

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Astronomia

**EVAPORAZIONE GRAVITAZIONALE
NEGLI AMMASSI GLOBULARI**

Elaborato Finale

Candidato:

Emiliano Alessandrini

Relatore:

Chiar.mo Prof.

Luca Ciotti

Correlatore:

Chiar.mo Prof.

Carlo Nipoti

Sessione II

Anno Accademico 2009 - 2010

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Astronomia
Dipartimento di Astronomia

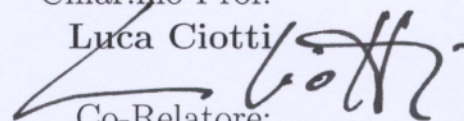
EVAPORAZIONE GRAVITAZIONALE NEGLI AMMASSI GLOBULARI

Elaborato Finale

Candidato:
Emiliano Alessandrini

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Ciotti

Co-Relatore:
Chiar.mo Prof.
Carlo Nipoti



Sessione II
Anno Accademico 2009-2010

Introduzione

L'argomento cardine di questo lavoro è l'evaporazione gravitazionale negli ammassi globulari, trattato, nella sua parte più strettamente matematica, dal punto di vista di Spitzer.

Il lavoro si pone come primo obbiettivo quello di essere il più autoconsistente possibile, quindi si è cercato di menzionare ogni concetto solo dopo averlo brevemente introdotto e spiegato.

Poichè per parlare del meccanismo di evaporazione si rendono necessarie alcune nozioni preliminari, esse sono introdotte in maniera concisa nei primi quattro capitoli.

Nel primo capitolo si fa una panoramica sugli ammassi globulari, elencandone le principali proprietà fisico-chimiche e morfologiche; ogni risultato è accompagnato da opportuna referenza a piè pagina. Questo primo capitolo ha lo scopo di fornire nozioni generali di carattere astrofisico sui sistemi che sono argomento chiave di tutto il lavoro e di rendere evidente l'importanza dell'evaporazione per giustificare la loro configurazione attuale.

Il singolo processo fondamentale che porta complessivamente all'evaporazione è l'effetto fionda, trattato nel dettaglio all'interno del capitolo tre; poichè tale effetto avviene tra coppie del sistema, è naturale l'importanza di qualche richiamo sulle equazioni fondamentali del problema dei due corpi, oggetto del secondo capitolo.

Nel capitolo quattro si fa un primo riferimento a quell'apparato potentissimo utilizzato per trattare processi dinamici all'interno di sistemi multicorpi: la teoria cinetica; si danno quindi alcune definizioni importanti, come quelle di sistema collisionale e di tempo di rilassamento e si introduce il meccanismo di evaporazione in maniera esclusivamente qualitativa.

Il quinto e il sesto capitolo rappresentano la parte di calcolo vero e proprio. Sotto le stesse ipotesi preliminari di Spitzer, nel primo di essi è fornito il tasso di evaporazione in unità di tempo da un ammasso isolato, mentre nel secondo è stato considerato anche un termine di marea dovuto alla galassia ospitante l'ammasso.

Tutti i calcoli sono stati svolti cercando di rendere esplicito ogni passaggio, senza costringere il lettore a farsi domande sull'affidabilità di un determinato risultato.

Ogni capitolo contiene al suo inizio una sorta di abstract, poche righe in cui si elencano brevemente gli argomenti trattati di seguito; l'utilità di queste brevi sezioni è quella di rendere la lettura più agevole e meglio organizzata, consentendo a chi legge di avere sotto controllo in ogni momento il percorso logico-deduttivo che si sta seguendo.

I capitoli sono a loro volta organizzati in sezioni e sottosezioni, che mirano ad una suddivisione del testo in punti chiave, sui quali è necessario soffermarsi ai fini di una completa esposizione dell'argomento trattato.

Capitolo 1

Gli ammassi globulari

In questo primo capitolo si fa una panoramica sugli ammassi globulari, descrivendone brevemente le principali caratteristiche fisiche e alcuni importanti dati osservativi.

Si parla inoltre della loro evoluzione dinamica, sottolineando come l'evaporazione stellare, oggetto di questa tesi, ne costituisca un processo di fondamentale importanza per spiegare non solo il loro aspetto morfologico attualmente osservato, ma anche alcuni particolari dati sperimentali.

1.1 Panoramica sugli ammassi globulari

Nella nostra galassia sono stati osservati circa 160 ammassi globulari [3, p.235]. Altri ancora sono stati studiati in galassie esterne¹ fino a distanze di 100 Mpc dalla Via Lattea con l'ausilio di diverse tecniche².

Gli ammassi globulari sono agglomerati formati da un numero di stelle che varia da alcune migliaia a diverse centinaia di migliaia; sono sistemi molto compatti, costituiti da stelle di popolazione II e quindi estremamente povere di metalli. La luminosità varia considerevolmente per ogni singolo caso: in generale i lavori mostrano che il numero di ammassi in funzione della magnitudine assoluta è approssimativamente una Gaussiana con valore medio $M_V \simeq -7.3$ ³.

Per quanto riguarda le dimensioni, come valore rappresentativo degli ammassi osservati, si può prendere un raggio di core $R_c \simeq 5$ pc, valore questo relativamente piccolo, che motiva la grande densità riscontrabile nelle zone centrali di tali sistemi.

Di seguito è riportata la fotografia dell'ammasso globulare M80:

¹Haynes (1977), Storm *et al.* (1981)

²Zepf, Geisler & Ashman (1994)

³Harris (1991)



Figura 1.1: L'ammasso globulare M80, noto anche come NGC 6093: si noti la straordinaria densità della zona centrale rispetto a quella esterna. Tale ammasso si trova a circa 33000 anni luce dalla Terra, ed è visibile, con un buon binocolo, come una nebulosità nella parte settentrionale della costellazione dello Scorpione.

Lo studio della composizione chimica, della posizione e della cinematica degli ammassi globulari sia nella Via Lattea che in altre galassie, è di fondamentale importanza per formulare ipotesi sulla origine, la formazione e l'evoluzione delle galassie stesse, e per calibrare con sempre maggiore precisione i modelli di evoluzione stellare.

1.2 Il diagramma Colore-Magnitudine

Esiste uno strumento essenziale per studiare molte delle caratteristiche identificative di un ammasso globulare, come ad esempio la sua età: si tratta del *diagramma Colore-Magnitudine* (CM).

Esso è un plot che mostra la magnitudine apparente delle stelle costituenti l'ammasso in una determinata banda, in funzione dell'indice di colore, relativo alla differenza di magnitudine in due diverse bande; un esempio di diagramma CM di M3, un ammasso globulare molto ben studiato⁴ e quindi estremamente rappresentativo, è mostrato in figura 1.2, mentre in figura 1.3 si osserva quello relativo a diverse migliaia di stelle nelle vicinanze del sistema solare analizzate con il satellite Hipparcos⁵.

⁴Buonanno *et al.* (1994)

⁵Perryman *et al.* (1995)

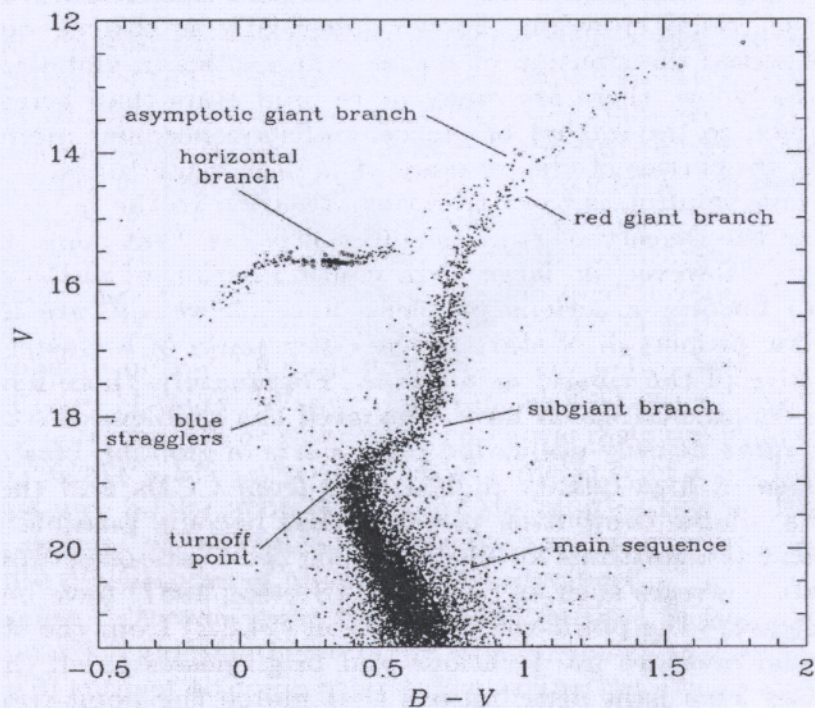


Figura 1.2: Diagramma Colore-Magnitudine dell'ammasso globulare M3. Sono indicate tutte le zone rappresentative del diagramma. Da notare che è stata riportata la magnitudine apparente in banda V, che deve essere convertita in valori assoluti della magnitudine quando si conosca la distanza dell'ammasso. In questo diagramma le stelle variabili sono riconoscibili perché rappresentate con cerchietti aperti.

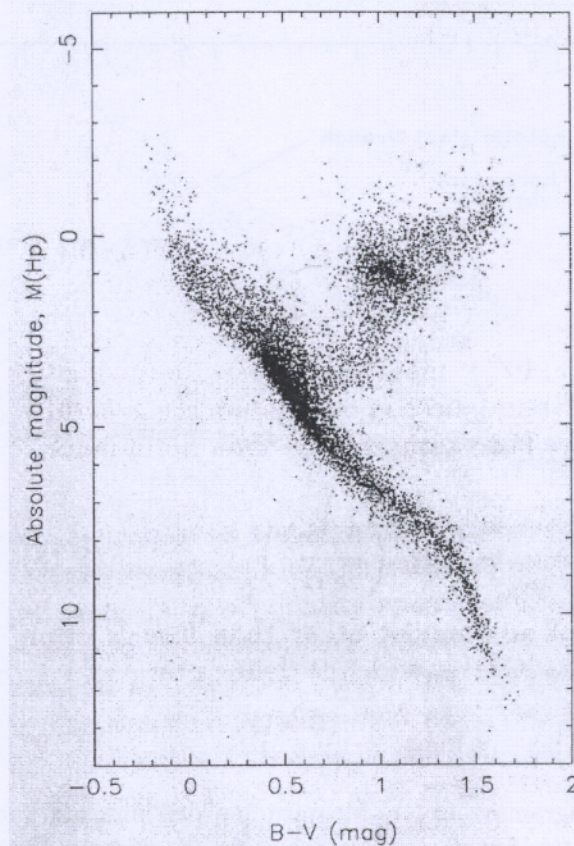


Figura 1.3: Diagramma Colore-Magnitudine di 10793 stelle in vicinanza del sistema solare. In questo caso le magnitudini sono assolute. I dati sono del satellite Hipparcos, che effettua misurazioni di distanze con il metodo delle parallassi.

