili di densità intrinseca sul piano equatoriale non vanno a zero nell'origine. Al contrario per il caso $\alpha = 1$, i lobi mostrano una separazione netta e i profili intrinseci di densità vanno a zero nell'origine. Per i due modelli si riscontra all'aumento di α un corrispondente aumento del raggio di troncamento $\tilde{R}_{max}$, mentre le altezze dei profili di densità, alle diverse quote, diminuiscono. Il modello con $\alpha = 1$, a valore fissato del parametro f_0, ha una massa doppia e profili più bassi rispetto al caso $\alpha = 0.25$: questo può essere interpretato come uno "spostamento" delle orbite dal centro verso regioni più esterne del sistema.

Introducendo nei modelli precedenti un potenziale esterno con massa normalizzata $\mu_{bh} = 0.1$, i grafici dei sistemi risultanti sono riportati in Figura

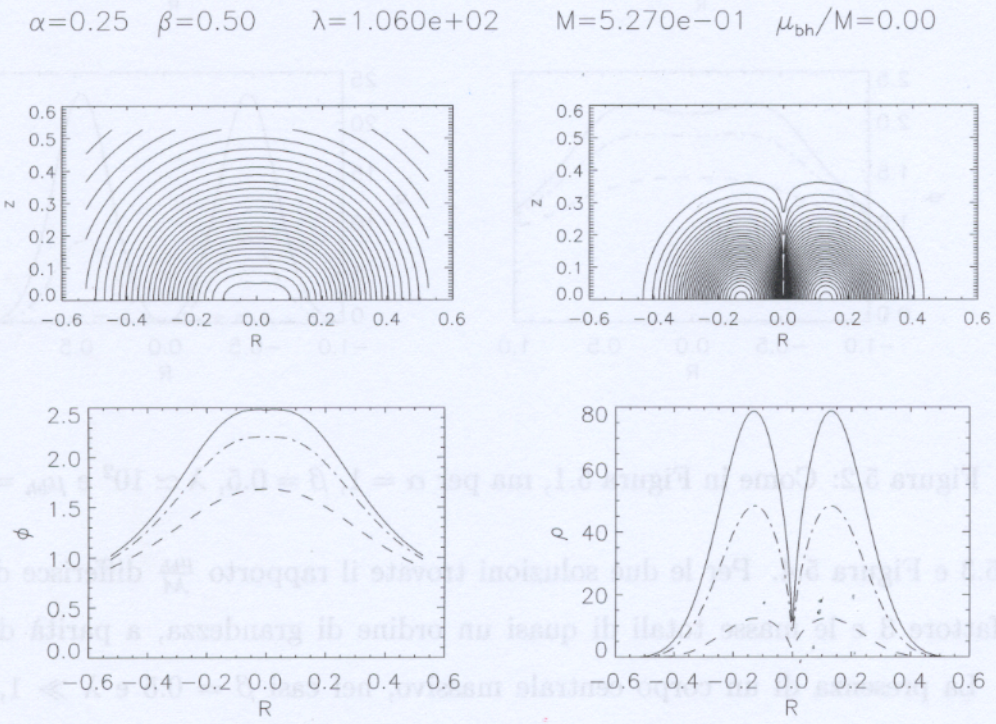


Figura 5.1: Per il modello con $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.5$, $\lambda \simeq 10^2$ e $\mu_{bh} = 0$. IN ALTO: le superfici di livello, sul piano meridionale, del potenziale ϕ e della densità ρ, a destra e sinistra rispettivamente. IN BASSO: sul piano meridionale, i profili del potenziale ϕ (normalizzato a Q_0) e della densità intrinseca ρ (normalizzata a $\frac{Q_0}{4\pi G R_a^2}$) per $\tilde{z} = 0$ (linea continua), $\tilde{z} = \frac{\tilde{R}_{max}}{2}$ (linea tratto-punto, $\tilde{z} = \frac{\tilde{R}_{max}}{4}$ (linea tratteggiata).

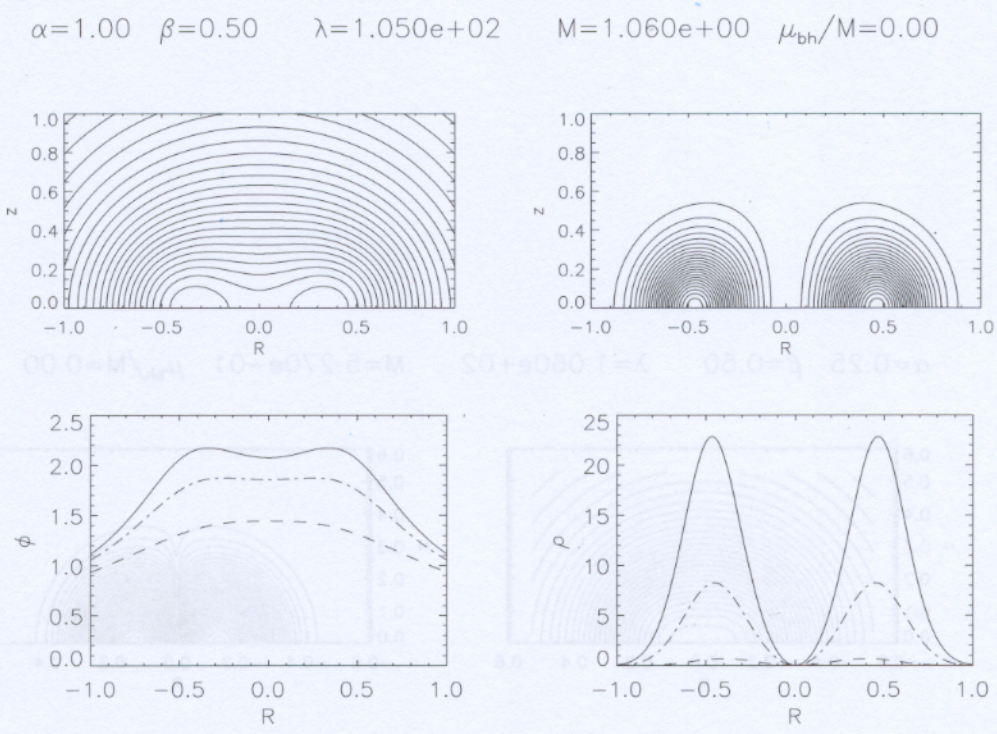


Figura 5.2: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\lambda \simeq 10^2$ e $\mu_{bh} = 0$.

5.3 e Figura 5.4. Per le due soluzioni trovate il rapporto $\frac{\mu_{bh}}{\mathcal{M}}$ differisce di un fattore 3 e le masse totali di quasi un ordine di grandezza, a parità di f_0.

La presenza di un corpo centrale massivo, nei casi $\beta = 0.5$ e $\lambda \gg 1$, con la risoluzione di griglia usata, non mostra profili di densità che vanno a zero nell'origine sul piano equatoriale e riduce molto le estensioni dei sistemi, che nel caso $\alpha = 0.25$ risultano praticamente dimezzate. Per $\alpha = 0.25$ il rapporto tra i valori massimi dei profili di densità per $\tilde{z} = 0$ e $\tilde{z} = \frac{\tilde{R}_{max}}{2}, \frac{\tilde{R}_{max}}{4}$ è dell'ordine di 10^2 e quindi modelli come questo possono essere interessanti per descrivere un disco piuttosto che un toro.

Per quanto riguarda l'andamento al variare di α, questo è analogo ai casi senza buco nero centrale e, definendo d_p la distanza tra i due massimi dei profili di densità, può essere generalizzato come segue: all'aumento di α

- d_p aumenta;
- il raggio di troncamento $\tilde{R}_{max}$ aumenta;
- le altezze dei profili di densità intrinseca per $\tilde{z} = 0$ diminuiscono;

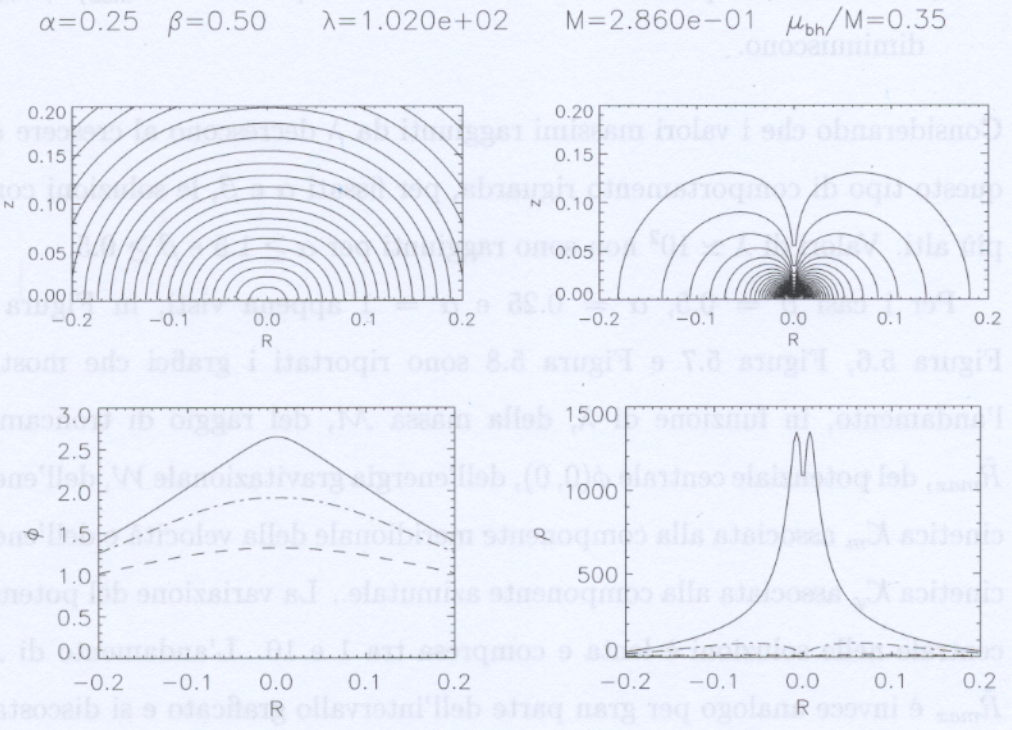


Figura 5.3: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.5$, $\lambda \simeq 10^2$ e $\mu_{bh} = 0.1$.

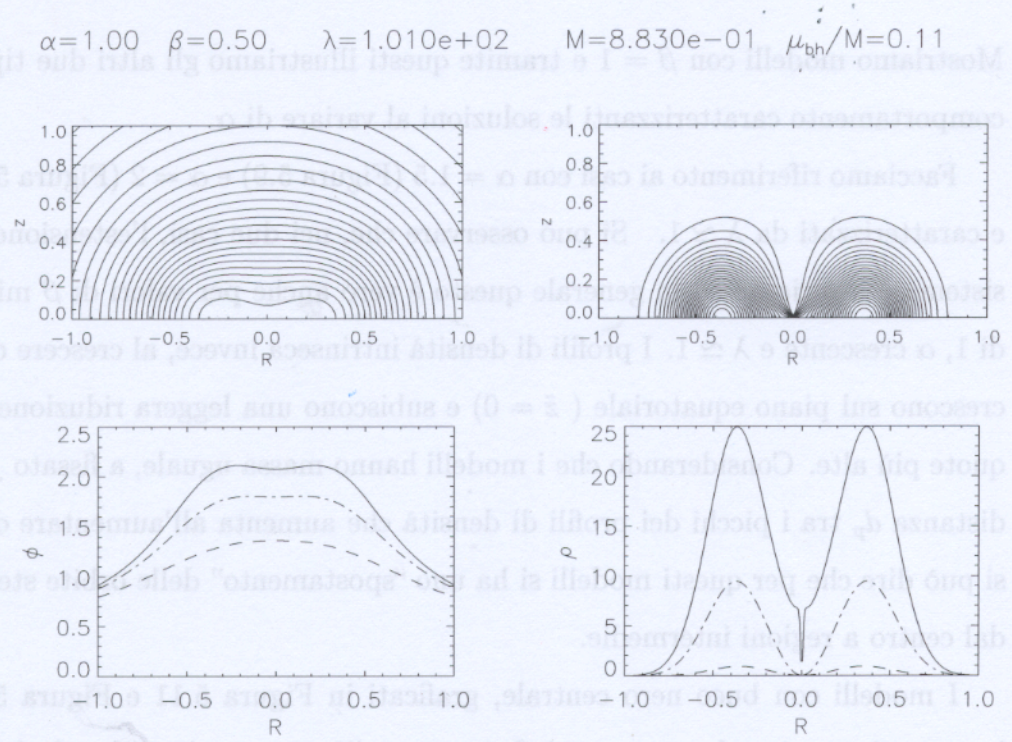


Figura 5.4: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\lambda \simeq 10^2$ e $\mu_{bh} = 0.1$.

- le altezze dei profili di densità intrinseca per $\tilde{z} = \tilde{R}_{max}/2, \tilde{R}_{max}/4$ diminuiscono.

Considerando che i valori massimi raggiunti da λ decrescono al crescere di β, questo tipo di comportamento riguarda, per fissati α e β, le soluzioni con i λ più alti. Valori di $\lambda \simeq 10^2$ non sono raggiunti per $\alpha \geq 1.5$ e $\beta \geq 0.5$.

Per i casi $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.25$ e $\alpha = 1$ appena visti, in Figura 5.5, Figura 5.6, Figura 5.7 e Figura 5.8 sono riportati i grafici che mostrano l'andamento, in funzione di λ, della massa $\mathcal{M}$, del raggio di troncamento $\tilde{R}_{max}$, del potenziale centrale $\phi(0,0)$, dell'energia gravitazionale $\mathcal{W}$, dell'energia cinetica $\mathcal{K}_m$ associata alla componente meridionale della velocità e dell'energia cinetica $\mathcal{K}_\varphi$ associata alla componente azimutale.. La variazione del potenziale centrale nelle soluzioni è lenta e compresa tra 1 e 10. L'andamento di $\mathcal{M}$ e $\tilde{R}_{max}$ è invece analogo per gran parte dell'intervallo graficato e si discosta nei casi con $\mu_{bh} \neq 0$ per valori di $\lambda \gg 1$.

5.2.2 Modelli con $\beta = 1$

Mostriamo modelli con $\beta = 1$ e tramite questi illustriamo gli altri due tipi di comportamento caratterizzanti le soluzioni al variare di α.

Facciamo riferimento ai casi con $\alpha = 1.5$ (Figura 5.9) e $\alpha = 2$ (Figura 5.10) e caratterizzati da $\lambda \simeq 1$. Si può osservare che, nei due casi, l'estensione del sistema è invariante ed in generale questo è vero anche per valori di β minori di 1, α crescente e $\lambda \simeq 1$. I profili di densità intrinseca invece, al crescere di α, crescono sul piano equatoriale ($\tilde{z} = 0$) e subiscono una leggera riduzione per quote più alte. Considerando che i modelli hanno massa uguale, a fissato f_0, e distanza d_p tra i picchi dei profili di densità che aumenta all'aumentare di α, si può dire che per questi modelli si ha uno "spostamento" delle orbite stellari dal centro a regioni intermedie.

I modelli con buco nero centrale, graficati in Figura 5.11 e Figura 5.12, hanno un'estensione leggermente inferiore a quelli auto-gravitanti e valori della massa totale $\mathcal{M}$ pressocché identici, dato che sono stati generati con $\mu_{bh} = 0.1$. Al variare di α presentano inoltre un comportamento del tutto analogo a quelli

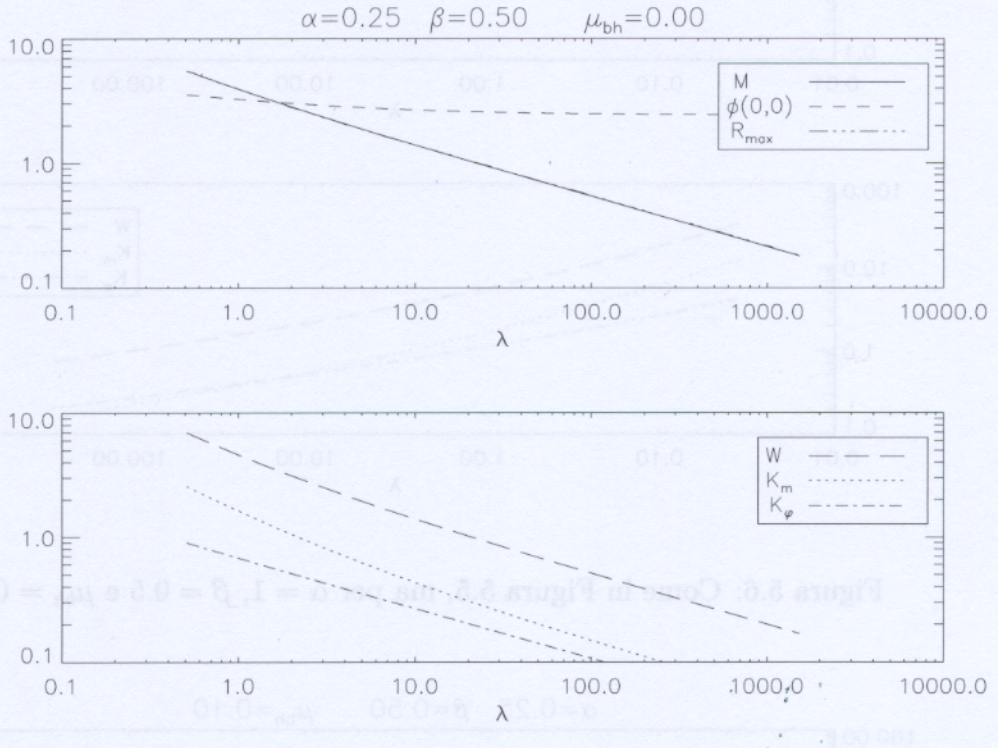


Figura 5.5: Per i modelli con $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.5$ e $\mu_{bh} = 0$. IN ALTO: In scala logaritmica, al variare di λ i valori della massa totale di sistema $\mathcal{M}$ (linea continua), il raggio di troncamento $\tilde{R}_{max}$ (linea tratto-punto) e il potenziale centrale $\phi(0,0)$ (linea tratteggiata). In questo caso le curve per $\mathcal{M}$ e $\tilde{R}_{max}$ sono sovrapposte. IN BASSO: In scala logaritmica, al variare di λ i valori dell'energia gravitazionale totale del sistema $\mathcal{W}$ (linea tratteggiata), l'energia cinetica $\mathcal{K}_m$ associata alla componente meridionale della velocità (linea tratto-punto) e l'energia cinetica $\mathcal{K}_\varphi$ associata alla componente azimutale della velocità (linea punteggiata).

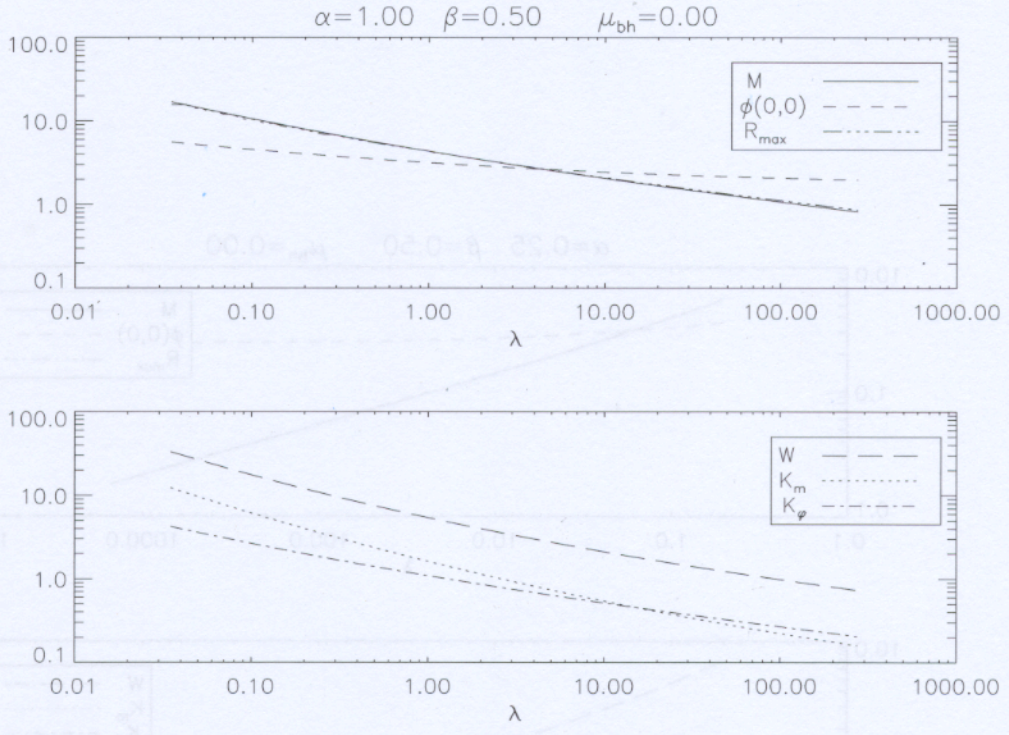


Figura 5.6: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ e $\mu_{bh} = 0$.

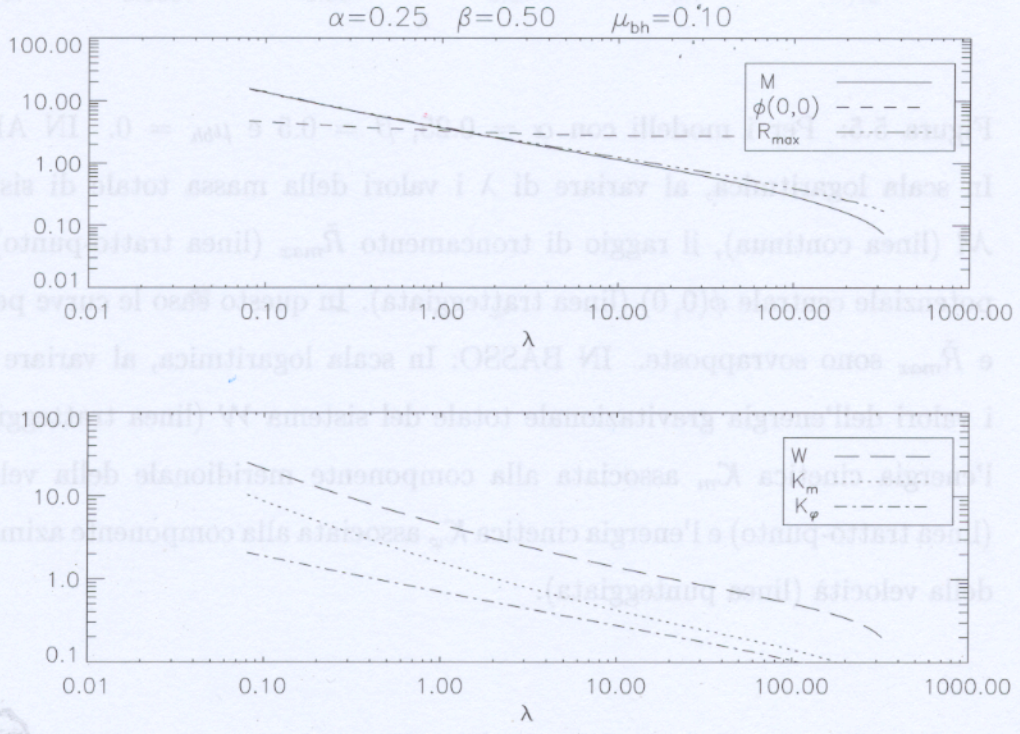


Figura 5.7: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.5$ e $\mu_{bh} = 0.1$.