In figura 1.2 sono anche indicate le sequenze costituenti il diagramma e che corrispondono a stadi evolutivi precisi delle stelle che ne fanno parte.

È più che evidente il fatto che i due diagrammi siano sostanzialmente differenti, vediamo quindi, analizzando le sequenze nel dettaglio, le conclusioni che possono essere tratte sulla base delle diversità presenti.

1.2.1 La sequenza principale (MS)

Come è noto dai modelli di evoluzione stellare, una stella passa la maggior parte della sua vita in una zona del diagramma H-R detta *Sequenza Prin-*

cipale (MS); in questa fase, la stella brucia idrogeno in elio all'interno del nucleo attraverso le reazioni di fusione nucleare.

La posizione in cui una stella abbandona la fase di presequenza ed entra nella MS, dipende unicamente dalla sua massa: stelle molto massive e luminose (di classi spettrali O e B), si trovano in alto a sinistra sulla MS, mentre stelle meno massive e poco luminose (di tipo G, K o M), si collocano in basso a destra nella MS.

Come si vede dalle due figure precedenti, la MS del diagramma CM di un ammasso globulare è estremamente più corta rispetto a quella delle stelle rappresentate in figura 1.3. In particolare, la zona non popolata da stelle è proprio quella degli oggetti più massivi e luminosi; poiché questi ultimi hanno un tempo di vita relativamente breve, il troncamento della sequenza principale e l'assenza di tali oggetti negli ammassi globulari indica chiaramente che tali sistemi si sono formati in un'epoca antica, e le stelle più massive hanno già terminato la loro vita sulla MS.

Le stelle di classi spettrali meno luminose continuano a rimanere in MS, e ne costituiscono il piccolo ramo in basso a destra, a testimonianza ancora una volta dell'età avanzata degli ammassi globulari.

1.2.2 Il ramo delle sottogiganti (SGB)

In tale zona del diagramma CM si collocano quelle stelle che hanno appena finito la loro fase nella MS e si stanno evolvendo verso il ramo delle giganti.

Si può facilmente notare che nel diagramma 1.3 tale zona è molto più allargata rispetto a quanto accade negli ammassi globulari; tale differenza si spiega con il fatto che le stelle in questi ultimi sistemi sono tutte coeve, cioè si sono formate nella stessa epoca e hanno quindi la stessa età.

Supponiamo infatti che due stelle con età diversa si vengano a trovare, ad un certo istante, nello stesso punto della MS: questo è sempre possibile perché durante l'evoluzione in MS una stella si sposta lentamente verso il basso nel diagramma, sempre lungo la sequenza principale; se facciamo l'ipotesi che una delle due in quell'istante lasci la MS e vada nel SGB, l'altra non farà lo stesso nel medesimo punto, perché ha un'età diversa e quindi entrerà nel SGB più in basso rispetto alla prima; questo rende il SGB in figura 1.3 molto allargato.

Viceversa, se due stelle sono coeve e hanno stessa massa, si evolveranno lungo la MS con gli stessi ritmi, ed entreranno nel medesimo punto sul SGB, rendendo quest'ultimo molto stretto.

Il punto in cui il SGB confina con la MS, si chiama *turnoff point* o, in italiano, *ginocchio*, e la sua posizione è di importanza basilare per la determinazione dell'età dell'ammasso, come spiegato nella prossima sezione.

Si può inoltre notare che il ginocchio sia quasi inesistente quando si considerino stelle non coeve, ed estremamente pronunciato e appuntito in figura 1.2.

Quest'ultima è un'altra caratteristica che si riscontra nelle popolazioni stellari coeve.

1.2.3 Turnoff point (TO) ed età degli ammassi globulari

Come è facile intuire, in base anche a quanto detto in 1.2.2, il punto di turnoff si sposta in basso a destra man mano che l'ammasso invecchia; questo perché con il passare del tempo, la MS perde stelle a partire da quelle più massive (in alto a sinistra), finendo con quelle meno massive (in basso a destra), e quindi anche il punto in cui avviene l'entrata nel SGB si muoverà seguendo lo stesso verso.

Risulta quindi naturale pensare ad un collegamento diretto tra la posizione del ginocchio e l'età dell'ammasso stesso: più il punto di turnoff è spostato in alto a sinistra, più il sistema è giovane; viceversa, più esso è vecchio e più il ginocchio sarà collocato in basso a destra.

Esiste una relazione quantitativa tra la magnitudine assoluta del punto di turnoff $M_V(TO)$, l'età di un ammasso globulare t e la sua metallicità $[Fe/H]$ ⁶, che può essere misurata con tecniche spettroscopiche:

$$M_V(TO) = 2.70 \log \left(\frac{t}{Gyr} \right) + 0.30 [Fe/H] + 1.41. \quad (1.1)$$

Per un ammasso globulare tipico si ha $M_V(TO) \approx 4$ e $[Fe/H] = -1.5$, con un'età corrispondente $t \approx 13 Gyr$.

1.3 Modello di King, profili di brillanza e segregazione di massa

Gli ammassi globulari sono oggetti approssimativamente sferici, pertanto non stupisce il fatto che il loro profilo di brillanza sia di tipo radiale, cioè funzione della sola distanza dal centro.

Grazie alle osservazioni dei profili di brillanza di tantissimi ammassi globulari, si è visto come tali sistemi siano compatibili con il cosiddetto *modello multimassa di King*, adottato per descrivere sistemi con spettro di massa nei quali si è raggiunta l'equipartizione dell'energia. Nel modello di King, la popolazione stellare è suddivisa in un certo numero di classi di massa e ogni classe possiede una determinata dispersione di velocità, scelta in modo da essere compatibile con l'equipartizione al centro dell'ammasso. Molti lavori e uno in particolare⁷, hanno mostrato come i profili di brillanza degli ammassi globulari possano essere distinti sulla base di una caratteristica fonda-

⁶Bergbusch & VandenBergh (1992)

⁷Djorgovski & King (1986)

mentale, riguardante l'andamento della luminosità nel nucleo dell'ammasso stesso, come illustrato di seguito.

Il modello di King è compatibile con un profilo di brillantezza che vede un andamento quasi piatto al centro dell'ammasso; in altre parole, molti degli ammassi globulari osservati hanno un profilo radiale che è pressoché costante al centro entro un certo raggio. Questa caratteristica però, non vale per la totalità dei sistemi osservati; grazie a fotometria CCD effettuata sul core di 113 ammassi globulari, è stato infatti mostrato come circa il 20% di essi presentino un innalzamento centrale della luminosità con legge di potenza, al posto di un plateau vero e proprio. Un confronto è mostrato in figura 1.4:

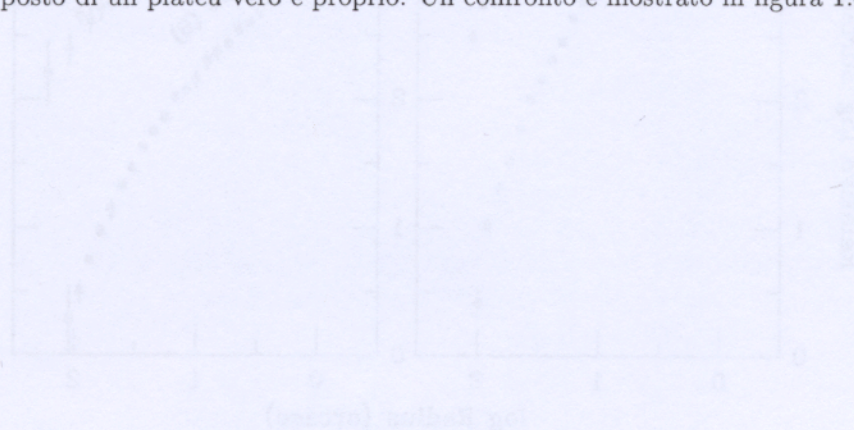


Figura 1.4. Confronto tra profili di brillantezza superficiale di ammassi globulari con plateau in corrispondenza del nucleo (a sinistra) e con legge di potenza e legge di potenza fra il core (a destra). Le barre in basso indicano la dispersione delle misure fotometriche in cui sono stati analizzati gli ammassi. I dati sono di D'Agostino (1992).

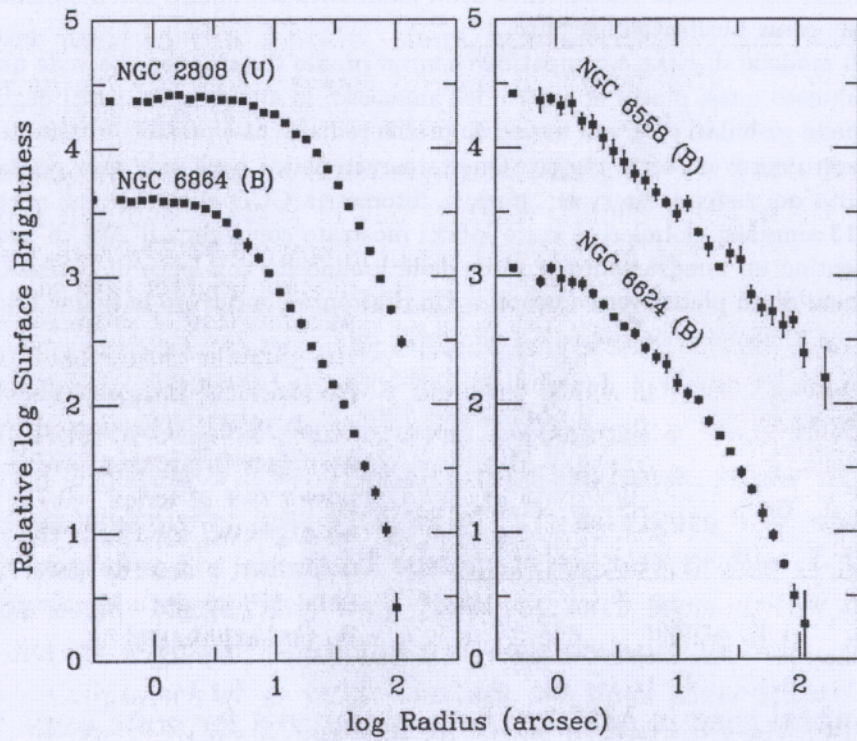


Figura 1.4: Confronto tra profili di brillantezza superficiale di ammassi globulari con plateau in corrispondenza del nucleo (a sinistra) e con bump centrale e legge di potenza fin dalle zone del core (a destra). Le lettere U e B si riferiscono alle bande fotometriche in cui sono stati analizzati gli ammassi. Tutti i dati sono di Djorgovski (1988).

Gli ammassi con zona centrale che segue una legge di potenza sono quelli che hanno subito il cosiddetto *collasso del core*, stadio finale di un avanzato processo di evaporazione gravitazionale.

In tale configurazione, le stelle più massive sono fortemente concentrate nella zona centrale dell'ammasso, perchè hanno perso energia a favore di quelle meno massive che sono in parte evaporate e in parte confinate in zone molto periferiche del sistema, con basse densità particellari; per indicare tale processo si parla anche di *segregazione di massa*.

Come abbiamo visto quindi, l'evaporazione gravitazionale è un processo che gioca un ruolo di importanza basilare, perché giustifica l'aspetto morfologico degli ammassi globulari fino ad oggi osservati; inoltre fornisce una spiegazione soddisfacente per i profili di brillantezza di quei sistemi nei quali si riscontra un bump della luminosità centrale.

1.4 Il modello di Plummer

Un profilo radiale con valore massimo quasi costante al centro e tendente a zero a grandi raggi, è compatibile con una distribuzione di densità che produce un potenziale proporzionale a $r^2 + \text{costante}$ a piccoli raggi e a r^{-1} a grandi distanze; un potenziale con queste caratteristiche è il *potenziale di Plummer*⁸

$$\phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + R^2}}, \quad (1.2)$$

in cui R è la grandezza di scala del sistema.

La distribuzione di densità può essere ricavata risolvendo l'equazione di Poisson con il potenziale (1.2) e da essa si ottiene la distribuzione di massa:

$$M(r) = M \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^3}{\left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (1.3)$$

L'assunzione di una tale distribuzione di massa per gli ammassi globulari ci sarà utile nel capitolo 5 per ricavare alcune quantità fisiche che ci aiuteranno a descrivere l'evaporazione di tali sistemi.

⁸Plummer (1915)

Capitolo 2

Richiami sul problema dei due corpi

I meccanismi fondamentali che stanno alla base dell'evaporazione di un sistema gravitazionale sono generati da interazioni tra coppie di esso; un richiamo al cosiddetto *problema dei due corpi* è pertanto necessario ai fini di una comprensione dei fenomeni che sono oggetto di questa tesi.

Nel presente capitolo si introducono le equazioni che descrivono il moto delle componenti in un sistema a due corpi e si ricavano le trasformazioni delle velocità e delle coordinate di essi tra due sistemi di riferimento diversi; si mostrano inoltre le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia meccanica. Sia le equazioni ricavate che le leggi suddette serviranno per trattare e capire le basi dell'effetto fionda, descritto nel capitolo successivo.

2.1 Le equazioni del moto nel problema dei due corpi

Il problema dei due corpi studia il moto di due particelle soggette unicamente alla mutua interazione gravitazionale.

Istituito un sistema di riferimento inerziale, indichiamo con \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 le coordinate, rispettivamente, delle componenti 1 e 2 del sistema, e con m_1 ed m_2 le loro masse; poichè c'è in gioco la forza di gravità tra le due masse, esse sono soggette ad un moto accelerato e le loro coordinate dipendono dal tempo.

Il moto delle due particelle, che soddisfa per definizione le leggi di Newton, è descritto dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t) = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)}{\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|^3}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t) = -Gm_2m_1 \frac{\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)}{\|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)\|^3}, \end{cases} \quad (2.1)$$

dove ogni punto sopra ad un vettore ne indica una derivazione rispetto al tempo.

Essendo la forza gravitazionale di tipo centrale, essa è diretta lungo la congiungente i due corpi, pertanto il sistema (2.1) è scrivibile in forma più compatta con l'uso della seguente:

Definizione 1. : si chiama **vettore relativo**, e si indica con \mathbf{r} , il vettore $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

Quindi il vettore relativo ha norma uguale alla distanza tra i due punti del sistema, direzione parallela alla loro congiungente e verso che punta sulla massa m_1 ; poichè le coordinate di entrambe le particelle variano nel tempo a causa del moto, anche \mathbf{r} dipende dal tempo.

Grazie alla definizione appena fatta, indicando con $r \equiv \|\mathbf{r}\|$, possiamo riscrivere il sistema (2.1) nella forma seguente:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t) = -G \frac{m_1m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t) = G \frac{m_1m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \end{cases} \quad (2.2)$$

in cui si è considerato il fatto che la norma del vettore relativo non cambia segno rispetto allo scambio di \mathbf{x}_1 con \mathbf{x}_2 .

Quella appena vista è una forma più comoda per il sistema (2.1), perchè rende maggiormente evidente la validità della III^a legge di Newton, la quale

afferma che la forza sperimentata dalla componente 1 è uguale in modulo, ed opposta in verso, a quella sperimentata dalla componente 2.

Oltre ad essere centrale, la forza di gravità è anche conservativa; questo comporta che il lavoro speso da una particella per andare da un punto ad un altro nel campo non dipende dal percorso seguito.

La conservatività inoltre, permette di definire una funzione *potenziale*, che per la centralità dipende solo dalla norma del vettore relativo, dalla quale sia possibile ricavare la forza facendone il gradiente rispetto al vettore \mathbf{r} .

In analogia, definiamo *energia potenziale* del campo gravitazionale in un sistema a due corpi, la funzione:

$$U(r) \equiv -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (2.3)$$

Notiamo subito che

$$\nabla_{\mathbf{r}} U = \frac{dU(r)}{dr} \hat{\mathbf{r}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.4)$$

dove all'ultimo membro si è usata la definizione (2.3).

Grazie alla (2.4), possiamo scrivere il sistema (2.2) come:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t) = -\nabla_{\mathbf{r}} U, \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t) = \nabla_{\mathbf{r}} U, \end{cases} \quad (2.5)$$

la cui scrittura risulta utilissima per mostrare la conservazione dell'energia totale del sistema nella sezione successiva.

2.2 Leggi di conservazione

Mostriamo di seguito due leggi di conservazione del problema dei due corpi: la prima è la conservazione dell'impulso totale del sistema, la quale da un lato garantisce che il centro di massa si muova di moto rettilineo e uniforme, dall'altro permette di poter integrare il sistema (2.2); la seconda è la conservazione dell'energia totale, che risulta fondamentale per introdurre l'effetto fionda sia dal punto di vista matematico che da quello concettuale.

Iniziamo quindi con la seguente:

Proposizione 1. : *il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo e uniforme.*

Dimostrazione. Sommando membro a membro le (2.2) otteniamo:

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t) + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Una prima integrazione rispetto al tempo di quest'ultima equazione fornisce:

$$m_1 \dot{\mathbf{x}}_1(t) + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{C}_1, \quad (2.7)$$

con \mathbf{C}_1 vettore costante.

Le componenti di \mathbf{C}_1 sono determinate dalle condizioni iniziali, quindi possiamo scrivere:

$$m_1 \dot{\mathbf{x}}_1(t) + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2(t) = m_1 \dot{\mathbf{x}}_1(0) + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2(0). \quad (2.8)$$

Dalla definizione di velocità del centro di massa, utilizzando la (2.8), abbiamo:

$$\mathbf{v}_{cm}(t) = \frac{m_1 \dot{\mathbf{x}}_1(0) + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2(0)}{m_1 + m_2}, \quad (2.9)$$

da cui $\mathbf{v}_{cm}(t) = \mathbf{v}_{cm}(0) \quad \forall t$; la (2.9) rappresenta la conservazione dell'impulso totale del sistema.

Facendo una successiva integrazione della (2.8) otteniamo:

$$m_1 \mathbf{x}_1(t) + m_2 \mathbf{x}_2(t) = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{cm}(0)t + \mathbf{C}_2, \quad (2.10)$$

dove \mathbf{C}_2 , analogamente a quanto detto per la (2.8) e passando attraverso la definizione di posizione del centro di massa dà luogo all'equazione:

$$m_1 \mathbf{x}_1(t) + m_2 \mathbf{x}_2(t) = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{cm}(0)t + (m_1 + m_2) \mathbf{R}_{cm}(0), \quad (2.11)$$

da cui otteniamo

$$\mathbf{R}_{cm}(t) = \mathbf{R}_{cm}(0) + \mathbf{v}_{cm}(0)t. \quad (2.12)$$

Essendo la (2.12) esattamente l'equazione oraria di un punto che si muove di moto rettilineo e uniforme, è provata la tesi. \square

Mostriamo ora la conservazione dell'energia totale del sistema.

Teorema 1 (Conservazione dell'energia meccanica totale). : *esiste una combinazione delle coordinate e delle velocità dei due punti che si conserva durante il moto.*

Dimostrazione. Moltiplichiamo scalarmente la prima e la seconda di (2.5) rispettivamente per $\dot{\mathbf{x}}_1$ e $\dot{\mathbf{x}}_2$ e sommiamo (*metodo dell'energia*):

$$\langle m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t), \dot{\mathbf{x}}_1 \rangle + \langle m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t), \dot{\mathbf{x}}_2 \rangle = -\langle \nabla_{\mathbf{r}} U, \dot{\mathbf{x}}_1 \rangle + \langle \nabla_{\mathbf{r}} U, \dot{\mathbf{x}}_2 \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{r}} U, \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_1 \rangle. \quad (2.13)$$

Inserendo in (2.13) la definizione di vettore relativo e osservando come l'ultimo prodotto scalare della (2.13) si possa scrivere come derivata totale rispetto al tempo si ottiene:

$$\langle m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1(t), \dot{\mathbf{x}}_1 \rangle + \langle m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2(t), \dot{\mathbf{x}}_2 \rangle = \langle -\nabla_{\mathbf{r}} U, \dot{\mathbf{r}} \rangle = -\frac{dU(r)}{dt}. \quad (2.14)$$

La velocità è il fattore integrante dell'accelerazione, pertanto anche il primo membro della (2.13) può esprimersi come derivata totale rispetto al tempo; alla fine abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 \|\dot{\mathbf{x}}_1\|^2}{2} + \frac{m_2 \|\dot{\mathbf{x}}_2\|^2}{2} \right) + \frac{dU}{dt} = 0, \quad (2.15)$$

da cui, integrando rispetto al tempo:

$$\frac{m_1 \|\dot{\mathbf{x}}_1\|^2}{2} + \frac{m_2 \|\dot{\mathbf{x}}_2\|^2}{2} + U = E, \quad (2.16)$$

con E costante, da cui la tesi. \square

La costante E è detta *Energia Meccanica Totale* del sistema.

I primi due addendi rappresentano l'energia cinetica dei singoli corpi rispettivamente, mentre l'ultimo addendo è l'energia potenziale del sistema;

quest'ultima rappresenta l'energia necessaria per dissolvere il sistema, quindi, per definizione, l'energia di legame.

2.3 Massa ridotta e orbita relativa

Esiste un solo sistema di riferimento che permette l'integrazione delle (2.2), ed è quello con origine nel centro di massa; il motivo risiede nel fatto che tale sistema, come vedremo, è l'unico nel quale si abbiano a disposizione due equazioni.

Per scrivere le equazioni del moto nel sistema del centro di massa, dobbiamo passare attraverso la definizione di *massa ridotta*, la cui espressione matematica ed il cui significato fisico sono mostrati come segue.

Riprendiamo le (2.2), dividiamo la prima per m_1 , la seconda per m_2 e sottraiamo membro a membro; si ottiene, con l'uso del vettore relativo:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right). \quad (2.17)$$

A questo punto diamo la seguente:

Definizione 2. : si dice *massa ridotta* del sistema la massa $\mu \equiv (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$.