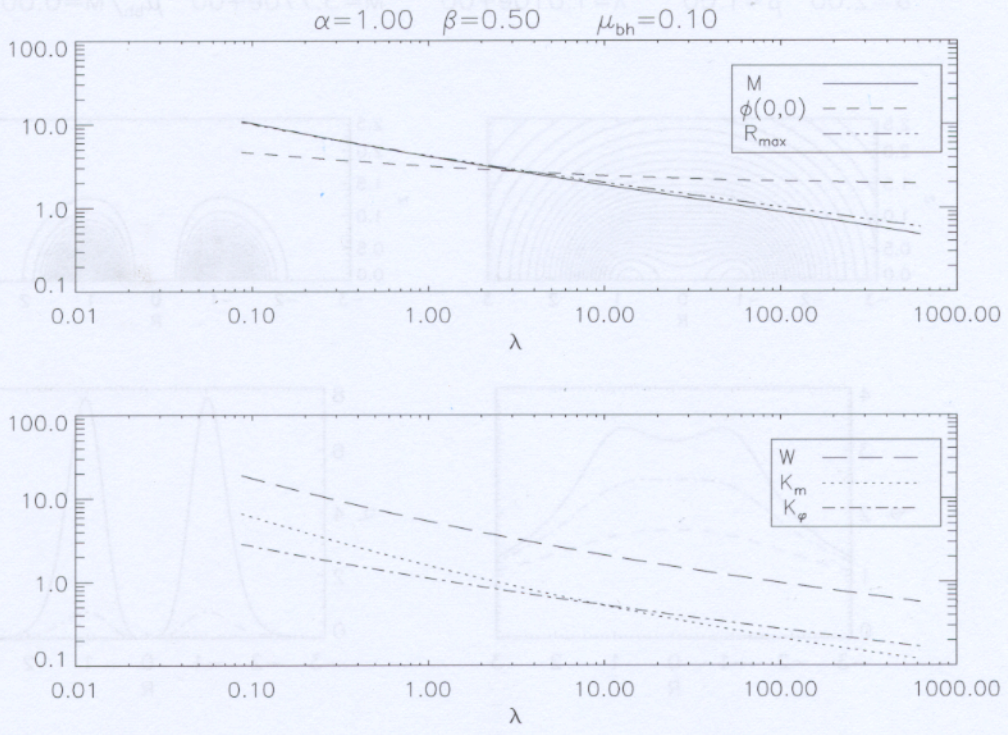


Figura 5.8: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ e $\mu_{bh} = 0.1$.

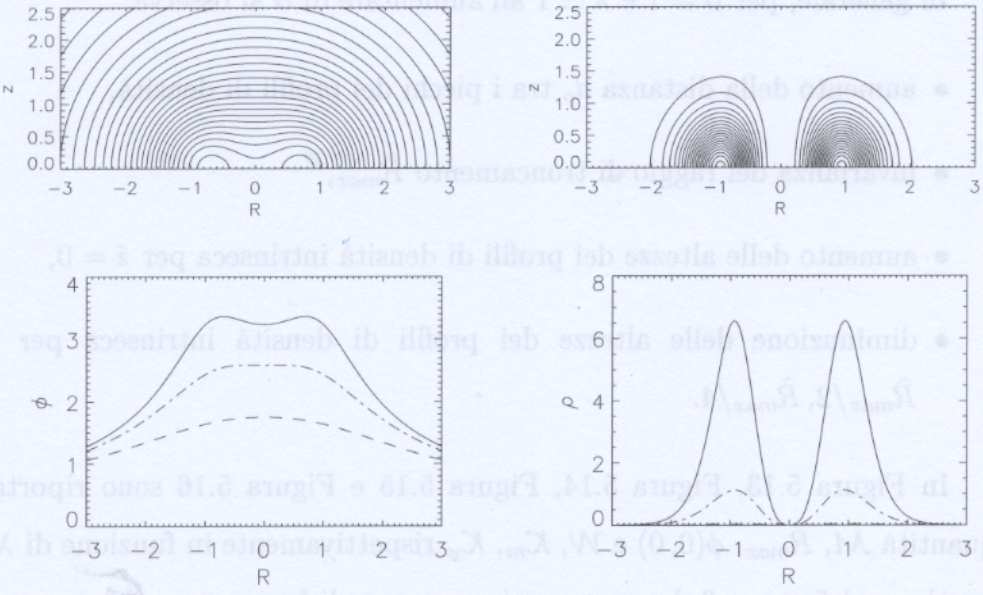


Figura 5.9: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$, $\lambda \simeq 1$ e $\mu_{bh} = 0$.

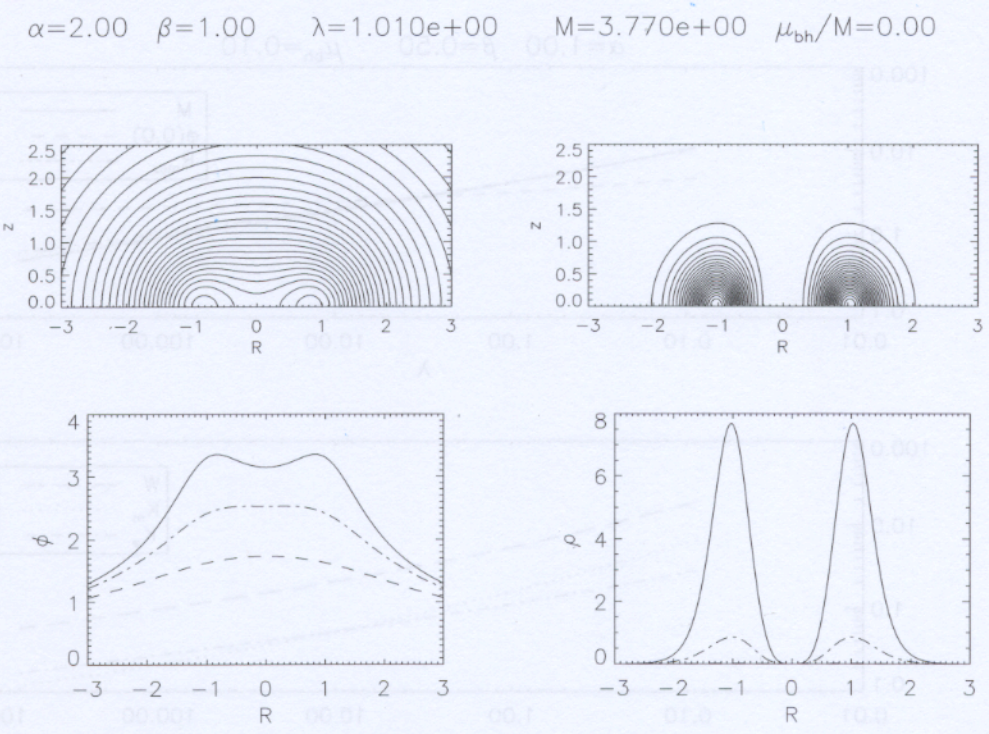


Figura 5.10: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\lambda \simeq 1$ e $\mu_{bh} = 0$.

appena illustrati. Si noti che nonostante la presenza di un corpo massivo centrale i profili di densità mostrano un andamento a zero in nell'origine sul piano equatoriale, a differenza di casi con $\beta = 0.5$.

In generale, per $\beta = 1$ e $\lambda \simeq 1$ all'aumentare di α si osserva:

- aumento della distanza d_p tra i picchi dei profili di densità,
- invarianza del raggio di troncamento $\tilde{R}_{max}$,
- aumento delle altezze dei profili di densità intrinseca per $\tilde{z} = 0$,
- diminuzione delle altezze dei profili di densità intrinseca per $\tilde{z} = \tilde{R}_{max}/2, \tilde{R}_{max}/4$.

In Figura 5.13, Figura 5.14, Figura 5.15 e Figura 5.16 sono riportati le quantità $\mathcal{M}$, $\tilde{R}_{max}$, $\phi(0,0)$ e $\mathcal{W}$, $\mathcal{K}_m$, $\mathcal{K}_\varphi$ rispettivamente in funzione di λ, per i casi $\alpha = 1.5$ e $\alpha = 2$, in assenza e in presenza di buco nero.

Illustriamo il terzo tipo di comportamento tramite due casi con $\beta = 1$ e $\lambda \ll 1$.

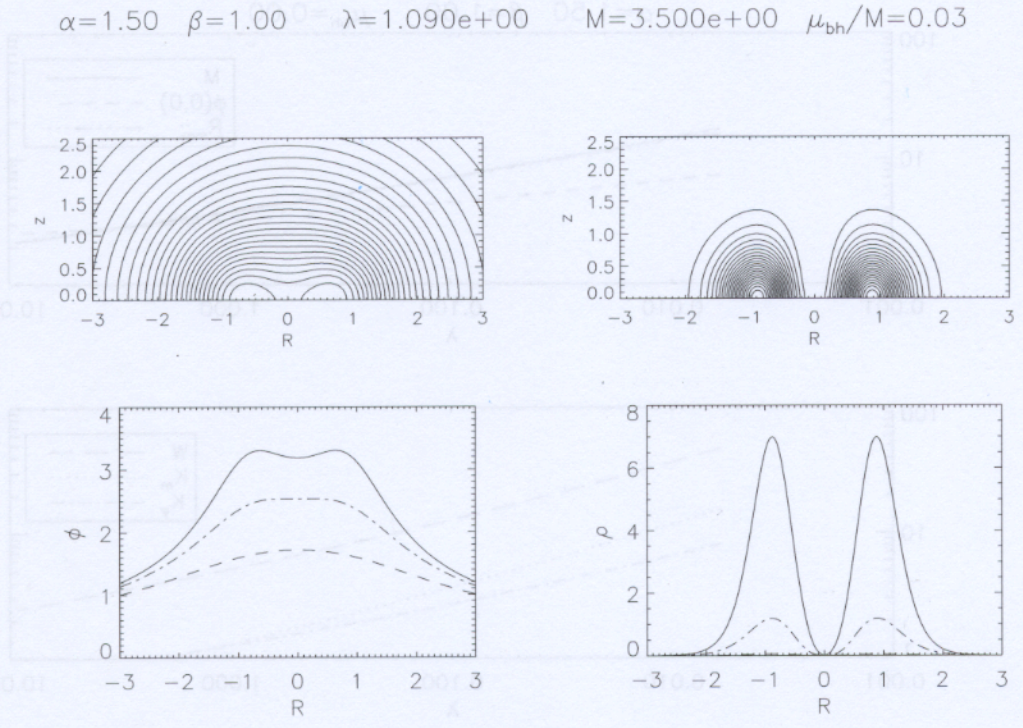


Figura 5.11: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 1.5$, $\beta = 2$, $\lambda \simeq 1$ e $\mu_{bh} = 0.1$.

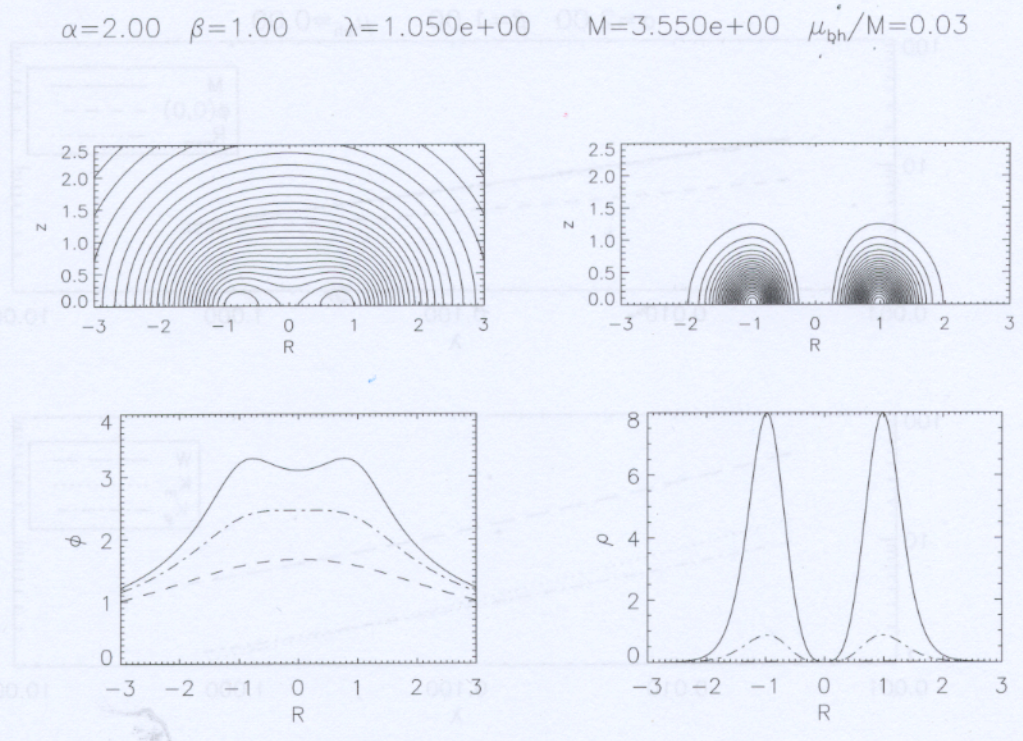


Figura 5.12: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\lambda \simeq 1$ e $\mu_{bh} = 0.1$.

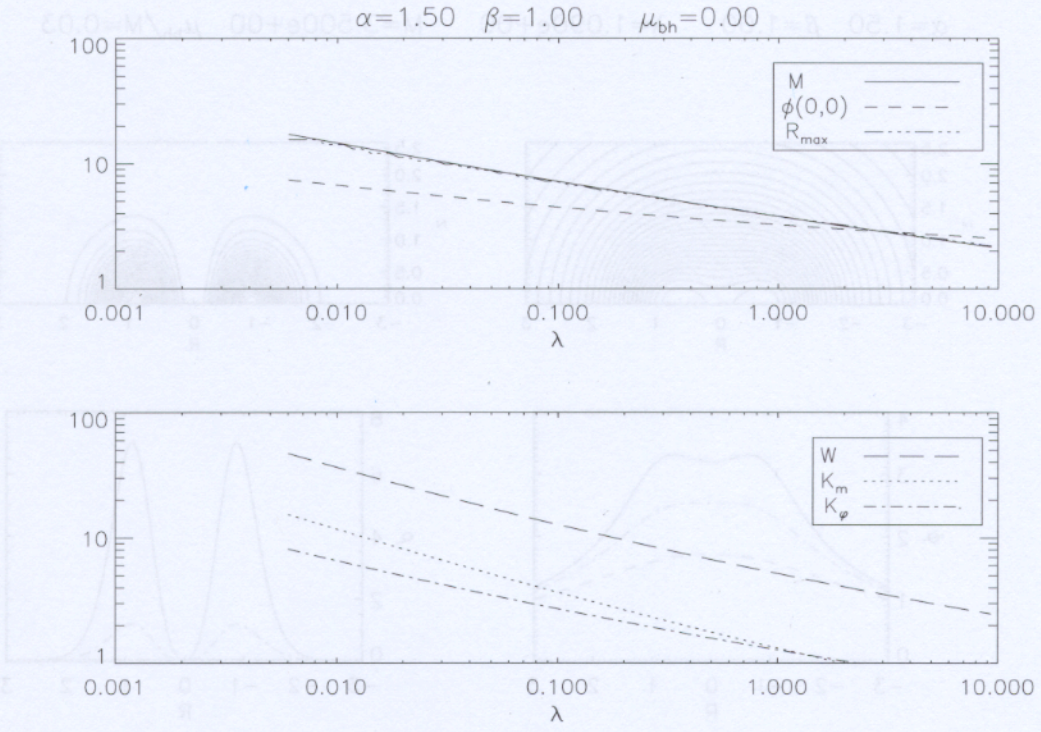


Figura 5.13: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$ e $\mu_{bh} = 0$.

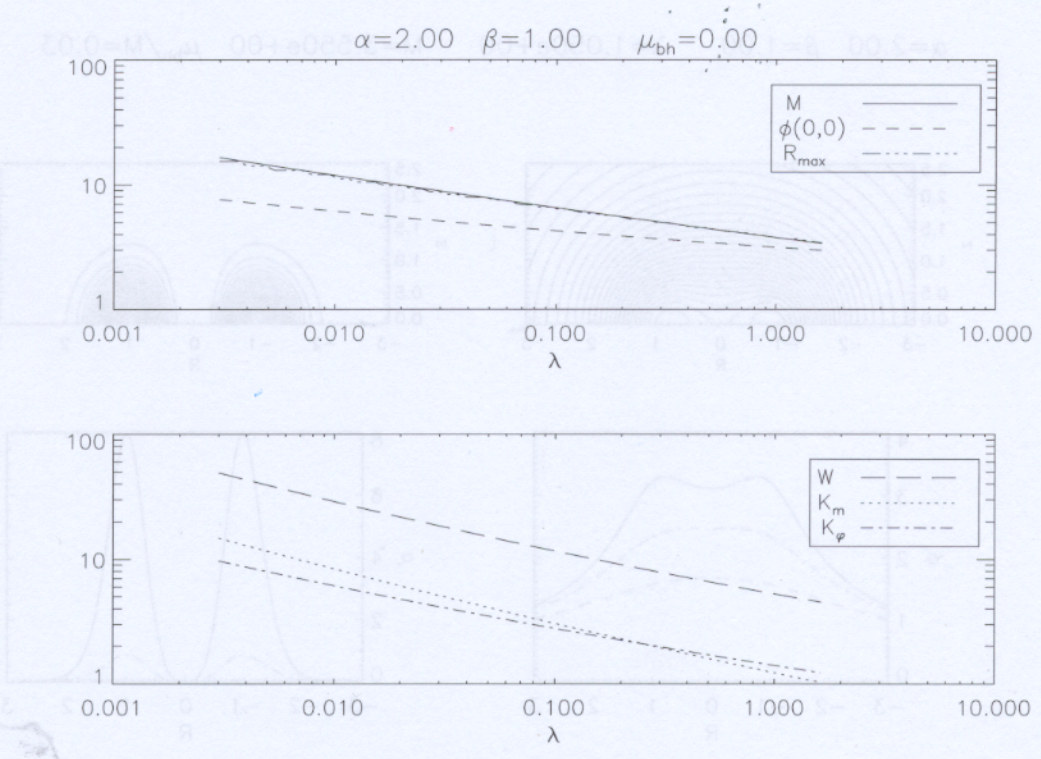


Figura 5.14: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 2$, $\beta = 1$ e $\mu_{bh} = 0$.

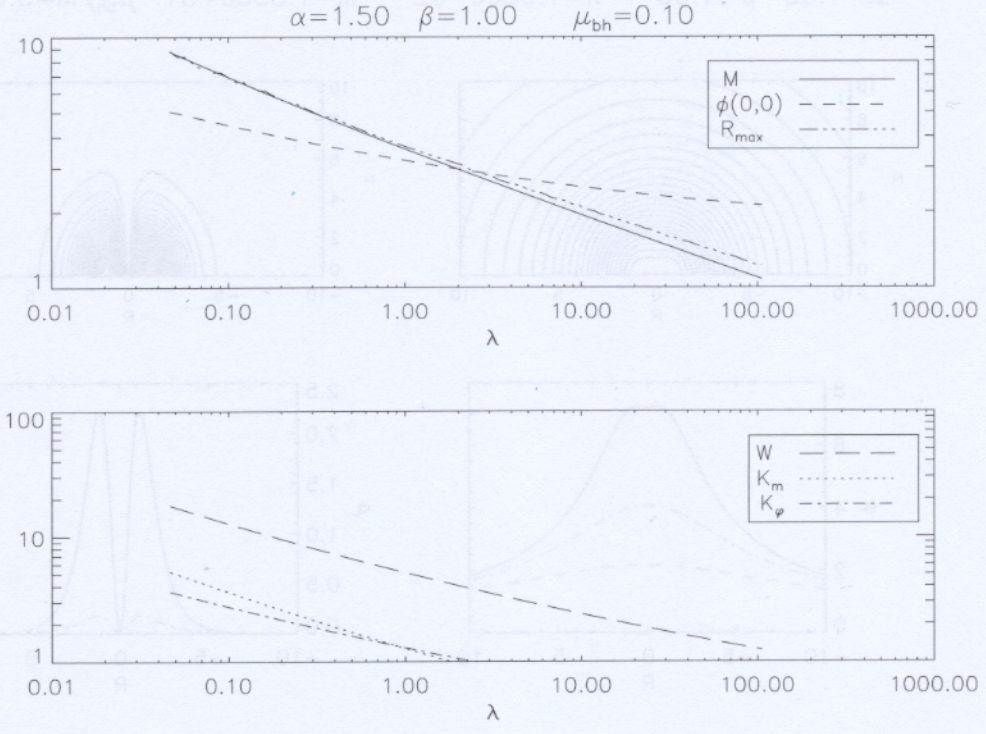


Figura 5.15: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 1.5$, $\beta = 1$ e $\mu_{bh} = 0.1$.

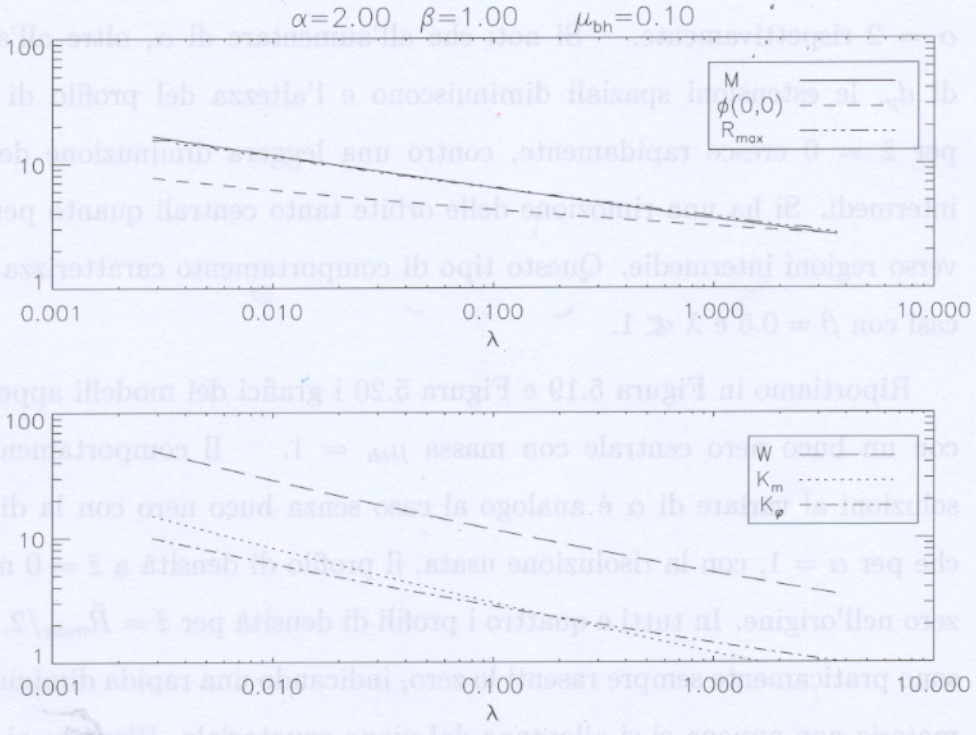


Figura 5.16: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 2$, $\beta = 1$ e $\mu_{bh} = 0.1$.

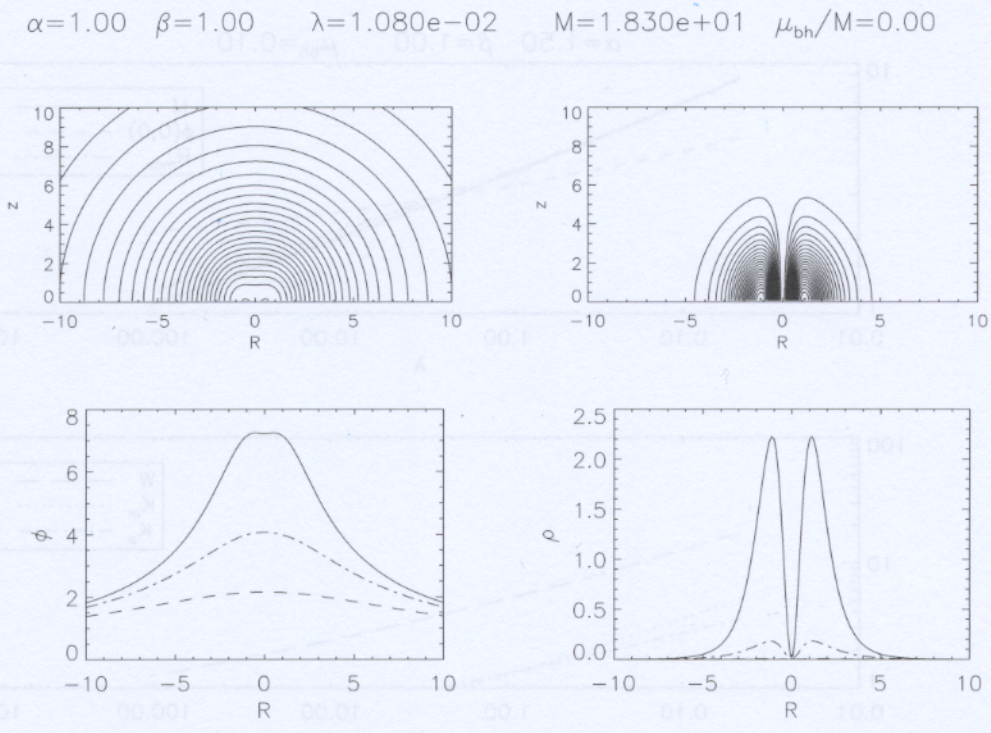


Figura 5.17: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\lambda \simeq 10^{-2}$ e $\mu_{bh} = 0$.

In Figura 5.17 e Figura 5.18 sono riportati i modelli con $\lambda \simeq 10^{-2}$, $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ rispettivamente. Si noti che all'aumentare di α, oltre all'aumento di d_p, le estensioni spaziali diminuiscono e l'altezza del profilo di densità per $\tilde{z} = 0$ cresce rapidamente, contro una leggera diminuzione dei profili intermedi. Si ha una rimozione delle orbite tanto centrali quanto periferiche verso regioni intermedie. Questo tipo di comportamento caratterizza anche i casi con $\beta = 0.5$ e $\lambda \ll 1$.

Riportiamo in Figura 5.19 e Figura 5.20 i grafici dei modelli appena visti con un buco nero centrale con massa $\mu_{bh} = 1$. Il comportamento delle soluzioni al variare di α è analogo al caso senza buco nero con la differenza che per $\alpha = 1$, con la risoluzione usata, il profilo di densità a $\tilde{z} = 0$ non va a zero nell'origine. In tutti e quattro i profili di densità per $\tilde{z} = \tilde{R}_{max}/2, \tilde{R}_{max}/4$ sono praticamente sempre rasenti lo zero, indicando una rapida diminuzione di materia non appena ci si allontana dal piano equatoriale. Rispetto ai modelli con lo stesso set di parametri ma auto-gravitanti si osserva una riduzione dell'estensione spaziale e un incremento dei profili di densità per $\tilde{z} = 0$.

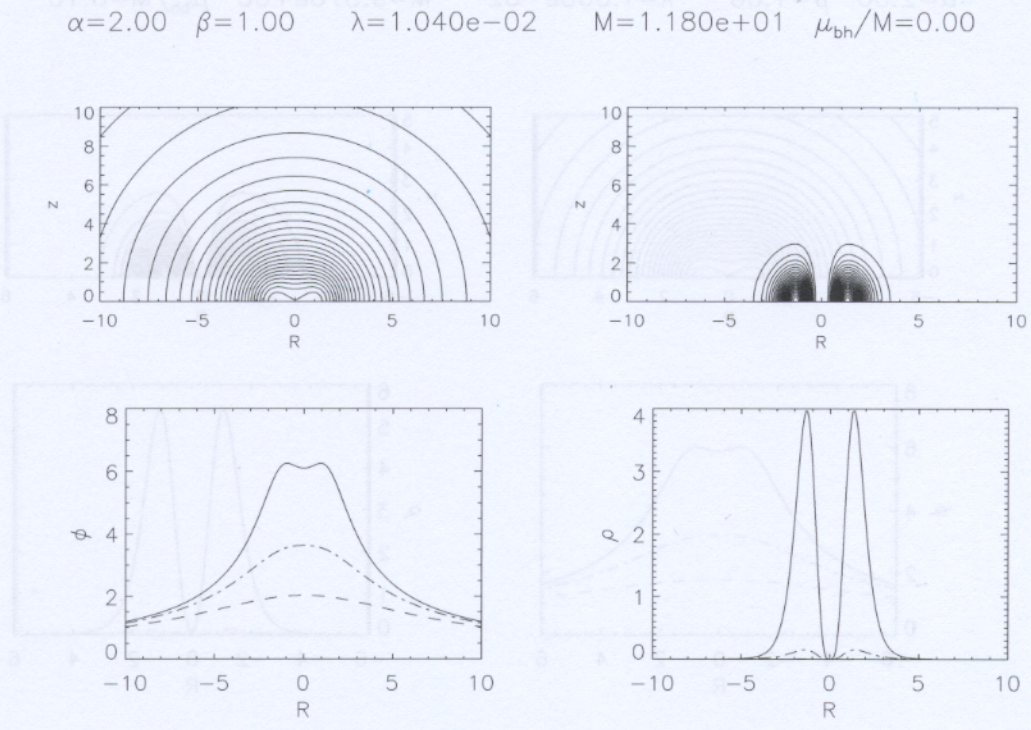


Figura 5.18: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\lambda \simeq 10^{-2}$ e $\mu_{bh} = 0$.

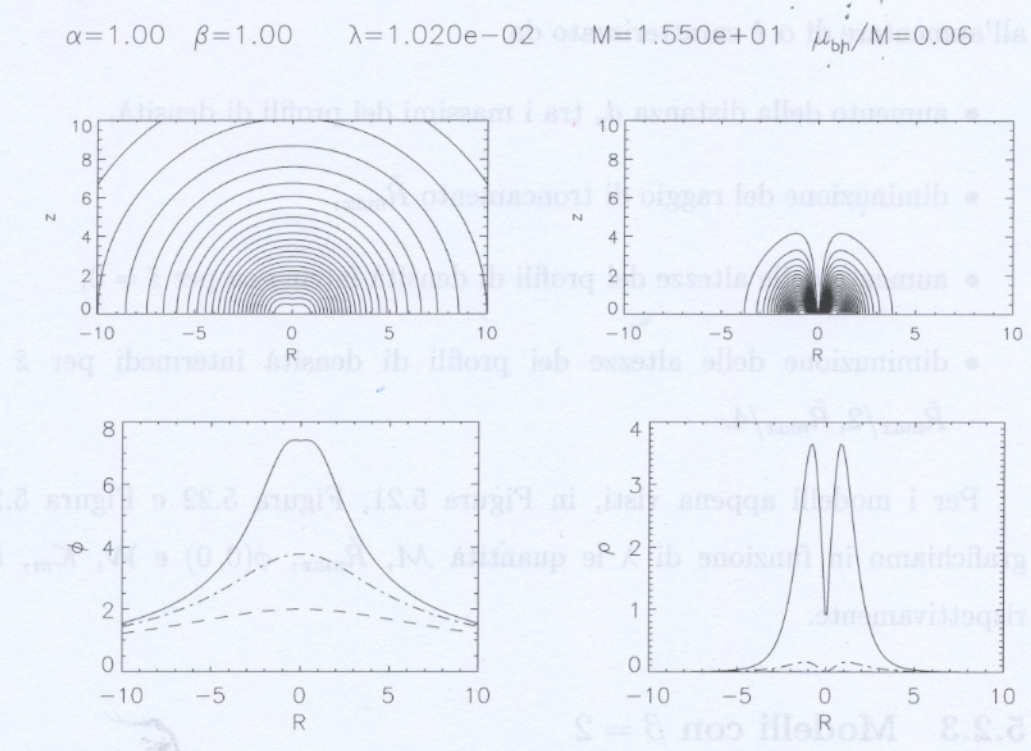


Figura 5.19: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\lambda \simeq 10^{-2}$ e $\mu_{bh} = 1$.

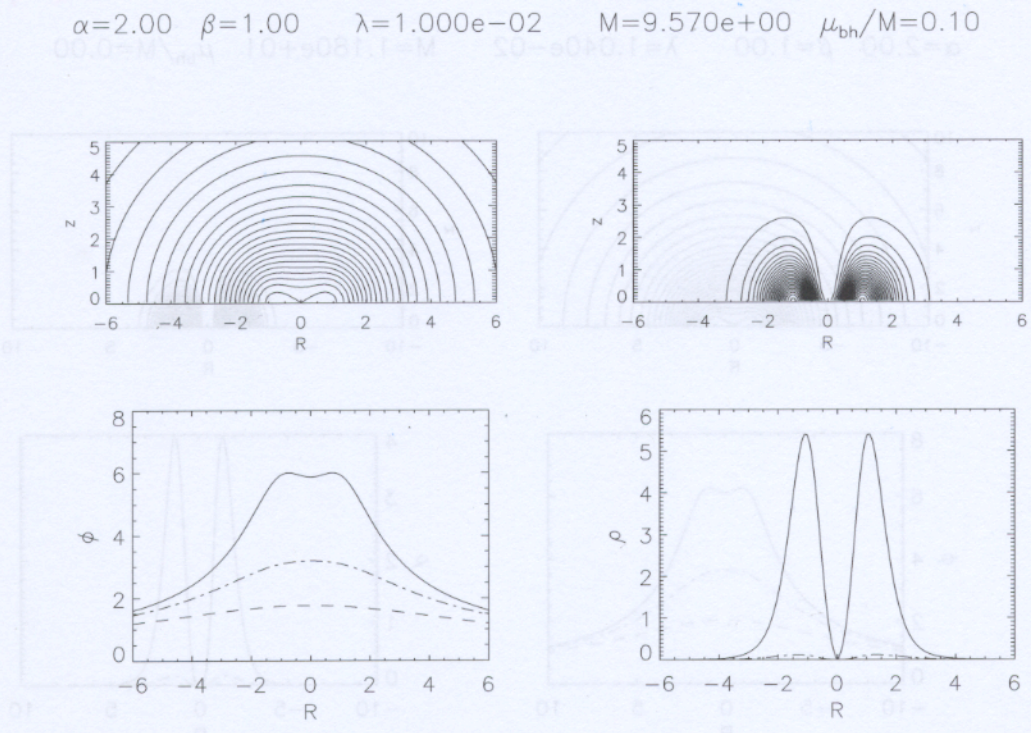


Figura 5.20: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\lambda \simeq 10^{-2}$ e $\mu_{bh} = 1$.

Il terzo tipo di comportamento, che riscontriamo per $\beta = 1$ e $\lambda \simeq 10^{-2}$, all'aumentare di α è caratterizzato da

- aumento della distanza d_p tra i massimi dei profili di densità,
- diminuzione del raggio di troncamento $\tilde{R}_{max}$,
- aumento delle altezze dei profili di densità intrinseca per $\tilde{z} = 0$,
- diminuzione delle altezze dei profili di densità intermedi per $\tilde{z} = \tilde{R}_{max}/2, \tilde{R}_{max}/4$.

Per i modelli appena visti, in Figura 5.21, Figura 5.22 e Figura 5.23, grafichiamo in funzione di λ le quantità $\mathcal{M}$, $\tilde{R}_{max}$, $\phi(0,0)$ e $\mathcal{W}$, $\mathcal{K}_m$, $\mathcal{K}_\varphi$ rispettivamente.

5.2.3 Modelli con $\beta = 2$

All'aumentare di β i tre tipi di comportamento delle soluzioni visti per i casi $\beta \leq 1$ si spostano verso valori più bassi di λ. Ad esempio, un comportamento

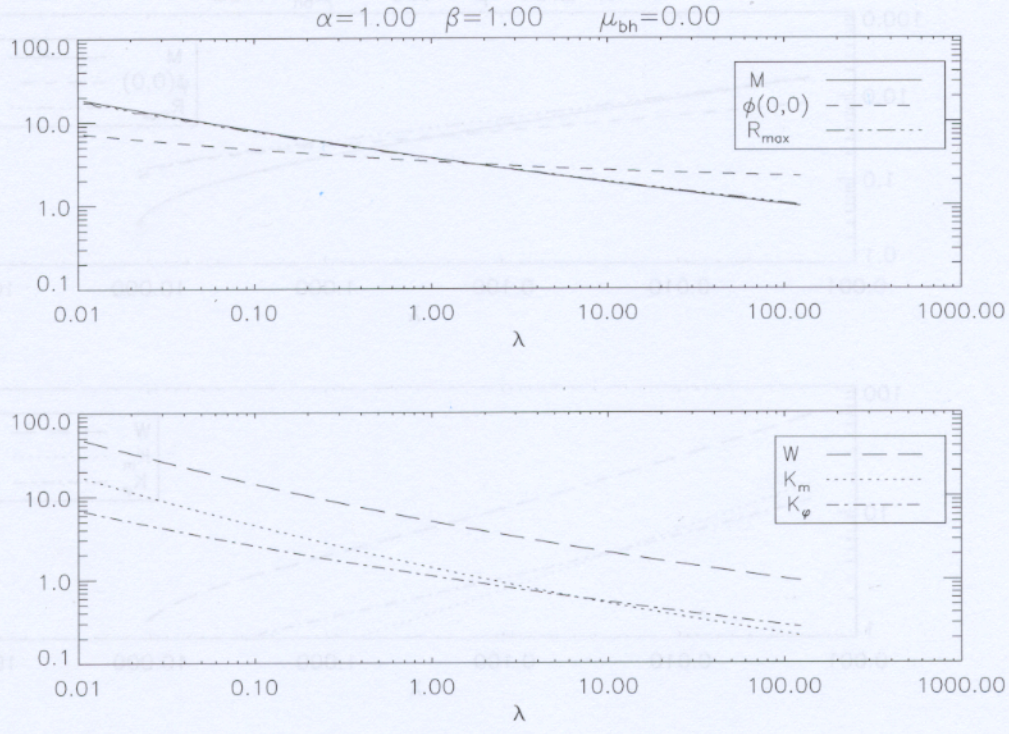


Figura 5.21: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\mu_{bh} = 0$.

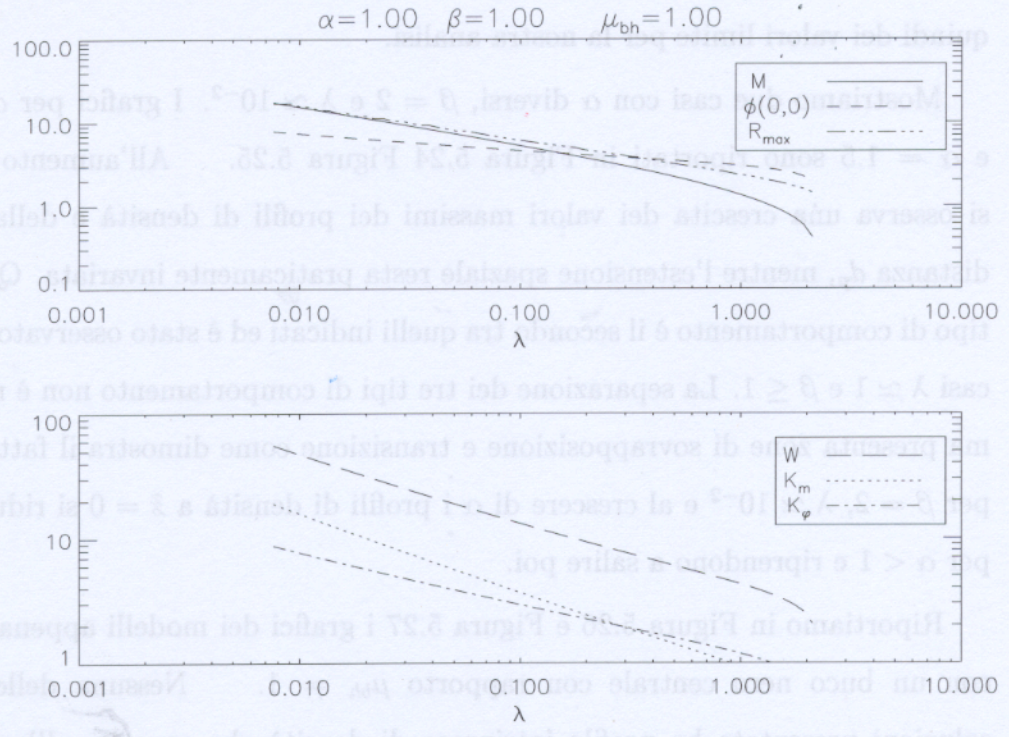


Figura 5.22: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\mu_{bh} = 1$.

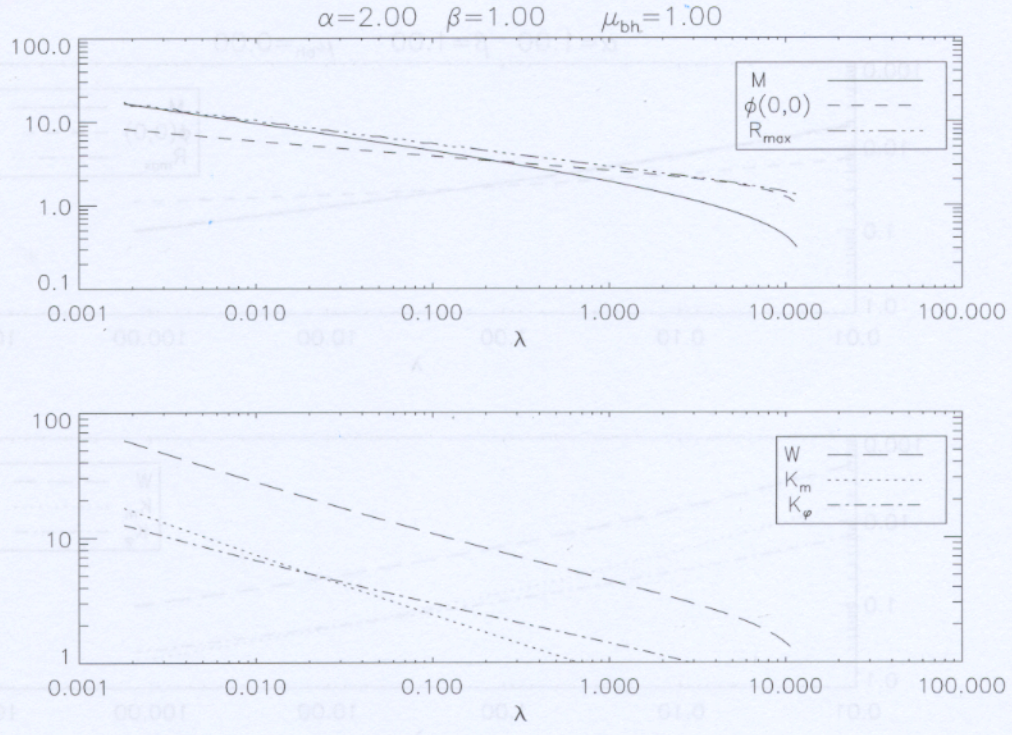


Figura 5.23: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 2$, $\beta = 1$ e $\mu_{bh} = 1$.

più simile all'ultimo visto nei casi con $\beta = 1$ lo si ha per $\lambda \simeq 10^{-4}$, a ridosso quindi dei valori limite per la nostra analisi.

Mostriamo due casi con α diversi, $\beta = 2$ e $\lambda \simeq 10^{-2}$. I grafici per $\alpha = 1$ e $\alpha = 1.5$ sono riportati in Figura 5.24 Figura 5.25. All'aumento di α si osserva una crescita dei valori massimi dei profili di densità e della loro distanza d_p, mentre l'estensione spaziale resta praticamente invariata. Questo tipo di comportamento è il secondo tra quelli indicati ed è stato osservato per i casi $\lambda \simeq 1$ e $\beta \leq 1$. La separazione dei tre tipi di comportamento non è netta, ma presenta zone di sovrapposizione e transizione come dimostra il fatto che per $\beta = 2$, $\lambda \simeq 10^{-2}$ e al crescere di α i profili di densità a $\tilde{z} = 0$ si riducono per $\alpha < 1$ e riprendono a salire poi.

Riportiamo in Figura 5.26 e Figura 5.27 i grafici dei modelli appena visti con un buco nero centrale con rapporto $\mu_{bh} = 1$. Nessuna delle due soluzioni presentate ha profilo intrinseco di densità che va a 0 nell'origine, anzi, in caso con $\alpha = 1$ per $\tilde{z} = 0$ è presente un picco di densità doppio rispetto alle regioni immediatamente limitrofe. Anche per questi casi i profili

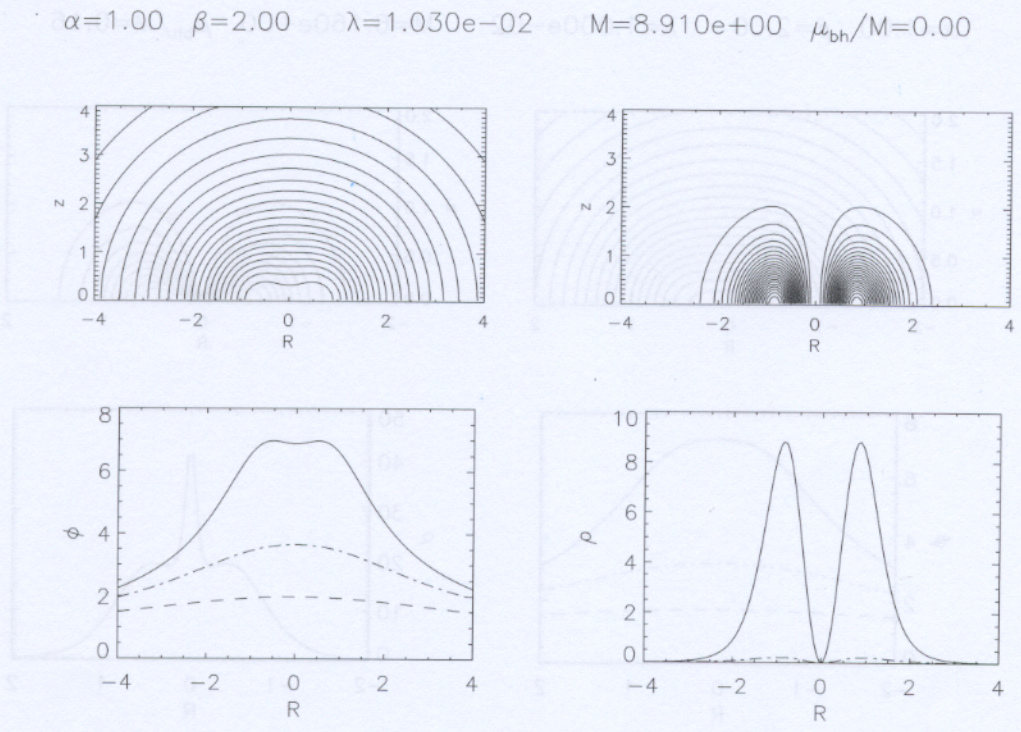


Figura 5.24: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\lambda \simeq 10^{-2}$ e $\mu_{bh} = 0$.