Con l'uso della definizione appena data, possiamo scrivere la (2.17) come segue:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.18)$$

Nel ricavare quest'equazione abbiamo usato l'orbita relativa \mathbf{r} , che equivale a centrare il sistema di riferimento sulla massa m_2 ; m_2 però, **non** è un sistema di riferimento inerziale, perchè è soggetto alla forza dovuta a m_1 , e quindi ad un'accelerazione. Nonostante ciò, l'equazione che si ottiene ha la stessa struttura matematica delle equazioni del moto (2.2) le quali, lo ricordiamo, erano state scritte in un sistema inerziale. Il motivo di questa apparente stranezza è in realtà estremamente profondo, ed è dovuto alla III^a legge di Newton, la quale garantisce che l'accelerazione sperimentata da m_2 è uguale in modulo, e contraria in verso, a quella sperimentata da m_1 . Grazie a questa simmetria della natura, quando ci mettiamo su \mathbf{x}_2 le nostre equazioni non risentono del fatto che siamo in un sistema accelerato, perchè i termini non inerziali sono riassorbiti dall'accelerazione, uguale ed opposta, dell'altro corpo di cui vogliamo conoscere posizione e velocità in ogni istante a partire

dalle condizioni iniziali; il termine che riassorbe è proprio la massa ridotta, e la (2.18) è, solo formalmente, identica alle equazioni del sistema (2.2).

Vediamo ora come il sistema del centro di massa permetta di integrare, con l'uso dell'orbita relativa, le equazioni del moto nel problema dei due corpi.

Definiamo la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{R}_{cm}(t) + \mathbf{x}'_1(t), \\ \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{R}_{cm}(t) + \mathbf{x}'_2(t). \end{cases} \quad (2.19)$$

Risulta chiaro che le nuove coordinate con l'apice sono ottenute da quelle vecchie definite nel sistema inerziale introdotto all'inizio, sottraendo le coordinate del centro di massa, che pure è un sistema inerziale in virtù del risultato (2.12).

In questo nuovo sistema dunque, l'orbita relativa non cambia, perché:

$\mathbf{r} = (\mathbf{R}_{cm}(t) + \mathbf{x}'_1(t)) - (\mathbf{R}_{cm}(t) + \mathbf{x}'_2(t)) = \mathbf{x}'_1(t) - \mathbf{x}'_2(t)$; il nostro sistema è quello del centro di massa, ma è chiaro che si può istituire un'infinità numerabile di sistemi che si muovono rispetto ad uno dei due corpi con velocità costante, risulta quindi provata la seguente:

Proposizione 2. : *l'orbita relativa è la stessa per tutti gli osservatori inerziali.*

Siccome siamo nel centro di massa, le coordinate di quest'ultimo in questo nuovo sistema sono il vettore nullo.

Si ottiene quindi il sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_1(t) - \mathbf{x}'_2(t) = \mathbf{r}(t), \\ m_1 \mathbf{x}'_1(t) + m_2 \mathbf{x}'_2(t) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Risolte per \mathbf{x}'_1 e \mathbf{x}'_2 , le (2.20) forniscono:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1(t) &= \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r}(t), \\ \mathbf{x}'_2(t) &= -\frac{\mu}{m_2} \mathbf{r}(t). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Derivando prima le (2.19) e poi le (2.21) si ottiene, nell'ordine,

$$\begin{cases} \mathbf{v}'_1(t) = \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_{cm}(0), \\ \mathbf{v}'_2(t) = \mathbf{v}_2(t) - \mathbf{v}_{cm}(0), \end{cases} \quad (2.22)$$

e

$$\begin{cases} \mathbf{v}'_1(t) = \frac{\mu}{m_1} \dot{\mathbf{r}}(t), \\ \mathbf{v}'_2(t) = \frac{\mu}{m_2} \dot{\mathbf{r}}(t). \end{cases} \quad (2.23)$$

Risolvendo come unico sistema quello formato dall'unione di (2.22) e (2.23), e utilizzando ancora la (2.12) abbiamo infine

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{R}_{cm}(0) + \mathbf{v}_{cm}(0)t + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r}(t), \\ \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{R}_{cm}(0) + \mathbf{v}_{cm}(0)t - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r}(t), \\ \mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_{cm}(0) + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v}(t), \\ \mathbf{v}_2(t) = \mathbf{v}_{cm}(0) - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v}(t), \end{cases} \quad (2.24)$$

dove è stata definita $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$ *velocità relativa*.

L'orbita relativa, come abbiamo visto in precedenza, è la stessa per tutti i sistemi inerziali; grazie ad essa, che costituisce una sorta di grandezza di scala del sistema, e grazie alle (2.24), è possibile conoscere posizione e velocità dei due corpi ad ogni istante in dipendenza dalle condizioni iniziali, le quali risiedono in $\mathbf{v}_{cm}(0)$ e $\mathbf{R}_{cm}(0)$.

Come già anticipato, le (2.24) sono di fondamentale importanza per ricavare le equazioni che illustrano l'effetto fionda, oggetto del capitolo seguente.

Capitolo 3

Variazione dell'energia di una stella ad opera di mutue interazioni

Nel presente capitolo, utilizzando le equazioni ricavate precedentemente con il problema dei due corpi, si illustra come, durante l'interazione gravitazionale tra due stelle lungo le rispettive orbite, sia possibile in un sistema di riferimento adatto misurare una variazione dell'energia cinetica di entrambe le componenti. Facendo uso della conservazione dell'energia totale inoltre, si mostra come in un sistema a due corpi, la variazione di energia cinetica di uno sia controbilanciata da una uguale variazione, ma di segno opposto, dell'altro, rendendo evidente un processo di scambio di energia.

3.1 Conservazione della velocità sull'orbita relativa

Nel precedente capitolo abbiamo dimostrato che l'energia meccanica totale di un sistema gravitazionale a due corpi si conserva.

L'energia però, benchè sia costante in ogni sistema di riferimento inerziale, non è un invariante, perciò assume un valore ogni volta diverso in dipendenza dal sistema di riferimento da cui è misurata.

Mettiamoci inizialmente nel sistema dell'orbita relativa, che equivale pertanto a posizionarsi su una delle due masse: supponiamo su m_1 .

Supponiamo inoltre di considerare orbite con energia positiva, le quali evidentemente sono ammesse da tutti i potenziali $U(r)$ tali che

$$U(r)_{r \rightarrow +\infty} \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

La condizione (3.1) equivale a richiedere che la forza ammetta orbite slegate, come è il caso della forza di gravità.

L'orbita descritta dalla massa m_2 allora, sarà un'iperbole con fuoco nell'origine del nostro sistema (la massa m_1), come mostrato in figura 2.1:

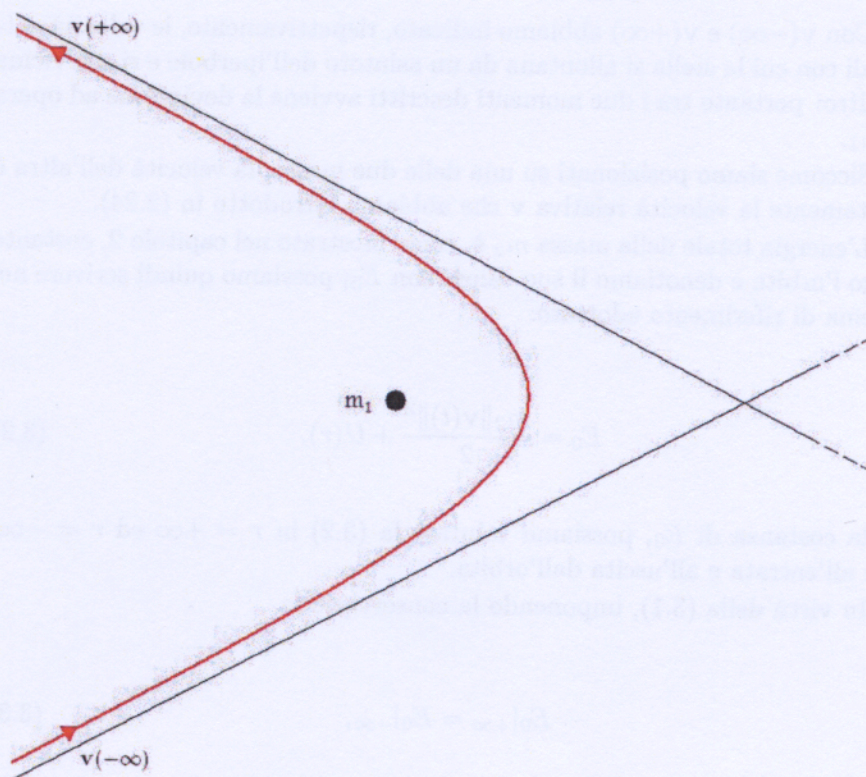


Figura 3.1: Orbita iperbolica della massa m_2 rispetto alla massa m_1 ; quest'ultima è chiaramente collocata nel fuoco della traiettoria. Con le frecce si è indicato il senso di percorrenza dell'iperbole, mentre le semirette individuano gli asintoti della traiettoria. Con $v(-\infty)$ e $v(+\infty)$ si sono indicate le velocità, rispettivamente, di entrata e di uscita dalla zona di forte interazione della massa m_2 con la massa m_1 .

Con $\mathbf{v}(-\infty)$ e $\mathbf{v}(+\infty)$ abbiamo indicato, rispettivamente, le velocità vettoriali con cui la stella si allontana da un asintoto dell'iperbole e si riavvicina all'altro: pertanto tra i due momenti descritti avviene la deviazione ad opera di m_1 .

Siccome siamo posizionati su una delle due masse, la velocità dell'altra è esattamente la velocità relativa \mathbf{v} che abbiamo introdotto in (2.24).

L'energia totale della massa m_2 è, come mostrato nel capitolo 2, costante lungo l'orbita e denotiamo il suo valore con E_0 ; possiamo quindi scrivere nel sistema di riferimento adottato:

$$E_0 = \frac{m_2 \|\mathbf{v}(t)\|^2}{2} + U(r). \quad (3.2)$$

Dalla costanza di E_0 , possiamo valutare la (3.2) in $r = +\infty$ ed $r = -\infty$, cioè all'entrata e all'uscita dall'orbita.

In virtù della (3.1), imponendo la conservazione

$$E_0|_{+\infty} = E_0|_{-\infty}, \quad (3.3)$$

risulta che

$$\|\mathbf{v}(+\infty)\| = \|\mathbf{v}(-\infty)\|. \quad (3.4)$$

Questo risultato è di importanza fondamentale e ci dice che *la conservazione dell'energia meccanica sull'orbita relativa è algebricamente equivalente alla conservazione del modulo della velocità lungo essa.*

Un tale risultato non sarebbe stato possibile in un potenziale che non si annullasse all'infinito.