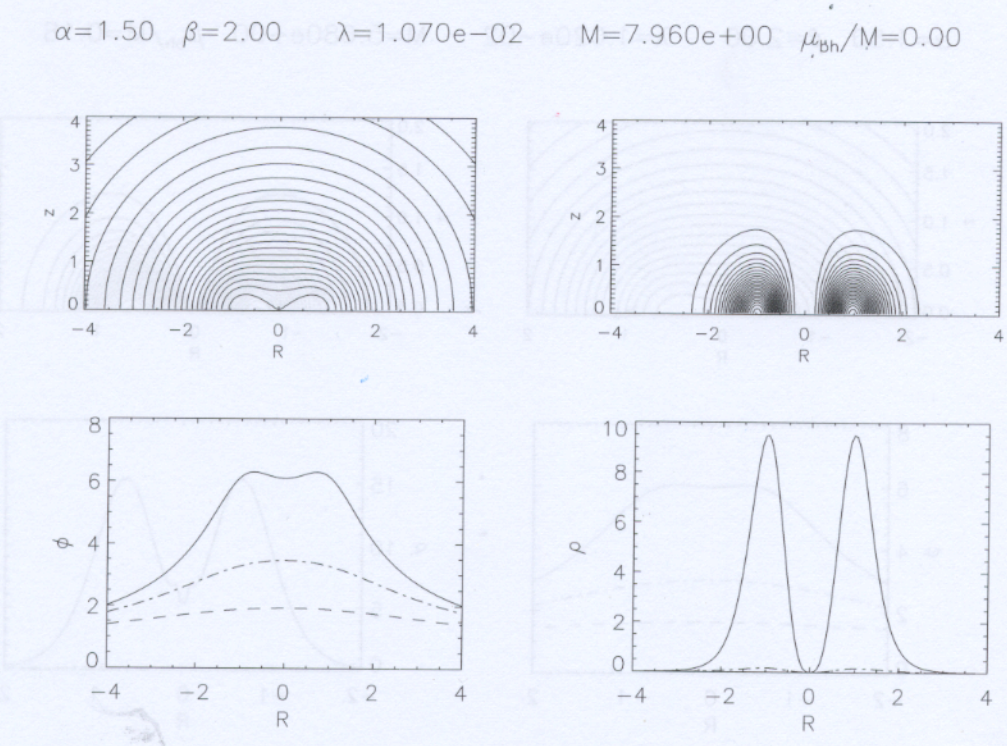


Figura 5.25: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 1.5$, $\beta = 2$, $\lambda \simeq 10^{-2}$ e $\mu_{bh} = 0$.

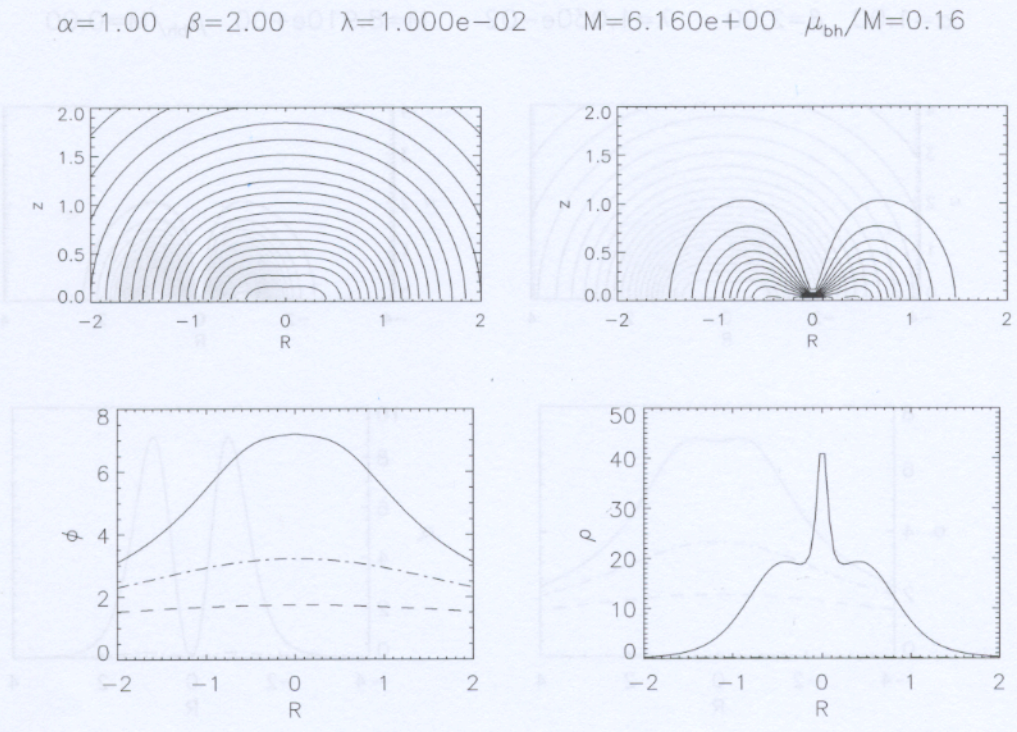


Figura 5.26: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\lambda \simeq 10^{-2}$ e $\mu_{bh} = 1$.

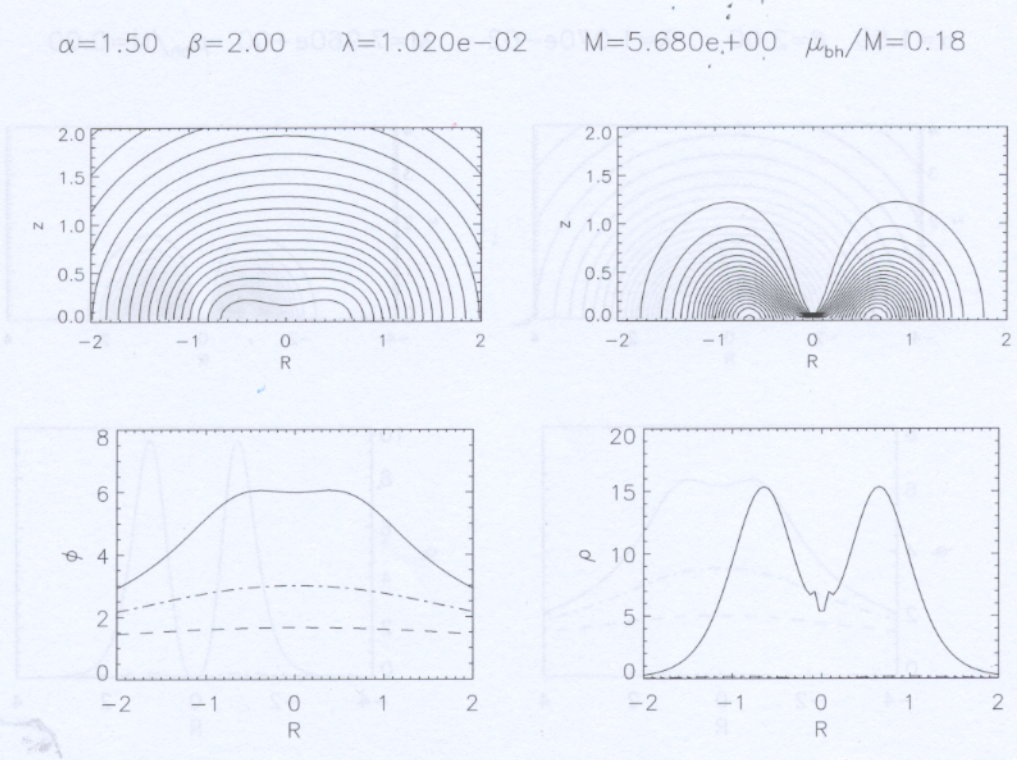


Figura 5.27: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 1.5$, $\beta = 2$, $\lambda \simeq 10^{-2}$ e $\mu_{bh} = 1$.

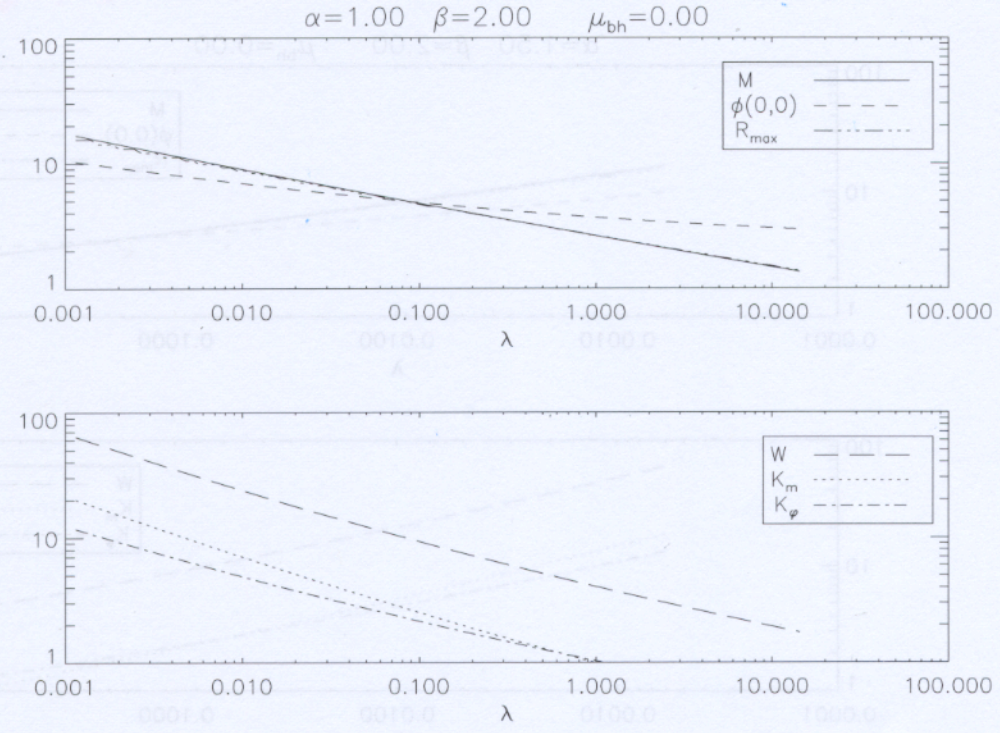


Figura 5.28: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e $\mu_{bh} = 0$.

di densità per $\tilde{z} = \tilde{R}_{max}/2, \tilde{R}_{max}/4$ sono praticamente sempre rasenti lo zero, indicando una rapida diminuzione di materia non appena ci si allontana dal piano equatoriale. Rispetto agli stessi analoghi ma auto-gravitanti si osserva negli esempi mostrati, una riduzione dell'estensione spaziale e un incremento dei profili di densità sul piano equatoriale.

In Figura 5.28, Figura 5.30, Figura 5.29 e Figura 5.31 sono riportati, per i modelli caratterizzati dai parametri scelti, i grafici che mostrano l'andamento in funzione di λ delle quantità $\mathcal{M}$, $\tilde{R}_{max}$, $\phi(0,0)$ e $\mathcal{W}$, $\mathcal{K}_m$, $\mathcal{K}_\varphi$ rispettivamente.

5.2.4 La famiglia dei modelli con $\alpha = 0$

Per un confronto con i modelli appena illustrati, mostriamo di seguito alcuni risultati per $\alpha = 0$. Come ci si aspetta, non rispettando la condizione (3.19), sono generati da una DF che non rimuove le orbite più vicine all'asse z e quindi questa sottofamiglia di modelli non presenta struttura toroidale.

Con $\beta = 1$, mostriamo due modelli: uno auto-gravitante con $\lambda \simeq 1$ (5.32) e

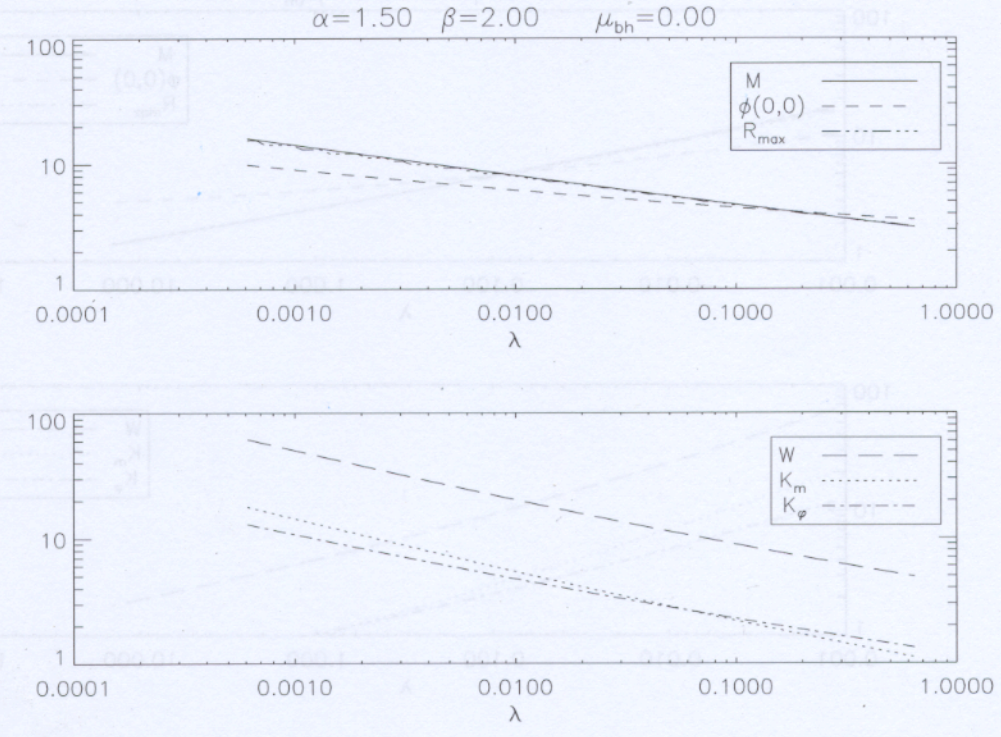


Figura 5.29: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 1.5$, $\beta = 2$ e $\mu_{bh} = 0$.

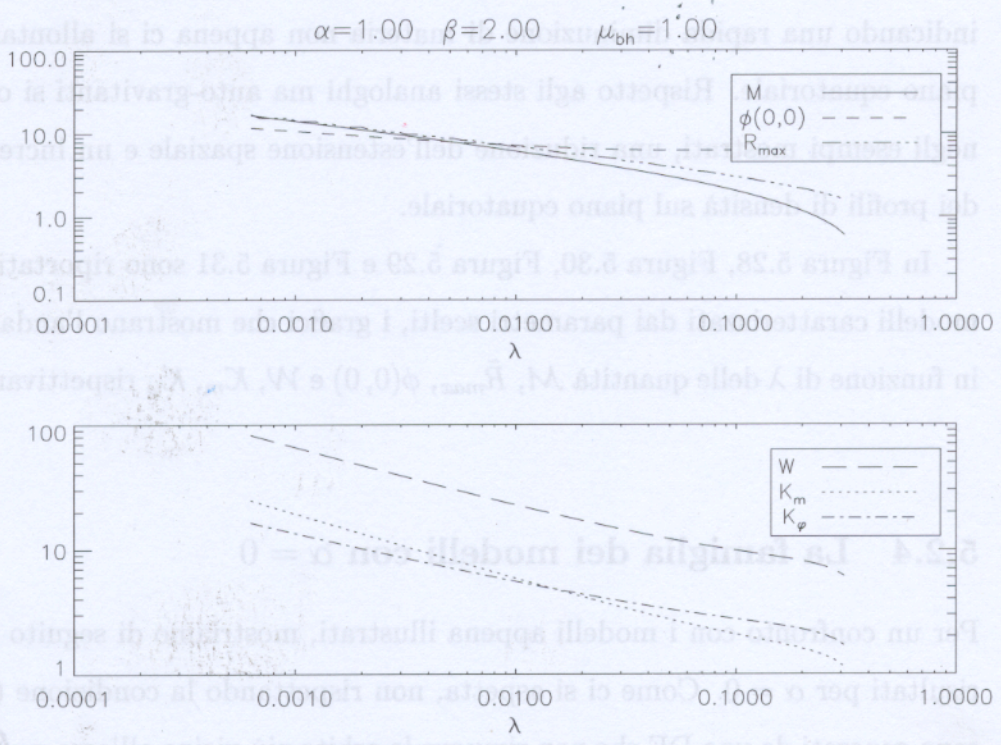


Figura 5.30: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e $\mu_{bh} = 1$.

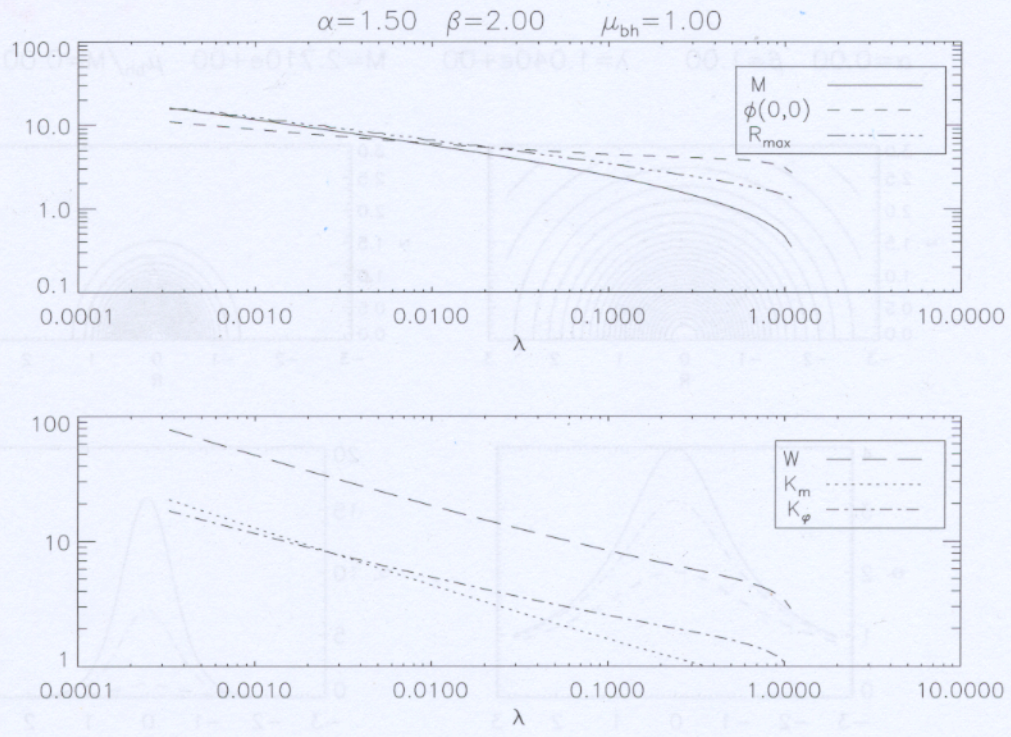


Figura 5.31: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 1.5$, $\beta = 2$ e $\mu_{bh} = 1$.

l'altro con buco nero di massa $\mu_{bh} = 0.1$ e $\lambda \simeq 10^{-1}$ (Figura 5.33). Al diminuire di λ i modelli risultano prolati lungo l'asse $\tilde{z}$, in particolare quelli con buco nero centrale, hanno curve di livello della densità via via più alte e strette, al limite a forma di cuspide. Osserviamo che il buco nero influenza il profilo di densità che presenta un picco.

Modelli corrispondenti a valori di λ più alti risultano invece oblati, con uno schiacciamento sul piano equatoriale, come mostrato in Figura 5.34 per il caso auto-gravitante con $\lambda \simeq 10^2$.

In Figura 5.21 riportiamo in funzione di λ le quantità $\mathcal{M}$, $\tilde{R}_{max}$, $\phi(0,0)$ e $\mathcal{W}$, $\mathcal{K}_m$, $\mathcal{K}_\varphi$ rispettivamente, per il caso $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

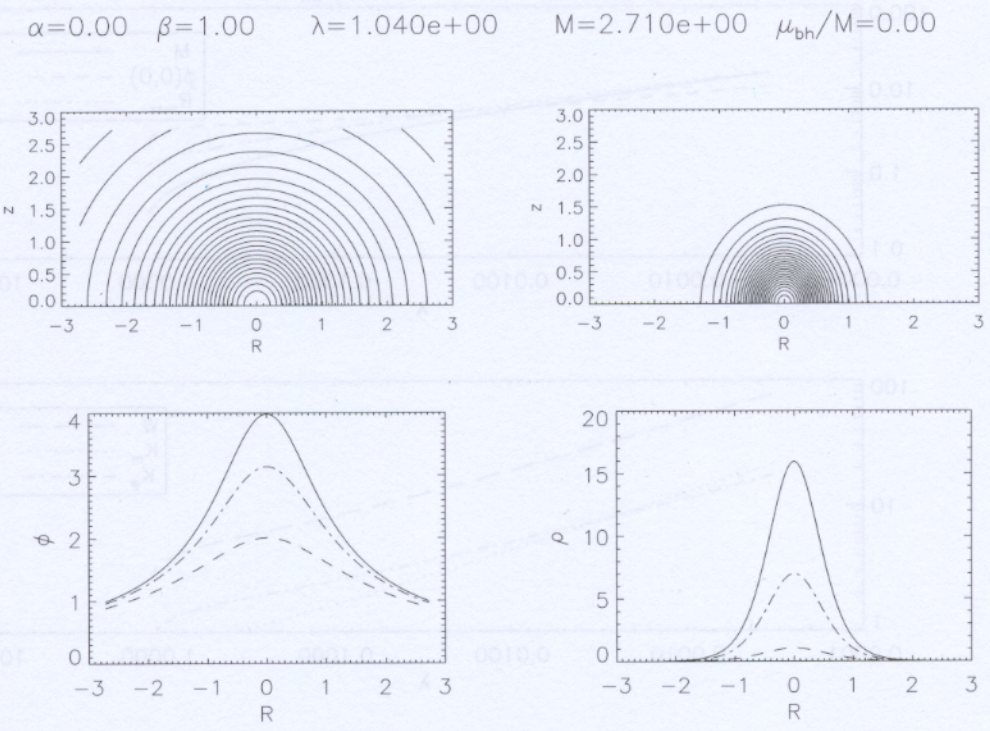


Figura 5.32: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\lambda \simeq 1$ e $\mu_{bh} = 0$.

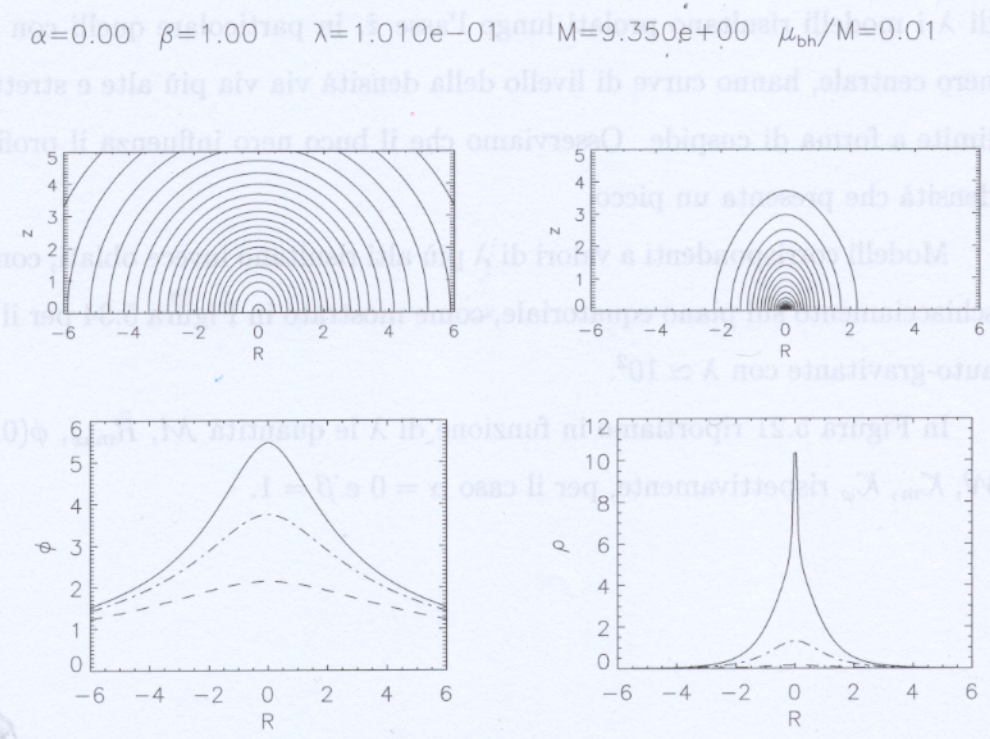


Figura 5.33: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\lambda \simeq 10^{-1}$ e $\mu_{bh} = 0.1$.