L'energia cinetica è quindi conservata lungo l'orbita relativa essendo valida la (3.4); di conseguenza, ponendosi in una delle due componenti di un sistema a due corpi, non è possibile misurare alcuna variazione dell'energia cinetica, e quindi risulta:

$$\Delta T = 0, \quad (3.5)$$

dove con T indichiamo l'energia cinetica di una sola componente.

3.2 Effetto fionda

Alla luce dei risultati ottenuti nella sezione precedente, appare chiaro come per misurare variazioni di energia cinetica delle componenti di un sistema doppio sia necessario porsi in un sistema di riferimento diverso dall'orbita relativa.

Mettiamoci quindi in un sistema inerziale qualunque, in cui indichiamo con l'apice le coordinate di tutti i vettori come abbiamo fatto nel capitolo 2.

Come già visto, per le velocità misurate da questo nuovo sistema di riferimento sono valide le ultime due equazioni del sistema di soluzioni (2.24).

Prendiamo, coerentemente con la figura 2.1, la velocità della massa m_2 e valutiamola all'entrata e all'uscita dall'orbita facendo uso delle (2.24):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_2(+\infty) &= \mathbf{v}_{cm} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v}(+\infty), \\ \mathbf{v}'_2(-\infty) &= \mathbf{v}_{cm} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v}(-\infty). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Notiamo che le velocità scritte nelle (2.24) dipendono dal tempo e non da r ; in realtà al variare di t varia anche r , quindi possiamo sostenere che vi è una corrispondenza tra le due grandezze che rende coerente la notazione utilizzata in (3.6).

Se facciamo la norma al quadrato delle (3.6) otteniamo:

$$\|\mathbf{v}'_2(\pm\infty)\|^2 = \left(\|\mathbf{v}_{cm}\| - \frac{\mu}{m_2} \|\mathbf{v}\| \right)^2 = \|\mathbf{v}_{cm}\|^2 - 2\frac{\mu}{m_2} \langle \mathbf{v}_{cm}, \mathbf{v}(\pm\infty) \rangle + \|\mathbf{v}(\pm\infty)\|^2. \quad (3.7)$$

Valutiamo ora la variazione di energia cinetica della massa m_2 tra l'entrata e l'uscita dall'orbita vista dal nostro nuovo sistema di riferimento, utilizzando l'identità appena ricavata:

$$\Delta T_2 \equiv \frac{1}{2} m_2 \|\mathbf{v}'_2(-\infty)\|^2 - \frac{1}{2} m_2 \|\mathbf{v}'_2(+\infty)\|^2, \quad (3.8)$$

quindi

$$\Delta T_2 = \mu \langle \mathbf{v}_{cm}, \mathbf{v}(+\infty) \rangle - \mu \langle \mathbf{v}_{cm}, \mathbf{v}(-\infty) \rangle. \quad (3.9)$$

Dove si è tenuto conto di (3.4) e del fatto che la velocità del centro di massa non cambia.

Definendo $\mathbf{v}(+\infty) - \mathbf{v}(-\infty) \equiv \Delta\mathbf{v}$ otteniamo:

$$\Delta T_2 = \mu \langle \mathbf{v}_{cm}, \Delta\mathbf{v} \rangle. \quad (3.10)$$

L'equazione (3.10) formalizza il cosiddetto *effetto fionda*, osservabile in un sistema di riferimento diverso da quello dell'orbita relativa o da quello del centro di massa. Attraverso tale effetto, in dipendenza dal segno del prodotto scalare, una stella perde o guadagna energia cinetica.

Il segno di $\langle \mathbf{v}_{cm}, \Delta\mathbf{v} \rangle$, dipende dall'orientazione dei due vettori, quindi è la direzione di essi (determinata dal sistema di riferimento) che comporta guadagno o perdita di T .

Se \mathbf{v}_{cm} è parallelo e concorde in verso a $\Delta\mathbf{v}$, la variazione di energia cinetica è massima con un guadagno netto all'uscita dell'orbita di una quantità $\mu \|\mathbf{v}_{cm}\| \|\Delta\mathbf{v}\|$, mentre una perdita di energia della stessa quantità si ha nel caso in cui i due vettori siano in uguale direzione e verso opposto.

3.3 Scambi di energia

Ricavando l'equazione dell'effetto fionda abbiamo calcolato la variazione di energia cinetica di uno solo dei due corpi, senza considerare cosa avviene al sistema complessivamente; facciamo quindi una serie di considerazioni.

La figura 2.1 mostra l'orbita relativa, cioè l'orbita come vista da uno qualsiasi dei due corpi; in realtà, la situazione vista da un sistema di riferimento inerziale qualsiasi è notevolmente più complicata: entrambe le stelle percorrono le loro rispettive orbite, ognuna delle quali ha la stessa forma mostrata in figura 2.1 solo ed esclusivamente se viste da uno dei due corpi.

Consideriamo quindi un'interazione tra due stelle visto da un sistema in cui si osserva l'effetto fionda e supponiamo che entrambi i corpi abbiano energia totale positiva: ognuna delle rispettive orbite relative sarà allora un'iperbole, in cui all'entrata e all'uscita vale per entrambe le stelle la condizione di nullità dell'energia potenziale.

Sappiamo che l'energia totale del sistema complessivo si conserva, quindi la sua variazione durante l'incontro è uguale a zero, così come lo è quella dell'energia potenziale di ogni singola stella in virtù della (3.1).

Quindi abbiamo:

$$\Delta E_{tot} = 0 = \Delta T_1 + \Delta T_2, \quad (3.11)$$

pertanto risulta:

$$\Delta T_1 = -\Delta T_2. \quad (3.12)$$

La (3.12), si riferisce ad un singolo incontro ed è limitata al tempo in cui sussiste tale interazione.

Siccome la variazione subita da m_1 è opposta a quella subita da m_2 , possiamo parlare di un vero e proprio scambio di energia tra le due componenti: quando una guadagna energia cinetica, l'altra ne perde, e viceversa.

Vediamo ora di quanto variano reciprocamente le velocità al quadrato di due particelle che subiscono un incontro.

Dalla (3.7) possiamo scrivere

$$\Delta \|\mathbf{v}_1\|_{enc}^2 = 2 \frac{\mu}{m_1} \langle \mathbf{v}_{cm}, \Delta \mathbf{v} \rangle, \quad (3.13)$$

dove con il suffisso *enc* intendiamo nel passaggio di r tra $r = -\infty$ ed $r = +\infty$.

Visto da un sistema di riferimento qualunque, il prodotto scalare che compare nella (3.10) è uguale per entrambe le stelle, poichè l'incontro che subiscono è il medesimo, quindi se facciamo il rapporto tra le variazioni dei quadrati delle velocità delle singole stelle, otteniamo che

$$\frac{\Delta \|\mathbf{v}_1\|_{enc}^2}{\Delta \|\mathbf{v}_2\|_{enc}^2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (3.14)$$

Dipendendo la (3.14) dal rapporto tra le due masse, notiamo che se ad esempio $m_1 \gg m_2$, allora $\Delta \|\mathbf{v}_1\|_{enc}^2 \ll \Delta \|\mathbf{v}_2\|_{enc}^2$, mentre nel caso $m_1 \ll m_2$ si ha che $\Delta \|\mathbf{v}_1\|_{enc}^2 \gg \Delta \|\mathbf{v}_2\|_{enc}^2$.

Possiamo quindi asserire che il corpo più massivo subisce una variazione di velocità molto minore di quello meno massivo.

In altre parole, meno un corpo è massivo, tanto più riuscirà a guadagnare in velocità in seguito ad un incontro.

In un sistema formato da N stelle, il processo appena descritto avviene simultaneamente tra molte coppie, generando una variazione dell'energia cinetica delle stelle.

L'effetto fionda e le conseguenze che esso comporta, possono essere considerate come la manifestazione chiara della termodinamica nei sistemi gravitazionali.

Capitolo 4

L'evaporazione gravitazionale

Si introduce di seguito il meccanismo dell'evaporazione gravitazionale da un sistema stellare dal punto di vista puramente concettuale, utilizzando i risultati sia quantitativi che qualitativi ottenuti nel capitolo precedente. Si dà una definizione qualitativa di *sistema collisionale* e si accenna brevemente alla *teoria cinetica*, apparato utilizzato per studiare dal punto di vista teorico l'evoluzione dinamica di sistemi collisionali a N corpi, quali sono gli ammassi globulari.

Si introduce il concetto di *tempo di rilassamento* di un sistema in approssimazione impulsiva, il quale è necessario per trattare l'evaporazione gravitazionale in maggiori dettagli, come avverrà nel capitolo successivo.

4.1 Teoria cinetica e tempo di rilassamento

L'evoluzione dinamica di un sistema di particelle dipende criticamente da come variano le velocità delle particelle all'interno di esso, quindi appare chiara la necessità di studiare e valutare queste variazioni.

A questo scopo, si adotta generalmente il cosiddetto approccio *cinetico*; l'esperimento concettuale alla base di tale approccio è presto illustrato.

Supponiamo di avere un sistema di N particelle legato dalle mutue interazioni tra le componenti di esso. All'interno di questo sistema, si sceglie una cosiddetta particella *di test* e si battezzano le restanti $N - 1$ come particelle *di campo*.

Ipotizzando di lanciare con velocità iniziale nota la massa di test all'interno del sistema, ci si propone di valutare la variazione di velocità che essa subisce durante l'attraversamento, ad opera degli incontri con le particelle di campo.

Lo schema concettuale è il seguente: si considera ogni singola interazione come se avvenisse in un sistema a due corpi, e si sommano successivamente tutti i contributi per ottenere un valore medio della variazione cercata.

In altre parole, si trasforma un problema ad N corpi nella somma complessiva di $N - 1$ problemi a due corpi, ciascuno con il proprio contributo.

Ogni incontro che subisce la massa di test m_t con ciascuna delle particelle di campo, che qui supponiamo avere la stessa massa m_f , provoca in generale una variazione dell'energia cinetica di entrambe le stelle in seguito all'effetto fionda mostrato nel capitolo 3.

La massa m_t sperimenterà quindi una variazione del modulo della sua velocità in accordo con la (3.13). Questa variazione, che è anche in senso vettoriale grazie alle (2.24), si verifica con tutte le componenti del sistema; se noi ora immaginiamo che la distribuzione di velocità delle particelle di campo sia isotropa, la massa m_t sperimenterà evidentemente incontri con corpi che hanno velocità in ogni direzione possibile su una sfera, dunque anche le deviazioni vettoriali della velocità di m_t avverranno in maniera isotropa: ne risulta che, in media, non si ottiene una deviazione effettiva ad opera del sistema sulla massa di test.

Il fatto che una particella entri nel sistema in una direzione ed esca nella stessa direzione, non significa che all'interno di esso l'orbita non venga deviata; al contrario, significa che avvengono deviazioni in media in ogni direzione, e il baricentro del sistema rimane fisso in un punto.

Se la considerazione appena fatta vale in senso strettamente vettoriale, non vale in senso scalare; il modulo quadro della velocità della particella di test, ad esempio, cambia all'interno del sistema, e con lui cambia l'energia cinetica totale di m_t ; appare quindi sensato l'intento di stimare questa variazione.

Possiamo inoltre fare un'ulteriore considerazione: se è vero che nel caso in cui il sistema abbia funzione di distribuzione isotropa, la particella di test

esce nella stessa direzione con la quale è entrata, è altrettanto vero che finchè essa rimane all'interno del sistema la direzione della sua velocità cambia, quindi la velocità avrà componenti non nulle anche in direzione diversa da quella di entrata. Quando m_t entra nel sistema, la sua velocità iniziale è totalmente anisotropa, perchè ha una direzione ben precisa e lo stesso vale evidentemente per il suo valor medio; all'interno del sistema invece, la velocità tende a diventare isotropa, perchè ogni incontro devia la particella in direzione diversa. Concettualmente possiamo vedere questo fenomeno come un processo diffusivo, in cui l'anisotropia nella velocità della particella di test è smorzata dalle interazioni con il resto del sistema.

Nella teoria cinetica dei gas, il quadrato del valor medio della velocità delle particelle è collegato alla temperatura del sistema; analogamente, anche in questo caso si cerca di valutare il modulo quadro della variazione della velocità di m_t , in direzione perpendicolare alla velocità relativa iniziale; rimanendo sul parallelo termodinamico, tale oggetto si può considerare come una sorta di riscaldamento perpendicolare che subisce la massa di test attraversando il sistema.

La considerazione fatta al termine del capitolo precedente, nella quale si sottolineava come lo scambio di energia cinetica tra stelle possa essere considerato come una manifestazione della termodinamica, suggerisce che l'idea di trattare sistemi multicorpi con l'approccio cinetico ha in realtà giustificazioni profonde.

Abbiamo quindi messo in evidenza l'importanza di valutare l'oggetto che dà una stima del riscaldamento perpendicolare $\|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2$ ma di eguale interesse è valutare il tempo caratteristico di questo processo; in altre parole, il tempo necessario affinché il processo diffusivo descritto sopra sia completo, e l'anisotropia iniziale cancellata del tutto ad opera delle interazioni con il sistema. Questo tempo caratteristico, che abbiamo definito solo in maniera qualitativa, si chiama *tempo di rilassamento* del sistema e si indica generalmente con t_{relax} .

Il problema dei tempi di rilassamento di un sistema è di centrale importanza in meccanica statistica e una sua definizione da un punto di vista rigoroso richiederebbe di passare attraverso l'ipotesi ergodica; per i nostri scopi, ci basti considerare t_{relax} come il tempo necessario al sistema a riassorbire eventuali anisotropie nella funzione di distribuzione.

Se facciamo l'ipotesi che le particelle di campo abbiano, ad esempio, una distribuzione Maxwelliana di velocità, il tempo necessario a rigenerare tale distribuzione in seguito ad un'eventuale anisotropia è, dunque, il tempo di rilassamento; poichè in seguito considereremo sempre sistemi con distribuzione di velocità di tipo Maxwell-Boltzmann, è naturale, una volta per tutte, dare la seguente:

Definizione 3. : si dice tempo di rilassamento t_{relax} , il tempo necessario al sistema per assumere una distribuzione Maxwelliana di velocità.

Un calcolo esplicito di t_{relax} è lasciato in appendice, in questa sede ne diamo solo la formulazione finale¹:

$$t_{relax} = \frac{\langle v \rangle^3}{8\pi G^2 N m_f^2 \ln \Lambda}, \quad (4.1)$$

dove $\langle v \rangle$ è la velocità media delle particelle del sistema, N è la densità particellare, e $\ln \Lambda$ si dice *Logaritmo di Coulomb*; un suo valore tipico è tra 10 e 15, per i dettagli si veda in appendice.

Un calcolo diretto di t_{relax} per diversi sistemi stellari, mostra come ne esistano alcuni il cui tempo di vita sia molto minore del tempo di rilassamento, altri in cui si verifica il contrario. I primi si dicono sistemi *non collisionali* (collisionless), gli altri *collisionali* (collisional).

L'approccio cinetico descritto qualitativamente in precedenza è necessario per sistemi collisionali; in questi sistemi, ciascuna componente risente della granularità del potenziale complessivo, mentre se il sistema è non collisionale, può essere immaginato come una distribuzione smooth di densità in cui per riflesso anche il potenziale è liscio, e le interazioni tra le componenti hanno un ruolo marginale nell'evoluzione dinamica del sistema. I sistemi collisionali, al contrario, sono governati dagli incontri tra le loro componenti, con il risultato di una tendenza a sviluppare una termodinamica interna.

Una misura esplicita, ottenuta dalla (4.1) sostituendo valori tipici, fornisce:

$$\begin{aligned} t_{relax} &\simeq 10^6 \div 10^7 \text{ Gyr} && \text{(Galassie),} \\ t_{relax} &\simeq 1 \div 10 \text{ Gyr} && \text{(Ammassi Globulari),} \end{aligned} \quad (4.2)$$

pertanto gli ammassi globulari sono sistemi collisionali, contrariamente alle galassie.

È ovvio che il concetto di collisionalità o meno di un sistema è relativo al tempo scala del processo: ogni sistema discreto è collisionale, se osservato abbastanza a lungo.

Per ricavare esplicitamente la (4.1), abbiamo utilizzato quella che si definisce *approssimazione impulsiva*. In tale approssimazione si considera, come effetto preponderante, quello dovuto ai cosiddetti *urti lontani*, cioè quelli che avvengono con particelle lontane da quella di test. È chiaro che il termine 'lontano', di per sé, non significa molto; quello che si considera è che gli incontri lontani, benché producano singolarmente deviazioni della velocità non troppo significative, danno, sommati, un contributo totale maggiore

¹Chandrasekhar (1942)

di quello dovuto agli urti vicini, nonostante questi ultimi generino variazioni importanti sull'orbita.

Questa caratteristica è insita nella forza di gravità per la sua dipendenza da $1/r^2$; poichè la forza decresce come $1/r^2$ ma l'angolo solido cresce con la stessa identica dipendenza, il contributo totale degli incontri lontani prevale.

4.2 Il meccanismo di evaporazione

Come abbiamo visto, gli incontri tra componenti di un sistema gravitazionale ne producono variazioni dell'energia cinetica; alcune di queste interazioni, possono far guadagnare ad una stella abbastanza energia cinetica da superare l'energia richiesta per la fuga dal sistema: come risultato, la stella abbandona l'ammasso e se ne va all'infinito.

Se consideriamo questo fenomeno avvenire per più di una stella, abbiamo l'evaporazione gravitazionale.

I primi ad affrontare il problema dell'evaporazione da un punto di vista teorico, furono Ambartsumian² e Spitzer³.

Quest'ultimo calcolò, in differenti modelli di ammasso globulare, il tasso di evaporazione, mostrando quale sia la perdita di massa in unità di tempo.

Sulla base dei risultati concettuali visti nella sezione precedente e alla fine del capitolo 3, possiamo riassumere brevemente i processi che governano l'evoluzione dinamica di un sistema collisionale come segue:

a) **Rilassamento:** le interazioni tra componenti del sistema danno luogo ad un processo di tipo diffusivo nello spazio delle fasi, per mezzo del quale eventuali anisotropie che si vengono a creare nella funzione di distribuzione, sono riassorbite in media dal sistema stesso. Questo processo avviene tipicamente su un tempo scala, che è il tempo di rilassamento espresso in (4.1).

b) **Equipartizione:** un ammasso reale è composto in generale da uno spettro di masse piuttosto ampio. Analogamente a quanto succede in un gas, anche in un sistema stellare gli incontri portano all'equipartizione dell'energia, e come risultato le stelle con massa minore hanno velocità medie maggiori, come mostrato nella (3.14), e sono collocate nelle zone più esterne del sistema, mentre quelle più massive vanno più lente e sono confinate nella parte più centrale dell'ammasso.

c) **Evaporazione:** gli incontri tra le stelle in un ammasso portano alcune componenti a superare l'energia richiesta per la fuga, facendogli abbandonare il sistema. Grazie all'equipartizione dell'energia, sono le stelle meno massive

² *On the Dynamics of Open Clusters*, 1938. In inglese su Goodman & Hut, 1985.

³ *The Stability of Isolated Clusters*, 1940. MNRAS.

che lasciano l'ammasso, poichè sono quelle, all'interno della distribuzione, ad avere velocità medie più elevate. Come risultato, man mano che le stelle di piccola massa fuggono, l'ammasso si contrae e tendono a rimanere solo le stelle più massive.

Chiaramente in un ammasso reale, tutti questi processi avvengono simultaneamente; inoltre, se ad esempio sta avvenendo l'evaporazione, il numero di componenti del sistema cambia, di conseguenza cambia il tempo rilassamento e con esso il tempo in cui si giunge all'equipartizione.

Non solo: se l'ammasso sta evaporando, anche la funzione di distribuzione varia nel tempo, ad esempio perchè la velocità media del sistema cresce man mano che esso si contrae, quindi se si volesse affrontare il più rigorosamente possibile il problema della perdita di massa per evaporazione da parte di un sistema stellare, bisognerebbe ricorrere ad un'equazione che dia conto di come varia la funzione di distribuzione: tale strumento è l'equazione di Fokker - Planck, utilizzata da Spitzer Cfr[1] per trovare risultati con meno approssimazioni possibili.

Il modo più semplice di procedere, che come è ovvio non è rigoroso al cento per cento, è quello di supporre che l'ammasso abbia una distribuzione Maxwelliana di velocità, e che non ci sia evaporazione durante tutto il tempo in cui tale distribuzione non sia completata; in altre parole, si suppone che ogni volta che il sistema espelle componenti, ritorni, in un tempo di rilassamento, a rigenerare la Maxwelliana senza perdite ulteriori.

Questa approssimazione, seppur inverosimile in un contesto reale, è quella che necessariamente deve essere adottata per inquadrare il problema in un primo approccio, ed è quella che sarà da noi utilizzata nel prossimo capitolo.

Dal punto di vista analitico, la velocità di fuga da un sistema gravitazionale, può essere calcolata imponendo che l'energia cinetica di una stella alla velocità di fuga in quel punto, eguagli, nello stesso punto, l'energia di legame del sistema; se facciamo il calcolo in unità di massa scriviamo:

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{v}_{esc}(\mathbf{x})\|^2 + \Phi(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.3)$$

dove abbiamo indicato con \mathbf{v}_{esc} la velocità di fuga e con Φ l'energia potenziale per unità di massa.

La condizione scritta è l'espressione formale del fatto che orbite slegate hanno energia totale positiva; quando $E = 0$, la traiettoria relativa in un problema a due corpi è una parabola, quando $E > 0$ invece, il corpo descrive un'iperbole.