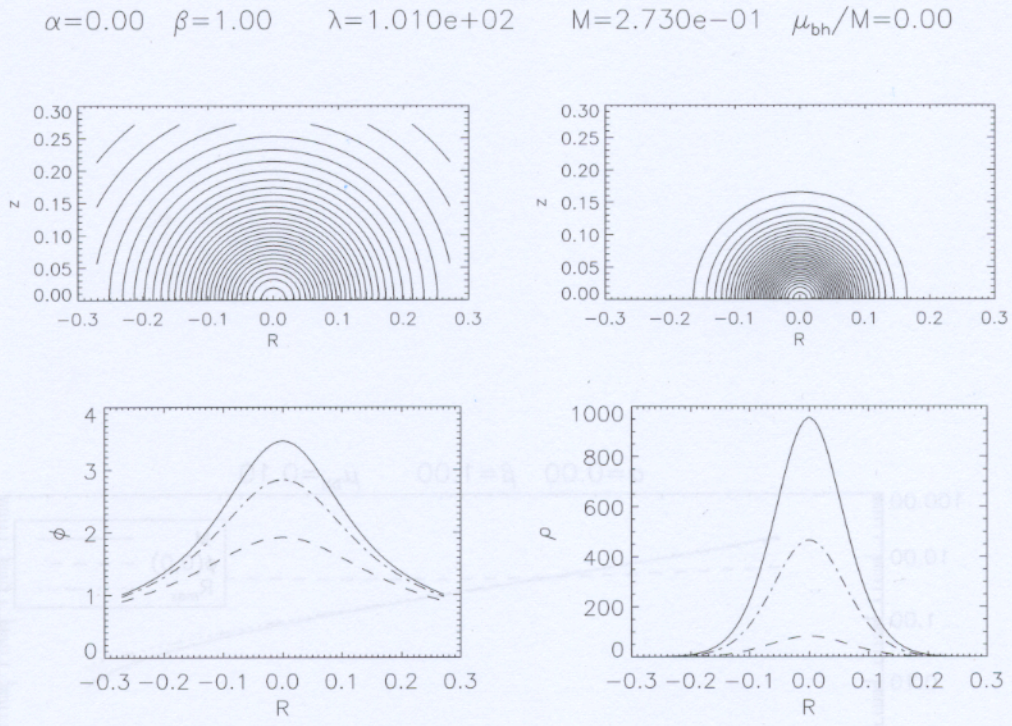


Figura 5.34: Come in Figura 5.1, ma per $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\lambda \simeq 10^2$ e $\mu_{bh} = 0$.

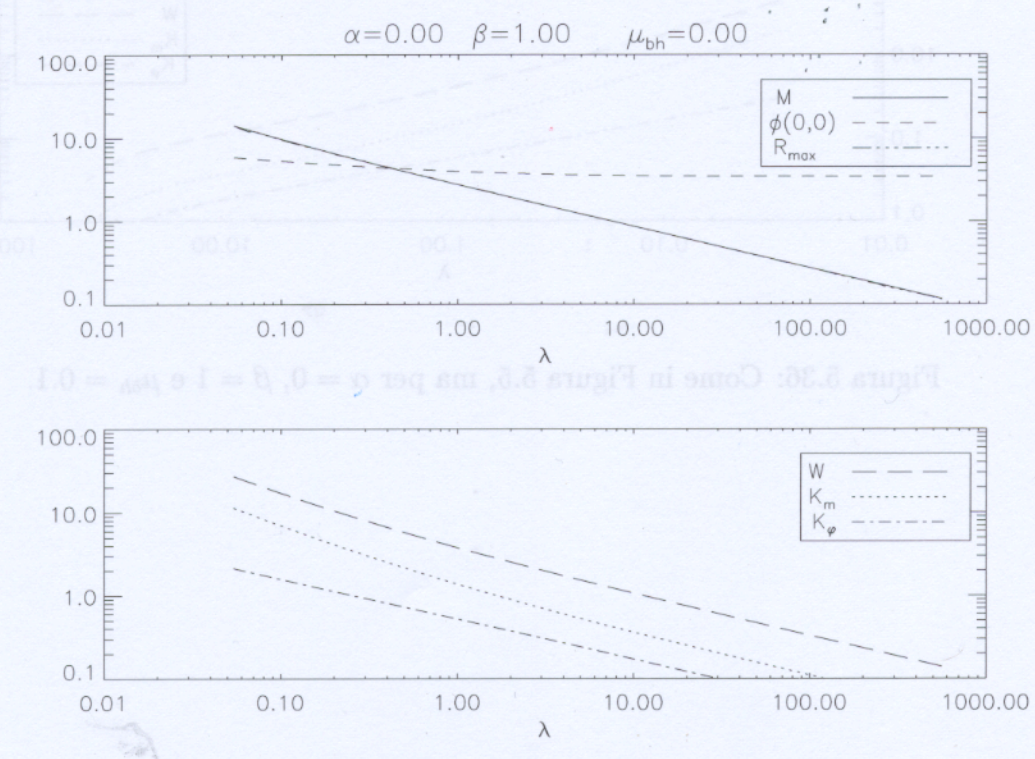


Figura 5.35: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $\mu_{bh} = 0$.

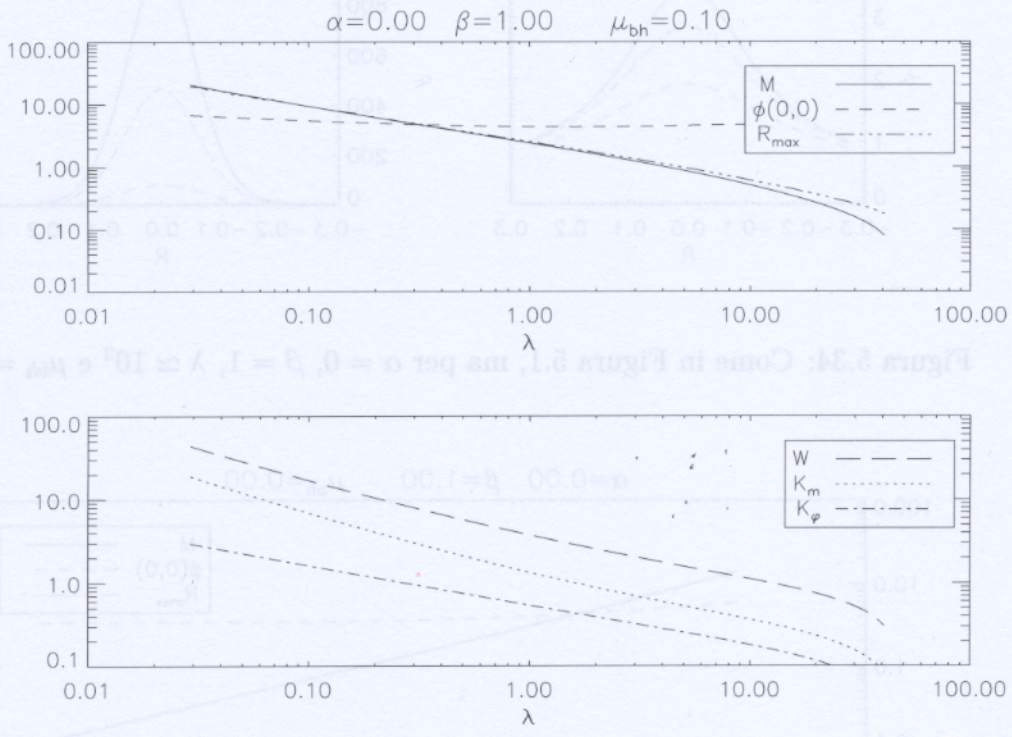


Figura 5.36: Come in Figura 5.5, ma per $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $\mu_{bh} = 0.1$.

Capitolo 6

Conclusioni

6.1 Conclusioni

In questo lavoro di Tesi abbiamo costruito modelli di sistemi stellari non-collisionali che sono *assisimmetrici*, *troncati* e con *struttura toroidale*. Per far questo siamo partiti dalla funzione di distribuzione (3.1) e, per il caso particolare di una *politropica generalizzata* (3.61) e di sistemi non in rotazione, abbiamo risolto numericamente l'equazione di Poisson ad essa associata.

I modelli ottenuti sono risultati dipendenti da 5 parametri: tre dimensionali f_0, R_a e Q_0, due adimensionali α, β. Dei primi tre, f_0 è la normalizzazione della DF; R_a e Q_0 sono rispettivamente il *raggio di anisotropia* e il *potenziale di taglio* (usato per ottenere il troncamento dei sistemi) e sono stati impiegati – insieme alla costante di gravitazione universale G – come grandezze scala nella formulazione adimensionale problema di Poisson (4.1). I due restanti parametri sono esponenti nell'espressione della DF (3.1). Data la relazione $\gamma = \alpha + \beta + 3/2$, si è fatto uso, a seconda della praticità, anche di α e γ come parametri di riferimento.

In aggiunta ai parametri, un'altra grandezza che caratterizza le soluzioni è l'autovalore λ che si ottiene nella formulazione adimensionale dell'equazione di Poisson (4.1). In esso sono raccolte tutte le quantità che nell'espressione (3.64) per la densità, una volta normalizzata, non sono funzioni dello spazio delle fasi.

Nelle simulazioni numeriche, fissati α e β, stimato un λ iniziale secondo la (5.1), si è cercata una coppia potenziale-densità che risolvesse la (4.10). Nel caso di un esito positivo, il valore di λ è stato incrementato (o ridotto) e il processo di ricerca ha avuto nuovamente inizio. Le quantità f_0, R_a e Q_0 sono state mantenute normalizzate a 1.

Abbiamo riportato soluzioni corrispondenti a $\lambda \geq 10^{-4}$. Per valori inferiori di λ si è osservata una scarsa sensibilità dei modelli alla variazione dell'autovalore. L'andamento di λ in funzione dei parametri α e β risulta inoltre fortemente dominato dalla funzione Beta di Eulero,

$$\lambda \propto B\left(\alpha + \frac{3}{2}, \beta + 1\right), \tag{6.1}$$

e per le soluzioni trovate inversamente proporzionale alla massa totale $\mathcal{M}$ dei sistemi.

Si sono ricavate soluzioni tanto auto-gravitanti quanto in presenza del potenziale esterno di un corpo centrale supermassivo (come ad esempio un buco nero). Nel caso dei modelli auto-gravitanti, sono state accettate soluzioni per combinazioni di α e β appartenenti all'intervallo $]0, 4[$ e tutte presentano struttura toroidale. Nell'ipotesi che il potenziale ϕ associato alla distribuzione sia regolare, le equazioni (3.69), (3.70) e (3.77) mostrano che la densità ρ si comporta nell'origine come

$$\rho \sim \tilde{R}^{2\alpha}, \qquad \text{per} \quad \tilde{R} \longrightarrow 0, \tag{6.2}$$

quindi, dato che $\alpha > 0$, ρ si annulla sull'asse z. A causa della risoluzione usata per la griglia, però, le soluzioni con $\alpha \leq 0.25$ non mostrano profili di densità nulli nell'origine.

Dall'analisi delle soluzioni ottenute all'aumentare di α in tutti casi si è riscontrato un aumento della distanza d_p tra i due massimi caratteristici dei profili di densità e indicando con una tilde le coordinate (cilindriche) normalizzate a R_a è stato possibile delineare tre tipi di comportamenti:

1. - il raggio di troncamento $\tilde{R}_{max}$ diminuisce;
   - le altezze dei profili di densità intrinseca per $\tilde{z} = 0$ aumentano ;
   - le altezze dei profili di densità intermedi per $\tilde{z} = \tilde{R}_{max}/2, \tilde{R}_{max}/4$ diminuiscono.
2. - il raggio di troncamento $\tilde{R}_{max}$ resta invariato;
   - le altezze dei profili di densità intrinseca per $\tilde{z} = 0$ aumentano leggermente;
   - le altezze dei profili di densità intrinseca per $\tilde{z} = \tilde{R}_{max}/2, \tilde{R}_{max}/4$ diminuiscono leggermente.
3. - il raggio di troncamento $\tilde{R}_{max}$ aumenta;
   - le altezze dei profili di densità intrinseca per $\tilde{z} = 0$ diminuiscono;

- le altezze dei profili di densità intrinseca per $\tilde{z} = \tilde{R}_{max}/2, \tilde{R}_{max}/4$ diminuiscono.

I tre comportamenti, che non sono separati nettamente e presentano zone di sovrapposizione e transizione, corrispondono a tre intervalli di valori di λ:

- per $0.5 \leq \beta \leq 1$ corrispondono rispettivamente ai casi $\lambda \ll 1$, $\lambda \simeq 1$ e $\lambda \gg 1$.
- per $\beta \gtrsim 2$ si spostano a valori di λ più piccoli per un fattore 10^{-2}. Notare però che con l'aumentare di β diminuiscono con continuità i valori massimi che λ raggiunge nelle soluzioni, nel caso specifico per $\beta = 2$ non si raggiunge $\lambda \simeq 100$.

Per valori alti dei parametri α e β o piccoli di λ le strutture presentano una decrescita dei profili di densità molto rapida salendo di quota, rispetto al piano equatoriale $\tilde{z} = 0$, il che indica che casi simili si prestano a descrivere tori molto schiacciati o addirittura anelli.

La presenza di un potenziale centrale a simmetria sferica, quale quello di un buco nero supermassivo, è compatibile con l'esistenza delle strutture toroidali troncate ma non determina un ampliamento dell'intervallo di esistenza delle soluzioni. Infatti, per quanto in presenza di forti potenziali esterni esistano modelli per α e β incompatibili con il caso auto-gravitante, questi corrispondono a valori di λ di molto inferiori a 10^{-4}: ad esempio, per un rapporto $\mu_{bh}/\mathcal{M} \simeq 10$, tra la massa normalizzata del buco nero e quella dell'intero sistema, e per $\alpha = 8$ e $\beta = 1$ si ottengono soluzioni con al più $\lambda \simeq 10^{-17}$. Sono stati quindi indagati casi per cui $\mu_{bh}/\mathcal{M}$ è compreso tra 0.1 e 1.

Tra i sistemi ottenuti quelli con valori bassi di α ($\alpha \lesssim 1$) o alti di β ($\beta \gtrsim 2$), pur presentando struttura toroidale, sono caratterizzati da profili di densità intrinseca che nell'origine non vanno a zero o addirittura hanno picchi. Questo tipo di andamento è prevedibile analiticamente. Nell'ipotesi che il potenziale ϕ associato alla distribuzione sia regolare, con la presenza di un buco nero le

equazioni (3.69), (3.70) e (3.77) fanno sì che la densità ρ, nell'origine, abbia andamento asintotico

$$\rho \sim \frac{\tilde{R}^{2\alpha}}{\left(\sqrt{\tilde{R}^2+\tilde{z}^2}\right)^{\alpha+\beta+3/2}}, \qquad \text{per} \quad \tilde{R} \longrightarrow 0\,. \tag{6.3}$$

e quindi vada a zero per $z \neq 0$ e diverga sul piano equatoriale nel caso $\alpha < \beta + 3/2$. Allo scopo di evitare questa divergenza nei risultati numerici, nel codice è stato usato come potenziale effettivo del buco nero

$$\phi_{ext} = \frac{\mu_{bh}}{\sqrt{\tilde{R}^2+\tilde{z}^2+\epsilon^2}}, \tag{6.4}$$

con ϵ è una costante arbitraria non nulla. Nei risultati quindi è visibile l'andamento dei profili in un intorno dell'origine.

I modelli con buco nero rispettano i tre regimi comportamentali al variare di λ, α e β, come descritto per i casi auto-gravitanti. Per $\frac{\mu_{bh}}{\mathcal{M}} \simeq 1$, essendo caratterizzato da valori bassi di λ, sono interessanti per descrivere strutture ad anello.

Tutti i modelli appartenenti alla famiglia con DF (3.1) e che non presentano rotazione (3.37) risultano analiticamente anisotropi, con parametro d'anisotropia

$$a(R) = 1 - \frac{2\sigma_\varphi^2}{\sigma_m^2} = \frac{\tilde{R}^2 - 2\alpha}{\tilde{R}^2+1},$$

indipendentemente dalla particolare forma della funzione h ed anche per un'eventuale scelta di $\alpha = 0$. In assenza di rotazione quindi i nostri modelli non si prestano a rappresentare tori di gas o polveri per i quali l'isotropia è una condizione necessaria a descrivere l'equilibrio termico.

Sono stati in fine esplorati anche alcuni casi di modelli con $\alpha = 0$. Questi, come previsto dalle richieste fatte nell'equazioni (3.19) e (3.20), non hanno struttura toroidale e risultano invece essere sferoidi che passano da un aspetto prolato ad uno oblato (rispetto al piano equatoriale) al crescere di λ.

6.2 Possibili sviluppi futuri

Il lavoro fin qui svolto può considerarsi l'inizio di indagine sulla famiglia di modelli presentata. Possibili sviluppi futuri sono:

- lo studio della stabilità dei modelli ottenuti tramite simulazioni a N-corpi;
- la generalizzazione al caso con rotazione, cioè con $\Omega_p \neq 0$, per indagare la possibilità di modelli isotropi con strutture toroidali;
- l'ampliamento e l'ottimizzazione del codice per un'analisi più accurata dei sistemi con $\lambda < 10^{-4}$, considerata la possibilità di descrivere anelli o tori schiacciati;
- proiezioni edge-on e face-on dei profili di densità, per effettuare confronti con i dati osservativi, come quelli dei peanut/box-shaped bulges;
- l'analisi di altre funzioni di distribuzione appartenenti alla stessa famiglia e diverse dalla politropica generalizzata.

Appendice A

Strumenti matematici

In questa appendice sono illustrati i principali strumenti e metodi matematici su cui è basata la procedura risolutiva per l'equazione (4.16): l'approssimazione numerica della parte radiale L_r (4.10) dell'operatore Laplaciano, il *Teorema di Newton per la convergenza di successione di funzioni* e i *polinomi di Legendre.*

A.1 Approssimare una derivata di ordine n-esimo

Sia ϕ una funzione della variabile x,

$$\phi \;=\; \phi(x)\;. \tag{A.1}$$

Siano noti gli $N+1$ punti equidistanti

$$x_i\;, \quad \text{per } i = 0, ..., N \tag{A.2}$$

$$x_{i+1} - x_i \;=\; \Delta x \;=\; \text{cost.}\;, \quad \forall i = 0, ..., N-1\;; \tag{A.3}$$

e quindi la funzione ϕ negli stessi,

$$\phi_i \;\equiv\; \phi(x_i) \quad \text{per } i = 0, ..., N \tag{A.4}$$

Nell'ipotesi che ϕ sia suffucientemente derivabile in x_i, descriviamo il procedimento per approssimarne la derivata n-esima con lo sviluppo in serie di Taylor.

In generale, perché l'approssimazione sia all'ordine m-esimo sono necessari $m+1$ valori di ϕ: in questo modo si ha un sistema di $m+1$ equazioni in $m+1$ incognite.

Approssimazione della derivata prima al secondo ordine

Approssimiamo la derivata prima di ϕ in x_i con una combinazione lineare di tre valori della funzione nell'intorno del punto,

$$\phi'_i = \frac{\alpha\,\phi_{i-1} + \beta\,\phi_i + \gamma\,\phi_{i+1}}{\Delta x} \tag{A.5}$$

dove α, β e γ sono i coefficenti da daterminare usando lo sviluppo in serie di Taylor.

$$\begin{aligned} \alpha\,\phi_{i-1} &= \alpha\left[\phi_i + \phi'_i\,(-\Delta x) + \frac{\phi''_i}{2!}\,(-\Delta x)^2 + O\left((\Delta x)^2\right)\right] = \\ &= \alpha\left[\phi_i - \phi'_i\,(\Delta x) + \frac{\phi''_i}{2}\,(\Delta x)^2 + O\left((\Delta x)^2\right)\right], \end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\beta\,\phi_i = \beta\,\phi_i\,, \tag{A.7}$$

$$\gamma\,\phi_{i+1} = \gamma\left[\phi_i + \phi'_i\,(\Delta x) + \frac{\phi''_i}{2}\,(\Delta x)^2 + O\left((\Delta x)^2\right)\right]. \tag{A.8}$$

Perché la combinazione lineare delle tre precedenti equazioni rispetti la (A.5), deve essere:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 1 \\ \frac{1}{2}\,\alpha + \frac{1}{2}\,\gamma = 0\,, \end{cases} \tag{A.9}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ \gamma = \frac{1}{2}\,. \end{cases} \tag{A.10}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\phi'_i = \frac{-\frac{1}{2}\phi_{i-1} + \frac{1}{2}\gamma\,\phi_{i+1}}{\Delta x} + O(\Delta x^2), \tag{A.11}$$

o, più semplicemente,

$$\phi'_i \simeq \frac{-\frac{1}{2}\phi_{i-1} + \frac{1}{2}\gamma\,\phi_{i+1}}{\Delta x} \tag{A.12}$$

che vale con un approssimazione al second'ordine.

Riportiamo una variante del metodo appena visto che è usata nel codice. Nel caso l'intervallo a disposizione sia $\frac{\Delta x}{2}$, oltre ai punti

$$x_i\,, \qquad \text{per } i = 0, ..., N$$

sono noti anche

$$x_{i+\frac{k}{2}} \equiv x_i + k\frac{\Delta x}{2}\,, \qquad \text{con} k \in Z \tag{A.13}$$

e analogamente per ϕ sono noti

$$\phi_{i+\frac{k}{2}} \equiv \phi\left(x_{i+\frac{k}{2}}\right). \tag{A.14}$$

Scriviamo la derivata come

$$\phi'_i = \frac{\alpha\,\phi_{i-\frac{1}{2}} + \beta\,\phi_i + \gamma\,\phi_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \tag{A.15}$$

Applicando Taylor otteniamo:

$$\begin{aligned}\alpha\,\phi_{i-\frac{1}{2}} &= \alpha\left[\phi_i + \phi'_i\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{\phi''_i}{2!}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + O\left((\Delta x)^2\right)\right] = \\ &= \alpha\left[\phi_i - \frac{1}{2}\,\phi'_i\,(\Delta x) + \frac{1}{8}\,\phi''_i\,(\Delta x)^2 + O\left((\Delta x)^2\right)\right],\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\beta\,\phi_i = \beta\,\phi_i\,, \tag{A.17}$$

$$\gamma\,\phi_{i+\frac{1}{2}} = \gamma\left[\phi_i + \frac{1}{2}\,\phi'_i\,(\Delta x) + \frac{1}{8}\,\phi''_i\,(\Delta x)^2 + O\left((\Delta x)^2\right)\right]. \tag{A.18}$$

Il sistema da risolvere é

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma = 1 \\ \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{8}\gamma = 0\,, \end{cases} \tag{A.19}$$

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1\,. \end{cases} \tag{A.20}$$

Al second'ordine, possiamo scrivere

$$\phi_i' \simeq \frac{-\phi_{i-\frac{1}{2}} + \phi_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x}\,. \tag{A.21}$$

Approssimazione della derivata prima al quarto ordine

Per approssimare una derivata al quart'ordine c'è bisogno di un numero maggiore di punti rispetto ai casi appena visti, altrimenti ci trovremmo a risolvere un sistema sovradeterminato o impossibile.