Considerando che Φ è negativa, ricaviamo dall'equazione precedente:

$$\|\mathbf{v}_{esc}(\mathbf{x})\| = \sqrt{2|\Phi(\mathbf{x})|}. \quad (4.4)$$

Se siamo in presenza di un ammasso sferico, in cui tutte le grandezze, a partire dalla densità, sono stratificate su r misurato dal centro, la dipendenza vettoriale della (4.4) sparisce e si ha:

$$\|\mathbf{v}_{esc}(r)\| = \sqrt{2|\Phi(r)|}, \quad (4.5)$$

mentre nel caso di ammasso con energia potenziale costante uguale a Φ_0 in ogni punto, la velocità di fuga diviene semplicemente:

$$\|\mathbf{v}_{esc}\| = \sqrt{2|\Phi_0|}. \quad (4.6)$$

Evidentemente, il fatto che la (4.4) dipenda dal vettore \mathbf{x} , implica che non necessariamente una stella che si trovi in un certo istante di tempo e in un certo punto con la velocità sufficiente, riesca a fuggire lontano dall'ammasso; in generale potrebbe accadere che siccome il potenziale cambia da punto a punto, una stella possieda energia sufficiente alla fuga solo localmente, e quindi in un altro punto dell'ammasso ad un istante successivo la sua velocità ritorni minore di v_{esc} .

In un ammasso in cui il potenziale è costante, invece, l'assunzione che tutte le stelle con velocità maggiori della velocità di fuga lascino il sistema è assolutamente rigorosa, perchè la (4.6) è valida in tutto l'ammasso; l'ipotesi di un potenziale costante, proposta da Spitzer Cfr[1], è la stessa che faremo anche noi nel capitolo successivo e che ci permetterà di valutare il tasso di evaporazione da un ammasso isolato.

Prima di procedere a tale calcolo però, ricaviamo una importante relazione tra la velocità di fuga di un sistema e la velocità media delle sue componenti; dal teorema del viriale (A.10), abbiamo che l'energia cinetica media interna di un sistema isolato, è metà dell'energia $|U|$ necessaria per distruggerlo. Se l'evaporazione rimuove stelle in modo uniforme, l'energia di fuga richiesta per ogni stella diminuisce proporzionalmente alla massa rimanente nel sistema: come risultato, l'energia media di fuga per unità di massa, indicandola con $\langle v_{esc}^2 \rangle / 2$, soddisfa

$$\frac{\langle v_{esc}^2 \rangle}{2} = 2 \frac{|U|}{M}. \quad (4.7)$$

L'energia cinetica media è, per definizione, $M\langle v^2 \rangle/2$, quindi dal teorema del viriale (A.10)

$$2\frac{|U|}{M} = 2\langle v^2 \rangle, \quad (4.8)$$

da cui

$$\langle v_{esc}^2 \rangle = 4\langle v^2 \rangle. \quad (4.9)$$

Capitolo 5

Evaporazione da un ammasso isolato

Si considera un ammasso completamente isolato, in assenza di forze esterne e di dimensione finita, con potenziale costante all'interno, nullo al di fuori e distribuzione Maxwelliana di velocità; si calcola inizialmente la velocità media in una distribuzione di questo tipo e si valuta la percentuale di stelle che hanno velocità maggiore della velocità di fuga. Si imposta l'equazione differenziale per il tasso di evaporazione in unità di tempo, la quale, per essere integrata, necessita di una seconda relazione che tenga conto di come variano le dimensioni del sistema rispetto al numero di componenti: tale equazione è ricavata con considerazioni sull'energia sottratta nella fuga. Il sistema ottenuto è quindi risolto analiticamente.

5.1 Risultati preliminari

Ricaviamo adesso alcune relazioni che saranno di fondamentale importanza per i calcoli successivi.

Abbiamo visto nel capitolo 1, come i profili di brillanza degli ammassi globulari siano compatibili con una distribuzione di densità del tipo Sfera di Plummer.

È utile definire r_h come *il raggio che contiene metà della massa* del sistema; risulta allora da (1.3) la seguente equazione per r_h :

$$M_{tot} \frac{\left(\frac{r_h}{R}\right)^3}{\left[1 + \left(\frac{r_h}{R}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M_{tot}}{2}, \quad (5.1)$$

ed eseguendo i calcoli si ottiene:

$$r_h = \sqrt{\frac{1}{2^{2/3} - 1}} R \simeq 1.30R. \quad (5.2)$$

Dalla (5.2), ricaviamo che:

$$\frac{r_h(t)}{r_h(0)} = \frac{R(t)}{R(0)}. \quad (5.3)$$

Analogamente ad r_h , si usa definire anche un *tempo di rilassamento di metà massa* t_{rh} , cioè il tempo necessario a rilassare metà della massa del sistema.

Esso è espresso dalla seguente equazione Cfr[1]:

$$t_{rh} = \frac{0.138}{\ln \Lambda} \sqrt{\frac{N r_h^3}{Gm}}. \quad (5.4)$$

E' chiaro che, a causa del processo di evaporazione e della conseguente variazione di N ed R , t_{rh} dipende implicitamente dal tempo attraverso tali grandezze; dunque si avrà:

$$\frac{t_{rh}(t)}{t_{rh}(0)} = \sqrt{\frac{N(t)}{N(0)}} \sqrt{\left[\frac{r_h(t)}{r_h(0)}\right]^3}. \quad (5.5)$$

Poichè la massa media \bar{m} non cambia

$$\frac{\bar{m}(t)}{\bar{m}(0)} = 1, \quad (5.6)$$

dalla relazione $M = \bar{m}N$ possiamo scrivere:

$$\frac{N(t)}{N(0)} \frac{N(0)}{N(t)} = 1 \implies \frac{N(t)}{N(0)} = \frac{M(t)}{M(0)} \quad (5.7)$$

Il che formalizza il fatto intuitivo che, in questa approssimazione, la massa del sistema e il numero delle sue componenti variano con lo stesso rate; si noti che nel caso in cui si considerasse l'ammasso con il suo spettro di massa, la (5.7) non sarebbe più valida, perchè a causa dell'equipartizione, solo le stelle meno massive lasciano l'ammasso; questo fa sì che mentre la perdita in componenti può diventare importante, la perdita di massa ha un rate decisamente minore, perchè le stelle che evaporano portano un contributo piccolo alla massa totale.

Questi risultati preliminari sono necessari per i calcoli nella sezione 5.4.

5.2 Velocità media e velocità di fuga in una distribuzione Maxwelliana

Consideriamo una distribuzione Maxwelliana di velocità, la cui funzione analitica è la seguente Cfr[1]:

$$F(v) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^3}} e^{-v^2/2\sigma^2}, \quad (5.8)$$

dove σ rappresenta la dispersione di velocità attorno al valor medio.

La (5.8), integrata su tutto lo spazio delle velocità, fornisce la probabilità totale che una stella abbia velocità compresa tra 0 e $+\infty$ e quindi, per definizione, il valore 1.

Essendo la distribuzione Maxwelliana isotropa nelle velocità, tale condizione di normalizzazione può essere posta in coordinate sferiche, e si ottiene:

$$4\pi \int_0^{+\infty} v^2 F(v) dv = 1. \quad (5.9)$$

Dalla (5.9), si ricava immediatamente che la probabilità che una stella abbia velocità compresa tra v e $v + dv$ è

$$F(v)dv = \frac{4\pi}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^3}} v^2 e^{-v^2/2\sigma^2} dv, \quad (5.10)$$

che può essere considerata effettivamente anche nel senso di frazione numerica di stelle rispetto alla totalità delle componenti.

Abbiamo visto in precedenza come valga la relazione $\langle v_{esc}^2 \rangle = 4 \langle v^2 \rangle$, con $\langle v^2 \rangle$ velocità quadratica media della funzione di distribuzione; appare quindi necessario calcolare preventivamente il valore di $\langle v^2 \rangle$ per la nostra distribuzione.

Da definizione, si tratta di calcolare il momento di ordine due della Maxwelliana, cioè:

$$\langle v^2 \rangle \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^3}} \int_0^{+\infty} v^4 e^{-v^2/2\sigma^2} dv = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sigma^2 \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx, \quad (5.11)$$

dove l'ultimo integrale si è ottenuto con la sostituzione $v/\sqrt{2}\sigma = x$.

Utilizzando la definizione di *momento di ordine n* della distribuzione Gaussiana

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-ax^2} dx, \quad (5.12)$$

considerando che l'integrando è simmetrico rispetto a 0 se n è pari, e facendo uso delle formule Cfr[4, p.743]:

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \\
\mu_{2n+1} &= 0, \\
\mu_{2n} &= (2n-1)!! \sqrt{\frac{\pi}{a}} (2a)^{-n},
\end{aligned} \tag{5.13}$$

otteniamo che

$$\langle v^2 \rangle = 3\sigma^2. \tag{5.14}$$

Pertanto, il valore della velocità di fuga è

$$v_{esc} = 2\langle v^2 \rangle^{1/2} = 2\sqrt{3}\sigma. \tag{5.15}$$

5.3 Frazione di stelle con velocità maggiore della velocità di fuga

La frazione di stelle con velocità compresa tra la velocità di fuga e $+\infty$ che indichiamo con ξ_e , è fornita dal seguente integrale:

$$\xi_e = \frac{4\pi}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^3}} \int_{v_{esc}}^{+\infty} v^2 e^{-v^2/2\sigma^2} dv; \tag{5.16}$$

con il risultato ottenuto in (5.15) e la sostituzione già utilizzata sopra si trova

$$\xi_e = \frac{4\pi}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^3}} \int_{2\sqrt{3}\sigma}^{+\infty} v^2 e^{-v^2/2\sigma^2} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{6}}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx. \tag{5.17}$$

Notiamo come ξ_e non dipenda dai parametri del sistema ma solo dalla forma della distribuzione; è quindi quest'ultima che contiene in sé tutto il risultato.

L'integrale (5.17) ha come primitiva:

$$\int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{4}(\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x) - 2xe^{-x^2}) + \text{const}, \quad (5.18)$$

dove con $\operatorname{erf}(x)$ abbiamo indicato la *funzione degli errori di Gauss*, definita come:

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (5.19)$$

Dunque otteniamo

$$\xi_e = \left[\frac{1}{4}(\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x) - 2xe^{-x^2}) \right]_{\sqrt{6}}^{+\infty} \simeq 7.38 \times 10^{-3}. \quad (5.20)$$

5.4 Equazione per l'evaporazione

Adesso che disponiamo della frazione ξ_e , calcoliamo il tasso di evaporazione da un ammasso sotto le seguenti ipotesi:

1. Ammasso completamente isolato, non vi sono forze esterne.
2. Potenziale $\Phi = \Phi_0$ costante all'interno dell'ammasso, e $\Phi = 0$ al di fuori.
3. Simmetria sferica dell'ammasso.
4. Densità numerica di stelle uniforme.

Grazie all'ipotesi 2, come abbiamo già visto in (4.6), possiamo asserire senza alcuna approssimazione che tutte le stelle che fanno parte della frazione ξ_e fuggono dall'ammasso; quindi si ha, in totale, una quantità $\xi_e N$ di stelle con velocità maggiore della velocità di fuga.