Centrando in ϕ_i, scriviamo

$$\phi_i' = \frac{\alpha\,\phi_{i-2} + \beta\,\phi_{i-1} + \gamma\,\phi_i + \delta\,\phi_{i+1} + \epsilon\,\phi_{i+2}}{\Delta x}\,, \tag{A.22}$$

e con Taylor:

$$\alpha\,\phi_{i-2} = \alpha\left[\phi_i + \phi_i^{(1)}\,(-2\Delta x) + \frac{\phi_i^{(2)}}{2!}\,(-2\Delta x)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\phi_i^{(3)}}{3!}\,(-2\Delta x)^3 + \frac{\phi_i^{(4)}}{4!}\,(-2\Delta x)^4 + O\left((\Delta x)^4\right)\right] =$$

$$= \alpha\left[\phi_i - 2\,\phi_i^{(1)}\,(\Delta x) + 2\,\phi_i^{(2)}\,(\Delta x)^2 + \right.$$
$$\left. - \frac{4}{3}\,\phi_i^{(3)}\,(\Delta x)^3 + \frac{2}{3}\,\phi_i^{(4)}\,(\Delta x)^4 + O\left((\Delta x)^4\right)\right]\,, \tag{A.23}$$

$$\beta\,\phi_{i-1} = \beta\left[\phi_i - \phi_i^{(1)}\,(\Delta x) + \frac{\phi_i^{(2)}}{2}\,(\Delta x)^2 + \right.$$
$$\left. - \frac{\phi_i^{(3)}}{6}\,(\Delta x)^3 + \frac{\phi_i^{(4)}}{24}\,(\Delta x)^4 + O\left((\Delta x)^4\right)\right], \quad \text{(A.24)}$$

$$\gamma\,\phi_i = \gamma\,\phi_i\,, \quad \text{(A.25)}$$

$$\delta\,\phi_{i+1} = \delta\left[\phi_i + \phi_i^{(1)}\,(\Delta x) + \frac{\phi_i^{(2)}}{2}\,(\Delta x)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\phi_i^{(3)}}{6}\,(\Delta x)^3 + \frac{\phi_i^{(4)}}{24}\,(\Delta x)^4 + O\left((\Delta x)^4\right)\right], \quad \text{(A.26)}$$

$$\epsilon\,\phi_{i-2} = \epsilon\left[\phi_i + 2\,\phi_i^{(1)}\,(\Delta x) + 2\,\phi_i^{(2)}\,(\Delta x)^2 + \right.$$
$$\left. - \frac{4}{3}\,\phi_i^{(3)}\,(\Delta x)^3 + \frac{2}{3}\,\phi_i^{(4)}\,(\Delta x)^4 + O\left((\Delta x)^4\right)\right]. \quad \text{(A.27)}$$

Mettendo a sistema,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -2\,\alpha - \beta + \delta + 2\,\epsilon = 1 \\ 2\,\alpha + \frac{1}{2}\,\beta + \frac{1}{2}\,\delta + 2\,\epsilon = 0 \\ -\frac{4}{3}\,\alpha - \frac{1}{6}\,\beta + \frac{1}{6}\delta + \frac{4}{3}\epsilon = 0 \\ \frac{2}{3}\,\alpha + \frac{1}{24}\beta + \frac{1}{24}\,\delta + \frac{2}{3}\,\epsilon = 0\,, \end{cases} \quad \text{(A.28)}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -2\,\alpha - \beta + \delta + 2\,\epsilon = 1 \\ 4\,\alpha + \beta + \delta + 4\,\epsilon = 0 \\ -8\alpha - \beta + \delta + 8\epsilon = 0 \\ 16\alpha + \beta + \delta + 16\epsilon = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -2\,\alpha - \beta + \delta + 2\,\epsilon = 1 \\ 4\,\alpha + \beta + \delta + 4\,\epsilon = 0 \\ -3\beta + 3\delta = 4 \\ 3\beta + 3\delta = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -2\,\alpha + \frac{4}{3} + 2\,\epsilon = 1 \\ \alpha = -\epsilon \\ \delta = \frac{2}{3} \\ \beta = -\frac{2}{3}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{12} \\ \beta = -\frac{2}{3} \\ \gamma = 0 \\ \delta = \frac{2}{3} \\ \epsilon = -\frac{1}{12} \, . \end{cases} \tag{A.29}$$

Quindi

$$\phi_i' \simeq \frac{\frac{1}{12}\,\phi_{i-2} - \frac{2}{3}\,\phi_{i-1} + \frac{2}{3}\,\phi_{i+1} - \frac{1}{12}\,\phi_{i+2}}{\Delta x} \, , \tag{A.30}$$

con un'approssimazione al quart'ordine.

Approssimazione della derivata seconda al quarto ordine

Modificando i tetmini noti nel sistema (A.28) è possibile ottenre derivate diverse dalla prima, con la stessa approssimazione del caso precedente.

Per la derivata seconda scriviamo

$$\phi_i'' = \frac{\alpha\,\phi_{i-2} + \beta\,\phi_{i-1} + \gamma\,\phi_i + \delta\,\phi_{i+1} + \epsilon\,\phi_{i+2}}{(\Delta x)^2} \tag{A.31}$$

e calcoliamo i coefficienti necessari tramite il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -2\,\alpha - \beta + \delta + 2\,\epsilon = 0 \\ 2\,\alpha + \frac{1}{2}\,\beta + \frac{1}{2}\,\delta + 2\,\epsilon = 1 \\ -\frac{4}{3}\,\alpha - \frac{1}{6}\,\beta + \frac{1}{6}\delta + \frac{4}{3}\epsilon = 0 \\ \frac{2}{3}\,\alpha + \frac{1}{24}\beta + \frac{1}{24}\,\delta + \frac{2}{3}\,\epsilon = 0 \, , \end{cases} \tag{A.32}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -2\,\alpha - \beta + \delta + 2\,\epsilon = 0 \\ 4\,\alpha + \beta + \delta + 4\,\epsilon = 2 \\ -8\alpha - \beta + \delta + 8\epsilon = 0 \\ 16\alpha + \beta + \delta + 16\epsilon = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \delta + \gamma + \delta + \epsilon = 0 \\ -2\,\alpha - \delta + \delta + 2\,\epsilon = 0 \\ 4\,\alpha + \delta + \delta + 4\,\epsilon = 2 \\ \beta = \delta \\ 3\delta + 3\delta = 8\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma + 2\delta + 2\epsilon = 0 \\ \alpha = \epsilon \\ 8\epsilon + \frac{8}{3} = 2 \\ \beta = \frac{4}{3} \\ \delta = \frac{4}{3}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{12} \\ \beta = \frac{4}{3} \\ \gamma = -\frac{5}{2} \\ \delta = \frac{4}{3} \\ \epsilon = -\frac{1}{12} \, . \end{cases} \tag{A.33}$$

Sostituendo si ha

$$\phi_i'' \simeq \frac{-\frac{1}{12}\,\phi_{i-2} + \frac{4}{3}\,\phi_{i-1} - \frac{5}{2}\,\phi_i + \frac{4}{3}\,\phi_{i+1} - \frac{1}{12}\,\phi_{i+2}}{(\Delta x)^2} \, . \tag{A.34}$$

A.2 L'approssimazione dell'operatore L_r

Approssimiamo la parte radiale dell'operatore Laplaciano espresso in coordinate sferiche,

$$\mathbf{L}_r = \frac{1}{r^2}\,\partial_r\, r^2\, \partial_r \, . \tag{A.35}$$

Trascurato il fattore $\frac{1}{r^2}$,

$$\mathbf{L}_r = \partial_r\, r^2\, \partial_r \, , \tag{A.36}$$

ed effettuata la sostituzione

$$r(x) = \tan x \, , \quad \text{con } x \in [0, \pi/2] \, , \tag{A.37}$$

$$dr = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx \tag{A.38}$$

l'operatore diventa

$$\mathbf{L}_r \longmapsto \mathbf{L}_x = \cos^2 x\, \partial_x\, \sin^2 x\, \partial_x. \tag{A.39}$$

$\mathbf{L}_x$ agisce su una funzione ϕ della variabile r (nello specifico un coefficiente di Legendre),

$$\phi = \phi\big(r(x)\big) = \phi(x) \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_x\phi &= \cos^2 x\ \partial_x\left(\sin^2 x\ \partial_x\phi\right) = \\ &= \cos^2 x\ \left(2\ \sin x\ \cos x\ \partial_x\phi\ + \sin^2 x\ \partial_x^2\phi\right)\ . \end{aligned} \tag{A.41}$$

Illustriamo i due modi che nel progrmma è possibile scegliere in per tradurre numericamente l'equazione (A.41). I due differiscono per ordine di approssimazione delle derivate, rispettivamente al secondo e al quarto ordine.

L'approssimazione con tre punti

Siano valide le (A.2), (A.3), (A.13), (A.14), allora possiamo scrivere

$$\left[\partial_x\phi(x)\right]_{x=x_i} \simeq \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \tag{A.42}$$

con una approssimazione al secondo ordine. Ricaviamo l'operatore $\mathbf{L}_x$ applicato a ϕ,

$$\mathbf{L}_x\phi_i = \left[\mathbf{L}_x\phi(x)\right]_{x=x_i} = \cos^2 x_i \left[\partial_x\left(\sin^2 x\ \partial_x\phi(x)\right)\right]_{x=x_i} =$$

$$= \frac{\cos^2 x_i}{\Delta x}\ \left[\ \sin^2 x_{i+\frac{1}{2}}\ \left[\partial_x\phi(x)\right]_{x=x_{i+\frac{1}{2}}}\ -\ \sin^2 x_{i-\frac{1}{2}}\ \left[\partial_x\phi(x)\right]_{x=x_{i-\frac{1}{2}}}\ \right] =$$

$$= \frac{\cos^2 x_i}{(\Delta x)^2}\ \left[\sin^2 x_{i+\frac{1}{2}}\ (\phi_{i+1} - \phi_i) - \sin^2 x_{i-\frac{1}{2}}\ (\phi_i - \phi_{i-1})\right] =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos^2 x_i}{(\Delta x)^2}\ \left[\left(\sin^2 x_{i+\frac{1}{2}}\right)\ \phi_{i+1}\ -\left(\sin^2 x_{i+\frac{1}{2}}\ +\ \sin^2 x_{i-\frac{1}{2}}\right)\ \phi_i\ \right] + \\ &+ \frac{\cos^2 x_i}{(\Delta x)^2}\ \left[\left(\sin^2 x_{i-\frac{1}{2}}\right)\ \phi_{i-1}\ \right]. \end{aligned} \tag{A.43}$$

L'i-esima riga di $\mathbf{L}_x$ è così fatta:

$$\left[\ 0,\ \ldots\ 0,\ \left[\mathbf{L}_x\right]_{i,i-1},\ \left[\mathbf{L}_x\right]_{i,i},\ \left[\mathbf{L}_x\right]_{i,i+1},\ 0,\ \ldots\ 0\ \right], \tag{A.44}$$

con

$$[\mathbf{L}_x]_{i,i-1} = \frac{\cos^2 x_i}{(\Delta x)^2}\left(\sin^2 x_{i-\frac{1}{2}}\right), \tag{A.45}$$

$$[\mathbf{L}_x]_{i,i} = -\frac{\cos^2 x_i}{(\Delta x)^2}\left(\sin^2 x_{i+\frac{1}{2}} + \sin^2 x_{i-\frac{1}{2}}\right), \tag{A.46}$$

$$[\mathbf{L}_x]_{i,i+1} = \frac{\cos^2 x_i}{(\Delta x)^2}\left(\sin^2 x_{i+\frac{1}{2}}\right). \tag{A.47}$$

Il valore di $\mathbf{L}_x\phi$ nell'$i-$esimo punto è quindi dato da prodotto di una matrice tridiagonale per il vettore che contiene i valori ϕ_i.

L'approssimazione con cinque punti

Siano valide le (A.2), (A.3), (A.4). Usiamo l'operatore espresso come

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_x\phi_i &= [\mathbf{L}_x\phi(x)]_{x=x_i} = \\
&= \left[\cos^2 x\ \left(2\ \sin x\ \cos x\ \partial_x\phi(x) + \sin^2 x\ \partial_x^2\phi(x)\right)\right]_{x=x_i} = \\
&= \cos^2 x_i\ \left(2\ \sin x_i\ \cos x_i\ [\partial_x\phi(x)]_{x=x_i} + \sin^2 x_i\ [\partial_x^2\phi(x)]_{x=x_i}\right) = \\
&= \cos^2 x_i\ \left(2\ \sin x_i\ \cos x_i\ \partial_x\phi_i + \sin^2 x_i\ \partial_x^2\phi_i\right).
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Approssimiamo, al quarto ordine, le derivate che compaiono nell'espressione precedente secondo la (A.30) e la (A.34),

$$[\partial_x\phi(x)]_{x=x_i} \simeq \frac{\frac{1}{12}\phi_{i-2} - \frac{2}{3}\phi_{i-1} + \frac{2}{3}\phi_{i+1} - \frac{1}{12}\phi_{i+2}}{\Delta x}, \tag{A.49}$$

$$[\partial_x^2\phi(x)]_{x=x_i} \simeq \frac{-\frac{1}{12}\phi_{i-2} + \frac{4}{3}\phi_{i-1} - \frac{5}{2}\phi_i + \frac{4}{3}\phi_{i+1} - \frac{1}{12}\phi_{i+2}}{(\Delta x)^2}. \tag{A.50}$$

Sostituiamo nell'espressione (A.48) per $\mathbf{L}_x\phi_i$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_x\phi_i \;=\; & \cos^2 x_i \cdot \\
& \cdot \Bigg[2 \sin x_i \cos x_i \cdot \\
& \cdot \left(\frac{\frac{1}{12}\,\phi_{i-2} - \frac{2}{3}\,\phi_{i-1} + \frac{2}{3}\,\phi_{i+1} - \frac{1}{12}\,\phi_{i+2}}{\Delta x} \right) + \\
& + \sin^2 x_i \cdot \\
& \cdot \left(\frac{-\frac{1}{12}\,\phi_{i-2} + \frac{4}{3}\,\phi_{i-1} - \frac{5}{2}\,\phi_i + \frac{4}{3}\,\phi_{i+1} - \frac{1}{12}\,\phi_{i+2}}{(\Delta x)^2} \right) \Bigg] = \\
= \; & \cos^2 x_i \cdot \\
& \cdot \Bigg[2\,\frac{\sin x_i \cos x_i}{\Delta x} \cdot \\
& \cdot \left(\frac{1}{12}\,\phi_{i-2} - \frac{2}{3}\,\phi_{i-1} + \frac{2}{3}\,\phi_{i+1} - \frac{1}{12}\,\phi_{i+2} \right) + \\
& + \frac{\sin^2 x_i}{(\Delta x)^2} \cdot \\
& \cdot \left(-\frac{1}{12}\,\phi_{i-2} + \frac{4}{3}\,\phi_{i-1} - \frac{5}{2}\,\phi_i + \frac{4}{3}\,\phi_{i+1} - \frac{1}{12}\,\phi_{i+2} \right) \Bigg] = \\
= \; & \cos^2 x_i \Bigg[\frac{1}{12} \left(2\,\frac{\sin x_i \cos x_i}{\Delta x} - \frac{\sin^2 x_i}{(\Delta x)^2} \right) \phi_{i-2} + \\
& + \frac{4}{3} \left(-\frac{\sin x_i \cos x_i}{\Delta x} + \frac{\sin^2 x_i}{(\Delta x)^2} \right) \phi_{i-1} + \\
& - \frac{5}{2} \left(\frac{\sin^2 x_i}{(\Delta x)^2} \right) \phi_i + \\
& + \frac{4}{3} \left(\frac{\sin x_i \cos x_i}{\Delta x} + \frac{\sin^2 x_i}{(\Delta x)^2} \right) \phi_{i+1} + \\
& - \frac{1}{12} \left(2\,\frac{\sin x_i \cos x_i}{\Delta x} + \frac{\sin^2 x_i}{(\Delta x)^2} \right) \phi_{i+2} \Bigg].
\end{aligned} \tag{A.51}$$

$\mathbf{L}_x$ è rappresentato da una matrice pentadiagonale la cui i-esima riga è:

$$\left[\ 0,\ \ldots\ 0,\ [\mathbf{L}_x]_{i,i-2},\ [\mathbf{L}_x]_{i,i-1},\ [\mathbf{L}_x]_{i,i},\ [\mathbf{L}_x]_{i,i+1},\ [\mathbf{L}_x]_{i,i+2},\ 0,\ \ldots\ 0\ \right], \tag{A.52}$$

con

$$[\mathbf{L}_x]_{i,i-2} = (\cos^2 x_i\ \sin x_i\ )\ \frac{1}{12}\left(2\ \frac{\cos x_i}{\Delta x}\ -\ \frac{\sin x_i}{(\Delta x)^2}\right), \tag{A.53}$$

$$[\mathbf{L}_x]_{i,i-1} = (\cos^2 x_i\ \sin x_i\ )\ \frac{4}{3}\left(-\ \frac{\cos x_i}{\Delta x}\ +\ \frac{\sin x_i}{(\Delta x)^2}\right), \tag{A.54}$$

$$[\mathbf{L}_x]_{i,i} = -(\cos^2 x_i\ \sin x_i\ )\ \frac{5}{2}\left(\frac{\sin x_i}{(\Delta x)^2}\right), \tag{A.55}$$

$$[\mathbf{L}_x]_{i,i+1} = (\cos^2 x_i\ \sin x_i\ )\ \frac{4}{3}\left(\frac{\cos x_i}{\Delta x}+\ \frac{\sin x_i}{(\Delta x)^2}\right), \tag{A.56}$$

$$[\mathbf{L}_x]_{i,i+2} = -(\cos^2 x_i\ \sin x_i\ )\ \frac{1}{12}\left(2\ \frac{\cos x_i}{\Delta x}-\ \frac{\sin x_i}{(\Delta x)^2}\right). \tag{A.57}$$

$$\tag{A.58}$$

$\mathbf{L}_x$ è una matrice pentadiagolnale.

A.3 Il metodo della successione di Newton

Per risolvere numericamente l'equazione (4.16) adottiamo una procedura iterativa basata su una successione di funzioni, definite per ricorrenza, che ha come limite lo zero di F: questa procedura è il *metodo della successione di Newton.* Ovviamente, avendo una successione infiniti termini noi ci fermeremo prima del suo limite, cioè ad una funzione ad esso sufficientemente vicina o tale da rendere sufficientemente piccolo il valore assoluto di F (comunque questo sia definito). Senza darne dimostrazione [4], riportiamo di seguito il

Teorema A.1. *(Teorema di Newton per la convergenza di successioni di funzioni)*

Ipotesi:

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

Sia C_0 un insieme convesso con chiusura $\overline{C}_0 \subseteq C$.

Per $x_0 \in C_0$, siano ϱ, a, b, c, η costanti positive con le seguenti proprietà:

$$S_\varrho(x_0) := \{x \mid \| x - x_0 \| < \varrho\} \subseteq C_0 ,$$

$$\eta := \frac{a\, b\, c}{2} < 1 ,$$

$$\varrho := \frac{a}{1-\eta} .$$

Sia $f : C \to \mathbb{R}^n$ *una funzione continua su* C *e differenziabile su* C_0, *con le seguenti proprietà:*

(a) $\forall x, y \in C_0 , \| Df(x) - Df(y) \| \leq c \| x - y \|$

(b) $\forall x \in C_0, \exists Df(x)^{-1}$ *t.c.* $\| Df(x)^{-1} \| \leq b$,

(c) $\| Df(x_0)^{-1} f(x_0) \| \leq a$.

Tesi:

(1) *A partire da* x_0 *ogni punto*

$$x_{k+1} := x_k - Df(x_k)^{-1} f(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

è ben definito e soddisfa $x_k \in S_\varrho(x_0), \forall k \geq 0$.

(2) $\exists\, \overline{x} \in \overline{S_\varrho(x_0)}$ *t.c.* $lim_{k\to\infty} x_k = \overline{x}$, $f(\overline{x}) = 0$,

(3) $\forall\, k \geq 0$

$$\| x_k - \overline{x} \| \leq a \frac{\eta^{2^k - 1}}{1 - \eta^{2^k}} .$$

Poiché $\eta \in (0, 1)$, *il metodo di Newton è almeno quadraticamente covergente.*

A differenza del teorema, che riguarda una funzione, noi abbiamo a che fare con il funzionale (4.14) che è funzione di funzione. Per le richieste fatte dalle ipotesi, però, un elemento di $\mathbb{R}^n$ può essere generalizzato ad elemento di uno

spazio vettoriale V normato e completo. Cosiderando come spazio vettoriale L^2, il teorma di Newton estende la sua validità anche a casi come il nostro.

Data una funzione di partenza ϕ_0, possiamo allora definire per ricorrenza la successione $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\phi_{n+1} := \phi_n - \left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n^{-1} F(\phi_n) , \tag{A.59}$$

che avrà come limite $\overline{\phi}$ tale che

$$\phi_n \longrightarrow \overline{\phi} , \quad \text{per } n \to +\infty , \tag{A.60}$$

$$F\left(\overline{\phi}\right) = 0 . \tag{A.61}$$

Nell'equazione (A.59), la quantità $\left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n$ indica la derivata parziale di F rispetto a ϕ e calcolata per $\phi = \phi_n$. Con

$$\delta\phi_n = \phi_{n+1} - \phi_n , \tag{A.62}$$

$$F_n = F(\phi_n) , \tag{A.63}$$

$$\delta F_n = \left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n \delta\phi_n , \tag{A.64}$$

la (A.59) si riscrive in forma più compatta:

$$-F_n = \delta F_n = \left(\frac{\delta F}{\delta \phi}\right)_n \delta\phi_n . \tag{A.65}$$

Se il funzionale F rispetta le ipotesi del Terorma A.1 e la funzione di partenza ϕ_0 è sufficientemente vicina alla soluzione, il metodo di Newton, implementato nell'algoritmo che è descritto in Appence B, conduce a buon fine.

A.4 I polinomi di Legendre

Nello sviluppo dell'algoritmo è di notevole vantaggio esprimere $\delta\phi$ – equazione (4.38) – ed altre funzioni come combinazone lineare di autofunzioni di L_θ. Le autofunzioni sono i *polinomi di Legendre*, una base ortonormale rispetto al prodotto interno di L^2, per funzioni definite sull'intervallo $[-1, 1]$. Accenniamo brevemente alla modalità di approssimazione di una funzione tramite i *polinomi di Legendre*.

Sia θ una variabile appartenente al più generico dominio $[-\infty, +\infty]$. Il polinomio $P_l(\cos\theta)$ si ricava come soluzione dell'equazione differenziale di Legendre:

$$\frac{d}{d\cos\theta}\left[(1-\cos^2\theta)\,\frac{d}{d\cos\theta}P_l(\cos\theta)\right] + l(l+1)\,P_l(\cos\theta) = 0\,. \quad \text{(A.66)}$$

con $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. P_l ha grado l-esimo e può essere espresso mediante la formula alla Rodrigues:

$$P_l(\cos\theta) = (2^l\ l!)^{-1}\frac{d^l}{d\cos^l\theta}\left[(\cos^2\theta - 1)^l\right]\,. \quad \text{(A.67)}$$

Essendo ortonormali su L^2, per i polinomi vale

$$\int_{-1}^{1} P_k(\cos\theta)\,P_l(\cos\theta)\,d(\cos\theta) = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{kl}\,. \quad \text{(A.68)}$$

Una costruzione alternativa dei polinomi di Legendre consiste nell'effettuare il procedimento di Gram - Schmidt per la ortogonalizzazione della successione polinomiale $\{1, \cos\theta, \cos^2\theta, \ldots\}$. Ogni funzione di L^2 può essere quindi espressa come combinazione lineare degli infiniti polinomi.

Senza perdita di generalità, scelgiamo come funzione esempio $\delta\phi$,

$$\delta\phi(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l\,P_l(\cos\theta)\,. \quad \text{(A.69)}$$

Nel caso la funzione dipenda da più variabili possiamo scrivere

$$\delta\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(r)\,P_l(\cos\theta)\,. \quad \text{(A.70)}$$

I coefficienti $c_l(r)$ dipenderanno allora dalle altre coordinate, in questo caso r, secondo la definizione,

$$c_l(r) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\delta\phi(r,\theta)\,P_l(\cos\theta)\,d(\cos\theta), \quad \text{(A.71)}$$

dove il fattore che moltiplica l'integrle ha scopo di normalizzazione. Sulla base dei polinomi di Legendre quindi la nostra funzione esempio $\delta\phi$ si rappresenta come un array i cui elementi sono i coefficienti $c_l(r)$:

$$\delta\phi(r,\theta) \longmapsto \begin{pmatrix} c_1(r) \\ c_2(r) \\ \vdots \end{pmatrix}\,. \quad \text{(A.72)}$$

Per tradurre numericamente il problema scegliamo un numero l_{max} di termini di sviluppo a cui approssimare le funzioni. La garanzia che si tratti di una buona approssimazione è data dalla simmetria assiale dei nostri modelli.

$$\delta\phi(r,\theta) \simeq \sum_{l=0}^{l_{max}} c_l(r)\ P_l(\cos\theta)\ . \tag{A.73}$$

$$\delta\phi(r,\theta) \longmapsto \begin{pmatrix} c_1(r) \\ \vdots \\ c_{l_{max}}(r) \end{pmatrix}\ . \tag{A.74}$$

Sulla griglia diventa

$$\delta\phi_{jk} = \delta\phi(r_j,\theta_k) \simeq \sum_{l=0}^{l_{max}} c_l(r_j)\ P_l(\cos\theta_k)\ . \tag{A.75}$$

$$\delta\phi_{jk} = \delta\phi(r_j,\theta_k) \longmapsto \begin{pmatrix} c_1(r_j) \\ \vdots \\ c_{l_{max}}(r_j) \end{pmatrix}\ , \tag{A.76}$$

Le funzioni nello *spazio dei polinomi di Legendre* sono quindi rappresentate da array $N_r \times l_{max}$ dimensionali. Noto poi il valore dei polinomi in $\cos\theta_k$, possiamo tornare a quello delle funzioni sulla griglia tramite la (A.75)

Appendice B

Il codice

Quest'Appendice illustra la struttura e il funzionamento del codice usato per risolvere l'equazione di Poisson (4.10). Il codice, scritto in linguaggio Fortran90, è stato sviluppato da Pasquale Londrillo.

All'inizio dell'Appendice sono descritte le variabili usate e le principali procedure. In coda sono riportati i diagrammi di flusso delle parti del programma più significative.

B.1 Descrizione del codice

B.1.1 La procedura principale

`module settings`

modulo in cui sono dichiarte tutte le variabili e i parametri del codice: sono quindi a disposizione tanto della routine principale quanto di ogni altro modulo che usi `settings`.

Le principali dichiarazioni sono:

`pot0` :: parametro reale che contiene il valore del potenziale di taglio Q_0.

Trattando il problema in forma adimensioale il suo valore è settato come `pot0` = 1.0.

`ra` :: parametro reale che contiene il valore del raggio d'anisotropia R_a.

Trattando il problema in forma adimensioale il suo valore è settato come `ra` = 1.0.

`nr, nth` :: parametri interi che definiscono il numero di punti della grigla: `(nr+1)` · `(nth+1)`. Un aumento di questi valori produce un aumento della risoluzione nelle soluzioni, vice versa una riduzione.

Per le simulazioni è stato posto `nr` = 256 e `nth` = 64.

`r(0:nr,5)` :: array reale che contiene, nella prima colonna le `nr+1` coordinate radiali della grigla, nelle altre funzioni della variabile radiale.

`th(0:nth)` :: array reale che contiene le `nth+1` coordinate angloari della griglia.

`g(0:nr,0:nth,4)` :: array reale tridimensionale che contiene, per il terzo indice uguale ad 1, i valori del fattore geometrico g sul griglia; per altri valori del terzo indice, funzioni associate a g.

`lambda` :: variabile reale che contiene il valore del parametro λ del equazione adimensionale di Poisson. Per un dato `lambda` viene cercata una coppia potenziale-densità che risolva il problema. Se si raggiunge una soluzione, il valore di `lambda` viene variato di una quantità `dlam` e il processo di ricerca ricomincia, paretendo dall'ultimo potenziale buono trovato. In caso contrario vengono settate le variabili d'errore e l'esecuzione del programma termina.

`iout` :: variabile intera impiegata come contatore associato alla `iout`-esima soluzione del problema di Poisson, in corrispondenza dell'`iout`-esimo valore di lambda λ_{iout}. Inizialmente uguale a 0 aumento di un'unità ogni qual volta il metodo di Newton conduce a buon fine. Il numero di soluzioni massimo da cercare è indicato nel programma dalla condizione `iout` $\leq$ `nsol`, dove `nsol` è dato in input.

`epot(1:100,1:8)` :: array reale che per la `iout`-esima soluzione trovata registra nell'ordine:

`epot(iout,1)` = lambda,

`epot(iout,2)` = massa totale,

`epot(iout,3)` = potenziale centrale mediato sulla coordinata anglare,

`epot(iout,4)` = energia potenziale totale,

`epot(iout,5)` = potenziale totale ASIMMETRICO,

`epot(iout,6)` = raggio di taglio,

`epot(iout,7)` = dispersione di velocutà sul piano meridionale,

`epot(iout,8)` = dispersione di velocità associata alla coordinata ϕ.

`pot, den, pot1, den1, pot2 (0:nr,0:nth)` :: array reali usati per contenere i valori di funzioni varie (potenziale, densità, funzionale F_n,...) sulla griglia o nello spazio di Legendre. Indipendentemente dai nomi, che possono sembrare indicativi, sono ultilizzati nel programma indifferentemente a mo' di variabili fittizie.

`amat(0:nr,0:nth,5)` :: array reale che contiene l'approssimazione dell'operatore laplaciano $-\nabla^2$ nello spazio dei polinomi di Legendre. Sono possibili due modalità d'approssimazione, al secondo o al quarto ordine della coordinata radiale: per il parametro `isc` $= 1$ o `isc` $= 2$ si ha rispettivamente una matrice tri o penta diagonale, in coorrispondenza di un dato valore del secondo indice.

`iter` :: variabile intera impiegata come contatore che, in ogni ciclo di iterazione del metodo di Newton, indica la `iter`-esima coppia poternziale-densità, quindi l'`iter`-esimo elemento della successione. Il numero massimo di iterazioni possibili, prima di arrivare ad una soluzione, è indicato nel programma con la condizione `iter` $\leq$ `itermax`. Se in `itrermax` $+ 1$ passaggi il programma non raggiunge la convergenza desiderata, sono settate le variabili d'errore e il programma termina.

`id_run` :: variabile intera d'ambiente. Inizializzata ad 1 ad ogni nuovo ciclo di iterazioni, cioè ad ogni inizio di ricerca di una nuova soluzione; assume valore 0 se la soluzione è raggiunta.

`ier` :: variabile intera d'ambiente usata, in un ciclo di iterazioni, per indicare cosa non è andato a buon fine nella ricerca della soluzione. Settata a 0 all'inizio di ogni ciclo, assume valore

`ier` = 1, se viene superato il numero massimo di iterazioni consentite (`itermax`) senza la convergenza desiderata;

`ier` = 2, se sulla griglia non c'è nessun punto con potenziale maggiore del potenziale di taglio.

`ier` = 3, se uno dei coefficienti di Legendre associati al funzionale F_n ha sulla griglia un valore assoluto maggiore di 10000, ossia nel caso di termine sorgrnte troppo grande.

`ier` = 4, se il valore della massa totale, calcolato per una soluzione considerata buona, differisce poco dallo zero.

Qualora una routine attribuisca a `ier` un valore diverso da 0, il programma si arresta e produce un output sul terminale che illustra del tipo di problema incontrato.

`err_max` :: variabile reale che ad ogni ciclo iteratativo assume il più grande tra i valori assoluti dei coefficienti di Legendre di F_n; se il suo ammontare supera 10000, viene posto `ier` = 3 e il programma si arresta. Sia poi `eps` un parametro reale sufficientemente piccolo, settabile arbitrariamente, la condizione `err_max` < `eps` indica il raggiungimento della convergenza desiderata: il potenziale a cui corrisponda il dato `err_max` si scelto come soluzione buona.

`rms` :: variabile reale che indicherebbe lo scarto quadratico medio (in inglese *root mean square*) in ogni ciclo iterativo; in reltà ad ogni ciclo è posta uguale al più grande tra i valori assoluti dei coefficienti di Legendre di $\delta\phi_n$. Per `iter` $\geq$ `itermax` e detto `eps` un parametro

reale sufficientemente piccolo, settabile arbitrariamente, la condizione `rms` $<$ `eps` indica il raggiungimento della convergenza desiderata: il potenziale a cui corrisponda il dato `rms` si scelto come soluzione buona.

Gli altri parametri, introdotti come input esterno, sono descritte nella subroutine `start`.

`subroutine start`

subroutine che legge i parametri caratteristici del problema dal file `input.data` e setta, chiamando altre subroutine, gli array necessari all'inizio dell'esecuzione del programma.

I parametri introdotti come input sono nell'ordine:

`alpha` :: parametro reale che contiene il valore dell'esponente α della funzione di distribuzione.

`gamma` :: parametro reale che contiene il valore dell'esponente γ cui si eleva $(\phi - 1)$ nell'espressine per la densità $\tilde{\rho}$ adimensionata.

Da ricordare che definire la coppia α e γ equivale a definire la coppia α e β, dato che: $\gamma = (\alpha + \beta + 3/2)$, con β esponente della politropica.

`pot_bh` :: parametro reale associato ad potenziale gravitazionale Ψ_{bh} generato da un eventuale buco nero centrale. Se `pot_bh` $\neq 0.0$ al potenziale tradizionale, nel punto di griglia di coordinate (i, j), viene sommata la quantità $\Psi_{bh}(i,j) = \texttt{pot_bh}/\sqrt{r_i^2 + \texttt{epsbh}^2}$.

`pot_om` :: parametro reale che contiene il valore della velocità angolare Ω_p nel caso il sistema ruoti attorno all'asse di simmetria.

`lam0` :: parametro reale usato dalla routine `init` come massa di una sfera a densità costante e raggio `r0`.

`r0` :: parametro reale usato dalla routine `init` come raggio di una sfera di densità costante e massa `lam0`.

`eps` :: parametro reale di convergenza: se `err_max` o `rms` diventano più piccoli di `eps` il programma considera la soluzione trovata sufficientemente vicina allo zero, quindi buona, e il ciclo si arresta.

Nelle soluzioni è stato posto `eps` $= 0.5$.

`cfl` :: parametro reale di rallentamento della convergenza. Con valore minore di 1.0, è usato nella subroutine `psolv` in cui lo si moltiplica per il funzionale F_n ad ogni iterazione, rallentandone la convergenza.

Per le soluzioni ricavate è stato posto `cfl` $= 0.1$.

`epsbh` :: parametro reale che si somma al denominatore nell'espressione del potenziale di buco nero Ψ_{bh} per evitare singlolarità nell'origine: $\Psi_{bh}(i,j) = \texttt{pot_bh}/\sqrt{r_i^2 + \texttt{epsbh}^2}$.

Nel file di input si è posto `epsh` $= 0.01$.

`rsc` :: parametro reale che ha il ruolo di raggio scala. Entra nella definizione della coodinata radiale di griglia permettendo di campionare punti diversi dello spazio delle configurazioni: l'intervallo della della variabile angolare ϱ è suddiviso in punti equidistanti, ma dalla definizione $r_i = \texttt{rsc} \cdot \tan(\xi_i)$ lo stesso non è vero per il raggio e variando `rsc` variano le coordinate radiali dei punti sulla griglia.

Nel nostro caso `rsc` $= 1.0$.

`lmax` :: parametro intero che indica il termine di troncamento nella approssimazione di funzioni con i polinomi di Legendre. Data la simmetria dei sistemi modellati, è posto `lmax` $= 7$.

`isc` :: parametro naturale (acronimo di *index select case*) che può assumere solo due valori, `isc` $= 1, 2$. Consente di scegliere, tramite l'istuzione `select_case`, la modalità di approssimazione matriciale del laplaciano, risp al secondo o al quarto ordine in $d\varrho$.

Per le nostre soluzioni è stato mantenuto sempre `isc` $= 2$ dato che, per numero di soluzioni e accuratezza, il guadagno ottenuto con questo

settaggio non è rangiungibile in altro modo (ad esempio variando altri parametri come `lmax` o `itermax`).

`itermax` :: parametro intero, indica il numero massimo di iterazioni da compiere, all'intrno di un cilco, per raggiungere la converganza. Se posto uguale a 0, devia il corso del programma e fa eseguire la subroutine `test`.

Nel nostro caso si è posto `itermax` = 300.

`nsol` :: parametro intero che indica il numero di soluzioni cercate, quindi il numero di cilci iterativi da effettuare nel caso ciascuno vada a buon fine.

`new` :: parametro intero che se settato a 0 dice al programma di iniziare la ricerca di una nuova soluzione partendo da un potenziale di prova definito nella suroutine `init`. Altrimenti legge una soluzione già esistente tramite la suroutine `read_data` e continua la ricerca di altre soluzioni a partire da questa.

`indata` :: parametro intero usato dalla subroutine `read_data` per individuare il nome del file `torus+[indata]+.dat` in cui leggere il potenziale di partenza per l'inizionio dei cicli e la ricerca delle soluzioni.

`dlam` :: parametro reale che rappresenta la frazione di cui viene incrementata, o diminuita, `lambda` ad ogni nuovo ciclo: `lambda` = (1.0±+`dlam`)`lambda`.

Nel nostro caso si è posto `dlam` = 0.1.

`gain` :: parametro intero che indica se aumentare (quando è positivo) o diminuire (quando è negativo) il valore di `lambda` della frazione `dlam` all'inizio di ogni nuovo ciclo. La massa totale corrispondente diminuirà o aumenterà rispettivamente.

`subroutine set_leg`

subroutine che setta i polinomi di Legendre. La quantità definita come `alp(j,l)` è il valore del polinomio di grado `l` nei punti di griglia con coordinata

angolare θ_j, mentre `alp_inv(:,1)` è l'array usato per integrare le funzioni dello spazio delle configurazioni e ottere il corrispettivi coefficienti $c_l(r)$ nello spazio dei polinomi di Legendre.

`subroutine set_rad_mat`

subrouine che può essere divisa in due parti dal punto di vista delle operazioni svolte. Nella prima setta l'array `r(0:nr,1:5)`, che contiene i valori del raggio e di altre funzioni di questo, sui punti di griglia. La seconda parte invece scrive nell'array `amat(0:nr,0:nth,5)` l'approssimazione dell'operatore laplaciano $-\nabla^2$ nello spazio dei polinomi di Legendre. Sono possibili due modalità d'approssimazione, al secondo o al quarto ordine della coordinata radiale: per `isc` $= 1$ o `isc` $= 2$ si ha rispettivamente una matrice tri o penta diagonale, in coorrispondenza di un dato valore del secondo indice.

`subroutine set_geom`

subroutine che calcola il valore della shape function $g(r_i, \theta_j)$ nei punti di griglia e quello di altre funzioni correlate che vengono spesso richiamate nel codice.

`subroutine test`

subroutine che effettua un test di prova sulla bontà effettiva delle soluzioni fornite dal programma. In una prima parte, usando una procedura analoga a quella della routine `psolv`, per una distibuzione nota, calcola il potenziale a partire dalla densità e lo confronta con i risultati della letteratura. In una seconda parte fa lo stesso partendo dal potenziale per ricavare la densità. La subroutine è eseguita se il parametro di input `itermax` è settato a 0; precede qualunque altra operazione e una volta conclusa termina il programma.

`subroutine init`

subroutine che setta sulla griglia il potenziale di partenza per la prima iterazione del primo cilco da effetuare. È eseguita se `new` $= 0$. Il potenziale è quello di una sfera di massa `lam0` e raggio `r0`, quindi:

$$\texttt{pot(i,j)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\texttt{lam0}}{\texttt{r0}}\left[3-\left(\dfrac{r_i}{\texttt{r0}}\right)^2\right], & \text{se } r_i \leq \texttt{r0} \\ \\ \dfrac{\texttt{lam0}}{r_i}\,, & \text{se } r_i > \texttt{r0}\,. \end{cases} \tag{B.1}$$

`subroutine set_new_den`

subroutine che calcola, per il nostro modello, una nuova densità a portire da un dato potenziale.

$$\texttt{den(i,j)} = \begin{cases} g(r_i,\theta_j)\ (\texttt{pot(i,j)} - \texttt{pot0})^{\texttt{gamma}}\,, & \text{se } \texttt{pot(i,j)} > \texttt{pot0} \\ \\ 0\,, & \text{se } \texttt{pot(i,j)} \leq \texttt{pot0}\,. \end{cases} \tag{B.2}$$

`set_init_lam`

subroutine che stima il valore iniziale di `lambda` confrontando il potenziale e la densità di partenza integrati sull'intero volume dello spazio delle configurazioni,

$$\texttt{lambda} = \frac{\int \nabla^2\phi\ r^2\ dr\ d\theta}{\int g(r\sin\theta)\ (\phi-1)^\gamma\ \Theta(\phi-1)\, r^2\ dr\ d\theta}\,. \tag{B.3}$$

In verità il calcolo viene fatto nello spazio di Legendre con le funzioni integrande trasformate.

`subroutine pot_val`

subroutine che integra le le quantità della `iout`-esima soluzione e ne ricava massa totale, potenzile centrale mediato sulla coordinata angolare, potenziale totale, potenziale totale ASIMMETRICO , raggio di taglio, dispersione di velocutà sul piano meridionale, dispersione di velocità associata alla coordinata ϕ; quindi scrive queste quantità nel array `epot(iout,:)`.

`subroutine data`

subroutine che, per la `iout`-esima soluzione, scrive i parametri del sistema, le grandezze totali integrate, il potenziale sulla griglia (r_i, θ_j) e la densità proiettata sul piano R-z (in coordinate cilindriche), nel file `p+[iout]+[gain]+_a+[alpha]+g+[gamma].dat`. Nella nominazione del file al posto delle variabili di codice tra parentesi quadra ci sono i valori che queste assumono, fatta eccezione per la quantità `[gain]` che assume valore `up` o `dw` a seconda che il paramatro `gain` sia maggiore o minore di zero, quindi che le soluzioni siano cercate al crescere o al decrescere di `lambda`.

`subroutine pot_data`

subroutine che scrive in unico file tutte le soluzioni trovate dal programma in fase di runtime. In pratica, se viene accettata almeno una soluzione, per cui `iout` $\neq 0$, la subroutine scrive l'array `epot(:,:)`, che non è più nullo, nel file. Il file ha nome `val+[gain]+_a+[alpha]+g+[gamma]`, dove al posto delle variabili di codice tra parentesi quadra ci sono i valori che queste assumono, fatta eccezione per la quantità `[gain]` che assume valore `up` o `dw` a seconda che il paramatro `gain` sia maggiore o minore di zero, quindi che le soluzioni siano state cercate per valori crescenti o decrescenti di `lambda`.

B.1.2 La subroutine `psolv`

`subroutine lapl_mat_inv`

subroutine che computa, nello spazio di Legendre, l'inverso dello jacobiano del funzionale $-F_n$. La matrice associata allo jacobiano e non invertita è somma di una parte penta (o tri) diagonale e una parte con elementi sulla sola diagonale principale, quindi sarà una matrice penta (o tri) diagonale anche la loro somma e l'inversa di questa, cioè la matrice fornita dalla subroutine.

`subroutine lgd_trsf`

subroutine che, data una funzione sulla griglia, calcola la sua trasformata nello spazio dei polinomi di Legendre e vice versa. Nella sua struttira dichiarativa, `lgd_trsf(in,out,lmax,` ± 1`)` , `in` è l'array in ingresso, `out` è quello in uscita e `lmax` è il numero di polinomi usati nello spazio di Legendré per lo sviluppo delle funzioni; in fine -1 e $+1$ indicano se la trasformazione deve avvenire dalla griglia allo spazio di Legendre o al contrario. Nel primo dei due casi si passa dall'array `in(0:nr,0:nth)` sulla griglia ad uno `out(0:nr,0:lmax)` che contiene i valori dei coefficienti di Legendre. In generale `lmax` $<$ `nth` e, anche se l'array `out(:,:)` ha le stesse dimensioni di `in(:,:)`, i coefficienti di ordine superiore a `lmax` sono nulli: `out(:,lmax+1:nth)` $= 0.0$. Per l'ultima variabile uguale a $+1$ il processo è inverso, si parte da un array `in(0:nr,0:lmax)` nello spazio di Legendre per averne uno `out(0:nr,0:nth)` sulla griglia dello spazio delle configurazioni.

`subroutine laplace`

subroutine che calcola $-\nabla^2$, l'opposto del laplaciano, di una funzione nello spazio di Legendre. Nella

sua stuttura dichiarativa, `laplace(in,out,lmax,isc)` , `in` è l'array di cui si vuol calcolare il laplaciano, `out` in uscuta è l'opposto del laplaciano di `in` (`out` $= \nabla^2$`in`), `lmax` è il numero di polinomi di Legendre usati per lo sviluppo e `isc` (*index select case*) è l'indice di selezione dell'accuratezza nel calcolo delle derivate numeriche. `in` e `out` sono due array di dimensione `(0:nr,0:nth)` e per i quali, in generale `in(:,lmax+1:nth)` = `out(:,lmax+1:nth)` = 0.0 .

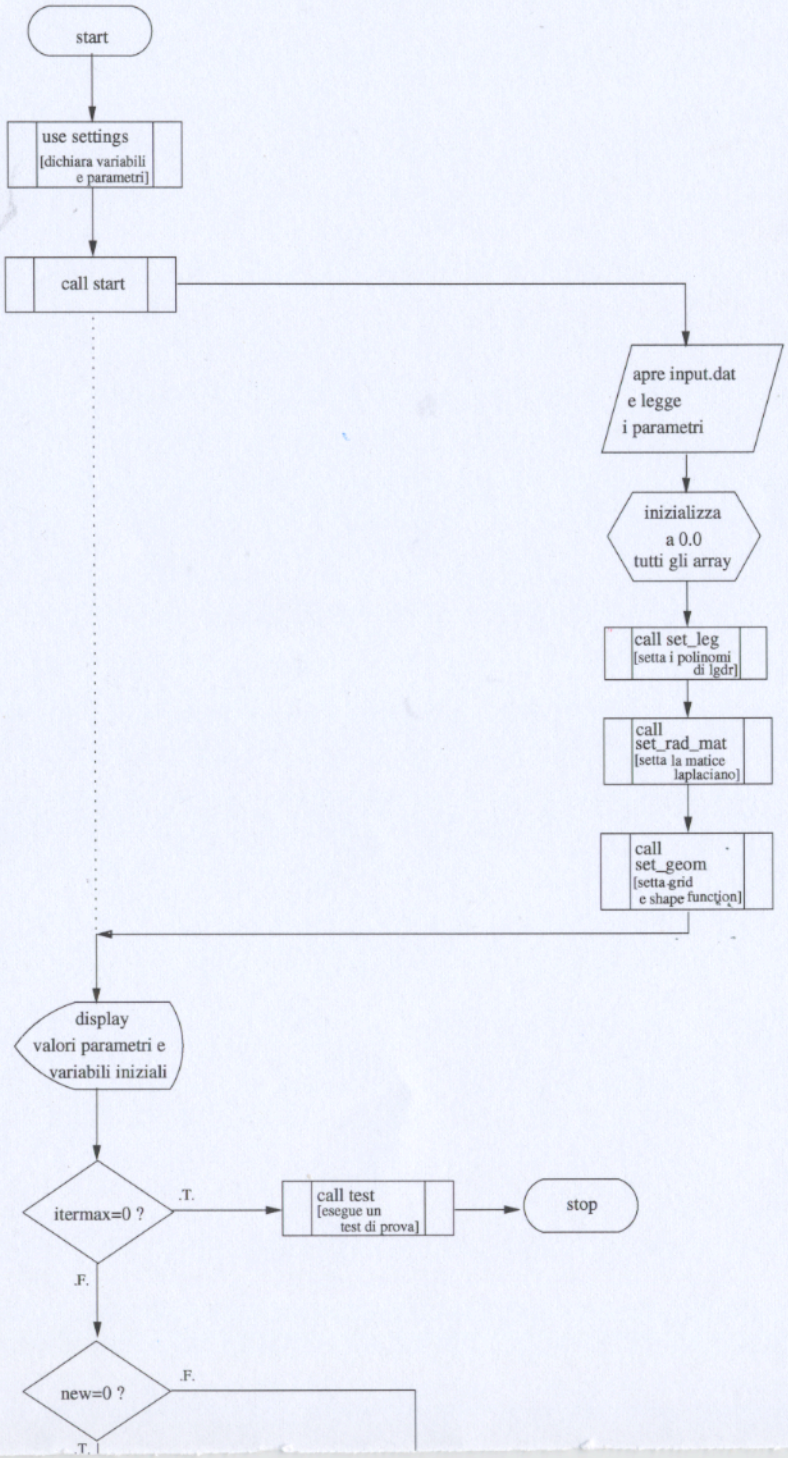
`subroutine lapl_inv`

subroutine che, nello spazio di Legendre, applica l'approssimazione matriciale dello dell'inverso delllo jacobiano di $-F_n$ (cioè $\left(-\frac{\partial F_n}{\partial \phi_n}\right)^{-1}$), al funzionale $-F_n$ stesso, ottenendo così in uscita l'elemento $(n+1)$-esimo della successione $(\delta\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\delta\phi_{n+1} = -\left(\frac{\partial F_n}{\partial \phi_n}\right)^{-1}(-F_n) \ . \tag{B.4}$$

B.2 I diagrammi di flusso

Nelle tavole che seguono sono riportati i diagrammi di flusso delle parti principali del codice; precisamente: la procedura principale (Figura B.1); il ciclo iterativo in essa contenuto (Figura B.2); la subroutine `psolv` (Figura B.3), che risolve l'equazione ricorsiva della successione di Newton calcolando il potenziale $(n+1)$-esimo a partire da quello n-esimo.


start
use settings
[dichiara variabili
e parametri]
call start
apre input.dat
e legge
i parametri
inizializza
a 0.0
tutti gli array
call set_leg
[setta i polinomi
di lgdr]
call
set_rad_mat
[setta la matice
laplaciano]
call
set_geom
[setta grid
e shape function]
display
valori parametri e
variabili iniziali
itermax=0 ?
.T.
call test
[esegue un
test di prova]
stop
.F.
new=0 ?
.F.
.T.

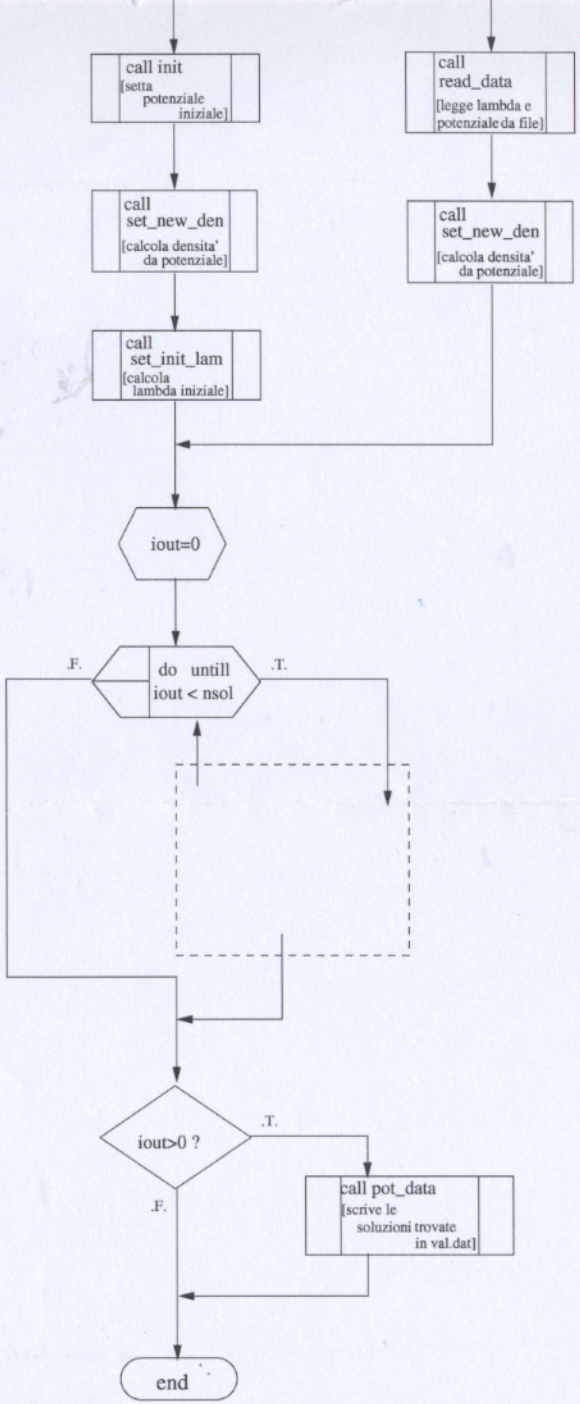
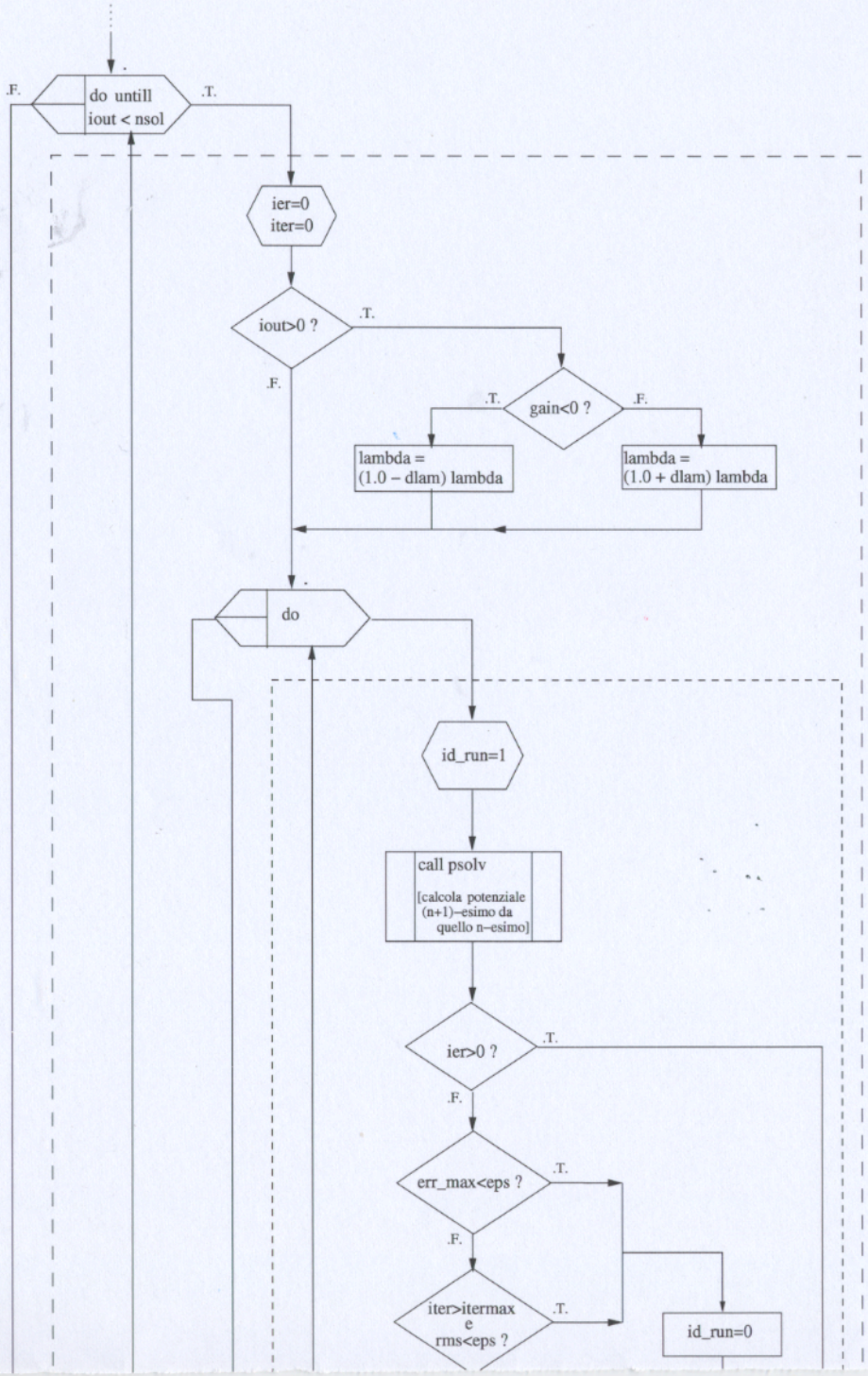


Figura B.1: Diagramma di flusso per la procedura principale del codice. La procedura nel box tratteggiato è riportata in Figura B.2.


do untill
iout < nsol
.F.
.T.
ier=0
iter=0
iout>0 ?
.T.
.F.
gain<0 ?
.T.
.F.
lambda =
(1.0 – dlam) lambda
lambda =
(1.0 + dlam) lambda
do
id_run=1
call psolv
[calcola potenziale
(n+1)–esimo da
quello n–esimo]
ier>0 ?
.T.
.F.
err_max<eps ?
.T.
.F.
iter>itermax
e
rms<eps ?
.T.
id_run=0

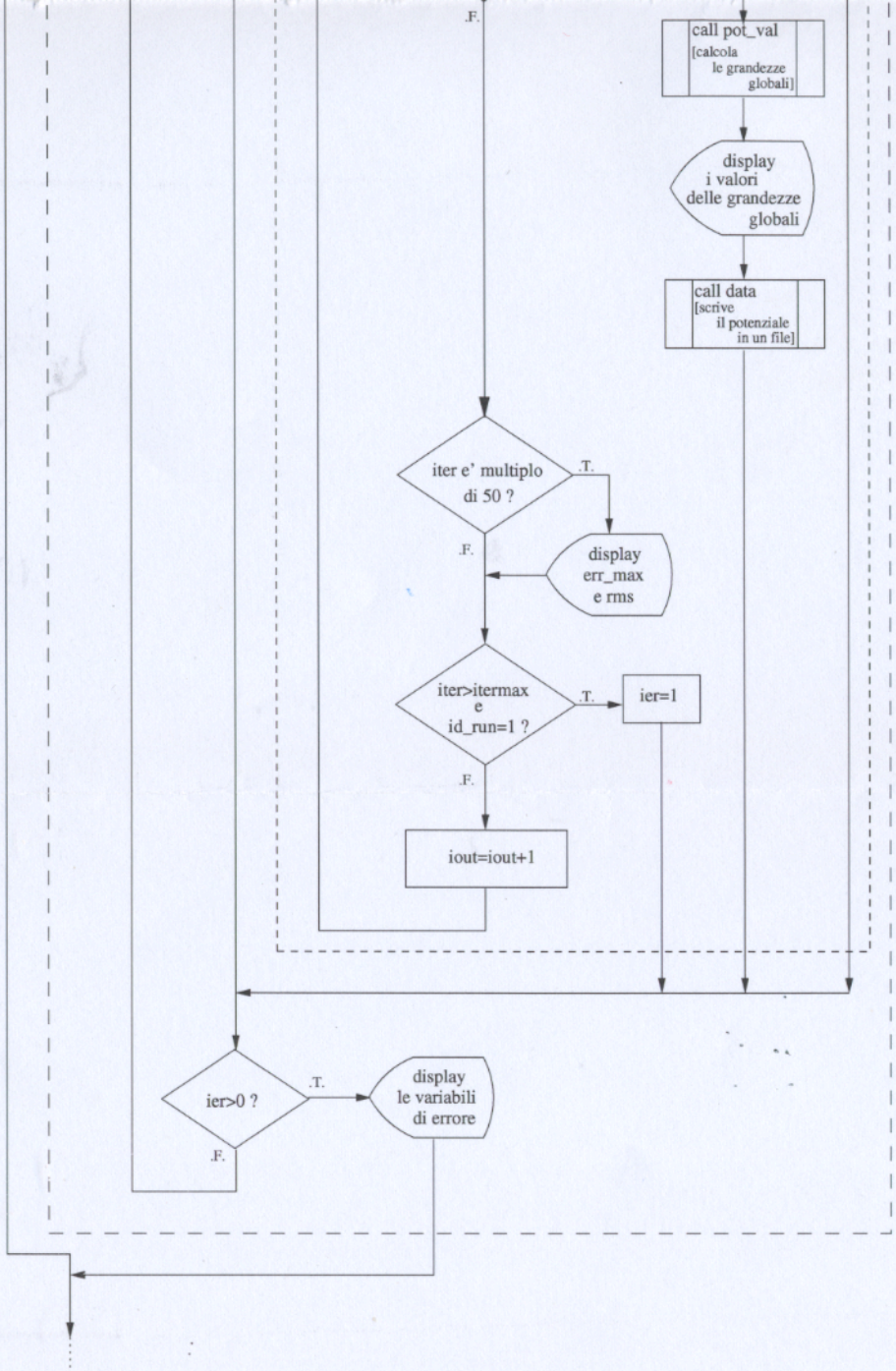
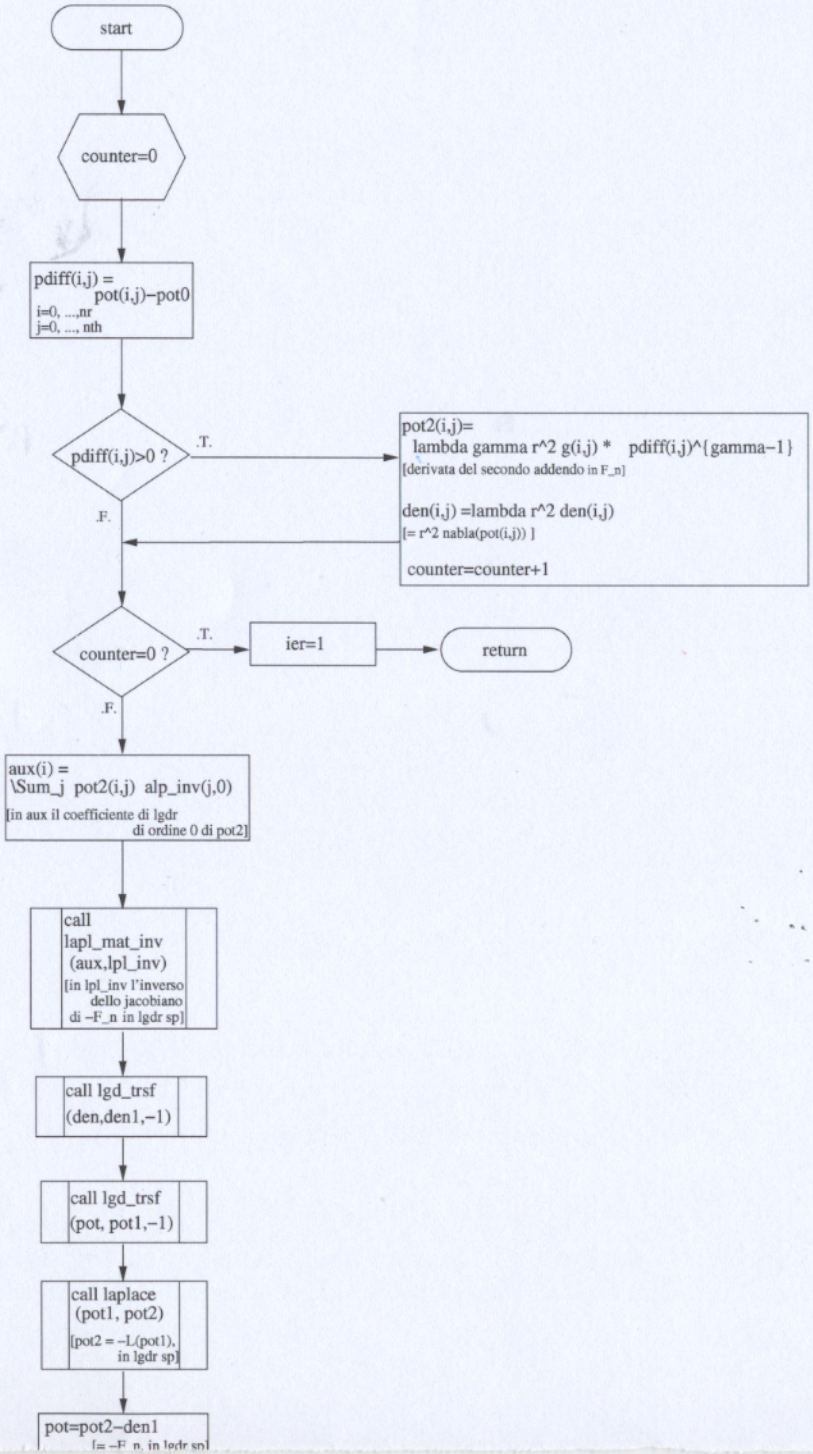


Figura B.2: Diagramma di flusso per il box tratteggiato di Figura B.1.


start
counter=0
pdiff(i,j) =
pot(i,j)−pot0
i=0, ...,nr
j=0, ..., nth
pdiff(i,j)>0 ?
.T.
.F.
pot2(i,j)=
lambda gamma r^2 g(i,j) * pdiff(i,j)^{gamma−1}
[derivata del secondo addendo in F_n]
den(i,j) =lambda r^2 den(i,j)
[= r^2 nabla(pot(i,j))]
counter=counter+1
counter=0 ?
.T.
ier=1
return
.F.
aux(i) =
\Sum_j pot2(i,j) alp_inv(j,0)
[in aux il coefficiente di lgdr
di ordine 0 di pot2]
call
lapl_mat_inv
(aux,lpl_inv)
[in lpl_inv l'inverso
dello jacobiano
di −F_n in lgdr sp]
call lgd_trsf
(den,den1,−1)
call lgd_trsf
(pot, pot1,−1)
call laplace
(pot1, pot2)
[pot2 = −L(pot1),
in lgdr sp]
pot=pot2−den1

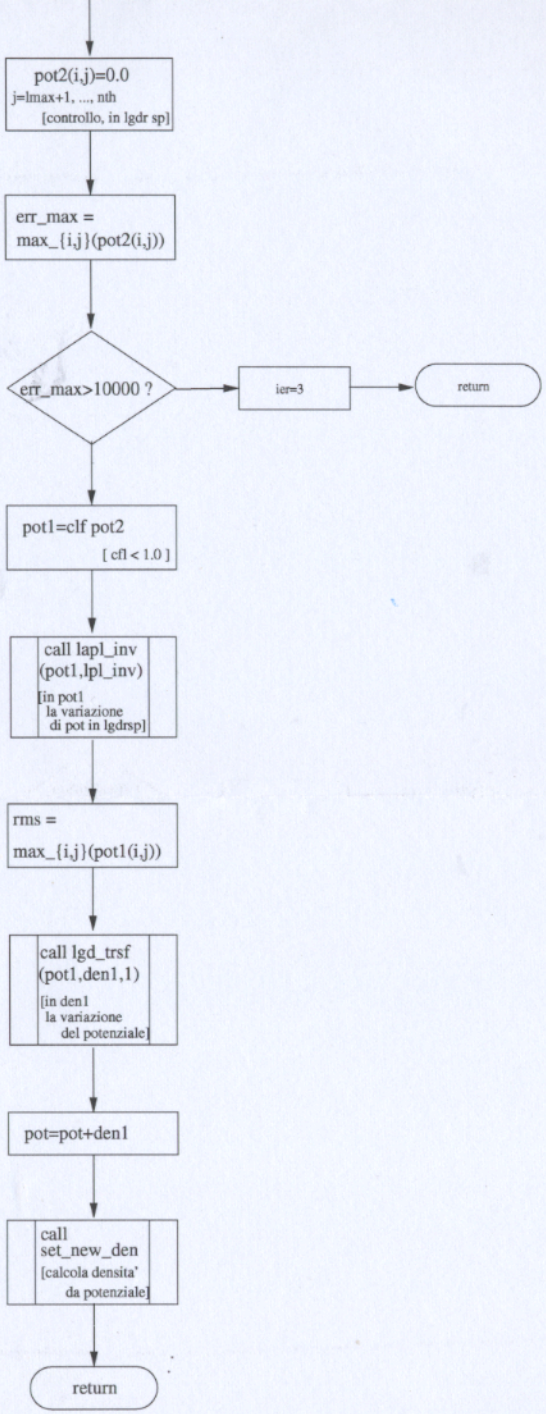


Figura B.3: Diagramma di flusso per la subroutine `psolv`.

Ringraziamenti

Ringrazio

papà e mamma, Marinella, Snoopy, i miei nonni e tutta la mia famiglia, momenti di allontanamento momenti di ritorno, grazie per esserci sempre – Ila, Cla, Anna, Gatto, Nicola e chi ha vissuto con me casa in mura di Porta Galliera e dintorni – chi ora vive e mi ospita in via Pizzardi (angolo Albertoni), Ro, Nico, Maggie, Nena (quanto è dipeso da quest'appartamento in questi sette anni?!), grazie! ... e non solo per l'ospitalità ... – Miqui & Maxi, i miei migliori amici – Beppe ... relazioni affettive in forma metastabile, grazie è una parola piccola – Marianna, Maria Luisa, Antonio (so che ci spii), Giovanni, Cristiana, FraFra, Daddi e Elisa, Albertone – gli amici di Astronomia, ora dispersi un pò ovunque (in bocca al lupo!) – Lavello Lecce Bologna – ... e Napoli Roma Firenze – GMS, CarniScelte, QueeringBO, percorsi attraverso un percorso di autoaccettazione autodeterminazione e crescita – XM24 per quello strano esperimento di vita sociale che è e perché riesce a mettermi in discussione come poco altro – Assud: un bel motivo per tornare – i buchi che ci ho e che Ila sa – un volantino di via Zamboni con su scritto Laboratorio di Teatro, era l'autunno del 2001 – il teatro e l'amore/odio che in lui riverso – Carlo Nipoti per la gentilezza l'attenzione e i preziosi consigli con cui mi ha accompagnato durante la realizzazione di questa tesi, Luca Ciotti per le illuminanti lezioni in aula (anche se è passato qualche anno), Pasquale Londrillo per l'ingengno che continuo a trovar nascosto nelle righe di codice – tutti quelli che per dimenticanza o per motivi di spazio non ho citato ma che hanno condiviso con me in questi anni le strade sotto i portici.

Bibliografia

[1] Ciotti, L.: *Lecture Notes on Stellar Dynamics*, (Scuola Normale Superiore Pisa), 2000

[2] Binney, J. & Tremaine, S.: *Galactic Dynamics*, (Princeton University Press), 1987

[3] Carroll, W. & Ostlie, D.: *An Introduction to Modern Astrophysics*, (Addison-Wesley Publishing), 1996

[4] Stoer, J. & Bulirsch, R.: *Introduction to Numerical Analysis*, (Springer-Verlag New York, Inc.), 1980

[5] Plummer, H. C. 1911, MNRAS, 71, 460

[6] King, I. R. 1966, AJ, 71, 64

[7] Wilson, C. P. 1975, AJ, 80, 175

[8] Sersic, J. L. 1968, *Atlas de galaxias australes*, Observatorio Astronomico, Cordoba

[9] de Vaucouleurs, G. 1948, *Annales d'Astrophysique*, 11, 247

[10] Bertin, G., & Stiavelli, M. 1984, A&A, 137, 26

[11] Satoh, C. 1980, PASJ, 32, 41

[12] Ciotti, L., Bertin, G., & Londrillo, P. 2004, Plasmas in the Laboratory and in the Universe: New Insights and New Challenges, 703, 322

[13] Lynden-Bell, D. 1962, MNRAS, 123, 447

[14] Ostriker, J. 1964, ApJ, 140, 1067

[15] Kuijken, K., & Merrifield, M. R. 1995, ApJ, 443, L13

[16] Lütticke, R., Dettmar, R.-J., & Pohlen, M. 2000, A&A, 362, 435

[17] Aronica, G., Athanassoula, E., Bureau, M., Bosma, A., Dettmar, R.-J., Vergani, D., & Pohlen, M. 2003, Ap&SS, 284, 753

[18] Lauer, T. R., et al. 2002, AJ, 124, 1975

[19] Ohnaka, K., Driebe, T., Hofmann, K.-H., Weigelt, G., & Wittkowski, M. 2008, A&A, 484, 371

[20] Yun, J. L., Torrelles, J. M., & Santos, N. C. 2007, A&A, 470, 231

[21] Belczynski, K., O'Shaughnessy, R., Kalogera, V., Rasio, F., Taam, R. E., & Bulik, T. 2008, ApJ, 680, L129

[22] Stephens, B. C., Shapiro, S. L., & Liu, Y. T. 2008, Phys. Rev. D, 77, 044001

[23] Baiotti, L., Giacomazzo, B., & Rezzolla, L. 2008, ArXiv e-prints, 804, arXiv:0804.0594