Fatta questa considerazione, per costruire l'equazione del tasso di evaporazione, analizziamone il meccanismo nelle sue singole fasi, facendo alcune considerazioni:

1. L'ammasso espelle inizialmente $\xi_e N$ componenti.
2. Il tempo necessario al sistema per raggiungere una funzione di distribuzione Maxwelliana è, per definizione, t_{relax} .
3. Rigenerata la Maxwelliana, altre $\xi_e N$ stelle vengono espulse.

E così via; in questo modello semplificato, tale processo continua fino al completo disfacimento dell'ammasso.

In base alle ultime considerazioni, possiamo quindi proporre:

il sistema espelle $\xi_e N$ componenti ogni tempo di rilassamento t_{relax} .

Dunque N soddisfa l'equazione:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{\xi_e N(t)}{t_{relax}}. \quad (5.21)$$

in cui il segno meno è coerente col fatto che il sistema perde componenti, e quindi N è una funzione decrescente col tempo.

Nella (5.21), t_{relax} dipende dal tempo attraverso N ; l'idea è quella di levarsi di mezzo la dipendenza dal tempo di t_{relax} scaricandola sulla dimensione R dell'ammasso, utilizzando come tempo di rilassamento quello definito per metà massa in (5.4); sostituendo, si ha:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{\xi_e N(0)}{t_{rh}(0)} \left[\frac{R(0)}{R(t)} \right]^{3/2} \left[\frac{N(t)}{N(0)} \right]^{1/2}. \quad (5.22)$$

Adesso la dipendenza da t è racchiusa in R , pertanto si rende necessaria una seconda equazione che metta in relazione R con N ; tale legame, lo si può trovare considerando l'energia sottratta al sistema nell'evaporazione. L'energia totale dell'ammasso è stata da noi definita come:

ENERGIA PER UNITA DI MASSA \times MASSA TOTALE DEL SISTEMA

cioè $E_{tot} = M E_m$.

Siccome però abbiamo considerato una massa media, possiamo scrivere:

$$E_{tot} = N \bar{m} E_m \quad (5.23)$$

Quindi $\bar{m} E_m$ è l'energia totale di ogni singola stella all'interno dell'ammasso.

Quando una stella fugge arriva all'infinito, pertanto sottrae all'ammasso una frazione dell'energia che possiede $\bar{m} E_m$, frazione che indichiamo con ζ e supponiamo essere la stessa per ogni stella che fugge.

Se $\xi_e N$ è il numero totale di stelle che lasciano il sistema ad ogni tempo di rilassamento risulta che:

il sistema perde una quantità $\zeta \xi_e N \bar{m} E_m$ di energia totale ogni tempo di rilassamento t_{relax} .

Quindi l'equazione per l'energia, in analogia alla (5.21) è:

$$\frac{dE_{tot}(t)}{dt} = \frac{\zeta \xi_e N(t)}{t_{relax}} \bar{m} E_m. \quad (5.24)$$

Notiamo che poichè l'ammasso è un sistema legato, E_m è negativa; con l'evaporazione, si porta via energia cinetica, quindi una quantità positiva di energia, concordemente al fatto che si rende "meno negativa" l'energia totale E_{tot} del sistema: come risultato anche ζ sarà negativo.

Inoltre, siccome abbiamo detto che l'energia sottratta da ogni stella che fugge non è tutta l'energia ad essa associata, ζ è in modulo minore di 1.

Sostituendo a secondo membro della (5.24) la (5.21) e sapendo che $E_m = E_{tot}/N\bar{m}$, possiamo riscrivere l'equazione dell'energia come:

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = -\frac{\zeta E_{tot}}{N} \frac{dN(t)}{dt}. \quad (5.25)$$

Sostituendo ora $E_{tot} = M^2/R = \bar{m}^2 N^2/R$ si ottiene:

$$\frac{(2 - \zeta)}{N} \frac{dN}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}. \quad (5.26)$$

Nel complesso dunque, il problema dell'evaporazione in questo modello semplice si riduce alla risoluzione del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie accoppiate:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = -\frac{\xi_e N(0)}{t_{rh}(0)} \left[\frac{R(0)}{R(t)} \right]^{3/2} \left[\frac{N(t)}{N(0)} \right]^{1/2}, \\ \frac{(2 - \zeta)}{N} \frac{dN}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}. \end{cases} \quad (5.27)$$

Separando le variabili nella seconda delle (5.27) e integrando si ha:

$$\frac{R(t)}{R(0)} = \left[\frac{N(t)}{N(0)} \right]^{2-\zeta}. \quad (5.28)$$

Possiamo quindi sostituire nella prima ottenendo:

$$\frac{dN}{dt} = -\xi_e \frac{N(0)}{t_{rh}(0)} \left[\frac{N}{N(0)} \right]^{(3\zeta-5)/2}. \quad (5.29)$$

Integriamo quindi la (5.29) dal tempo $t = 0$ al tempo t generico e otteniamo la soluzione:

$$N(t) = N(0) \left[1 - \frac{(7-3\zeta)\xi_e}{2t_{rh}(0)} t \right]^{2/(7-3\zeta)}, \quad (5.30)$$

da cui si vede che il tempo impiegato dal sistema per evaporare completamente si ricava imponendo

$$N(t) = 0 \implies \left[1 - \frac{(7-3\zeta)\xi_e}{2t_{rh}(0)} t \right] = 0. \quad (5.31)$$

Dalla (5.31) definiamo, quindi

$$t_{evap} \equiv \frac{2}{(7-3\zeta)\xi_e} t_{rh}(0). \quad (5.32)$$

Siccome ζ è negativo, per ogni suo valore possiamo asserire che sia l'esponente che la quantità $(7-3\zeta)\xi_e/2t_{rh}(0)$ sono di segno positivo; questo implica che il rapporto $N(t)/N(0)$ è minore di uno, il che comporta dalla (5.28) che *il sistema si contrae durante l'evaporazione*, risultato già anticipato in precedenza e qui ricavato per via analitica.

La soluzione per R , si ricava quindi sostituendo la (5.30) in (5.28), ottenendo

$$R(t) = R(0) \left[1 - \frac{t}{t_{evap}} \right]^{(4-2\zeta)/(7-3\zeta)}. \quad (5.33)$$

Nelle pagine seguenti sono mostrati i grafici delle soluzioni per N ed R per un fissato valore di ζ , che in questo caso è $\zeta = -0.3$.

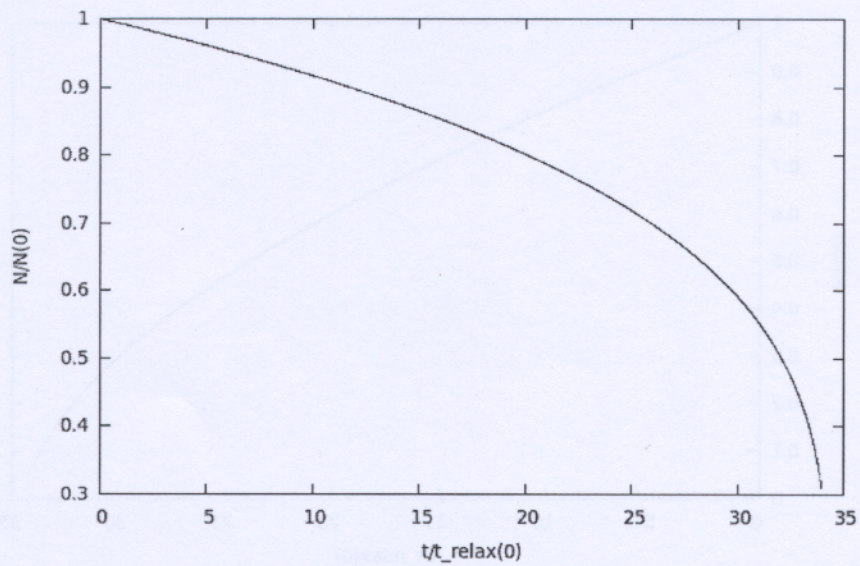


Figura 5.1: Soluzione per il numero di componenti in funzione del tempo. Da notare come l'ammasso impieghi relativamente molto tempo a dimezzare il numero di stelle; dopo il dimezzamento la decrescita appare molto più rapida.

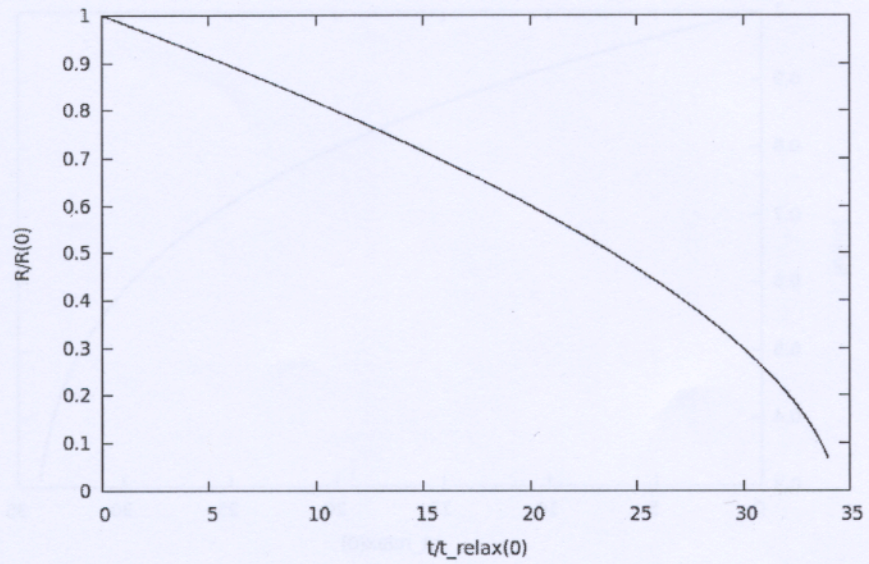


Figura 5.2: Soluzione per il raggio del sistema in funzione del tempo. In questo caso la legge di potenza è più rapida di un fattore maggiore di 2 all'esponente; la decrescita è infatti più rapida rispetto al numero di stelle.

La densità diverge evidentemente con legge di potenza visto che $n \propto N/R^3$ e dalla (5.28) $N \propto R^{-2-|\zeta|}$, quindi $n \propto R^{-5-|\zeta|}$, da cui al diminuire di R segue un aumento di n .

Più precisamente, facendo sempre uso della (5.28) e considerando che $n = 3N/(4\pi R^3)$, abbiamo

$$n(t) = n(0) \left[1 - \frac{t}{t_{evap}} \right]^{(6\zeta-10)/(7-3\zeta)} \quad (5.34)$$

Anche il quadrato della velocità media diverge, infatti:

$$\frac{1}{2}N\langle v^2 \rangle \propto \frac{N^2}{R}, \quad (5.35)$$

da cui

$$\frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v(0)^2 \rangle} = \left[\frac{N(t)}{N(0)} \right]^{\zeta-1}, \quad (5.36)$$

e quindi

$$\langle v^2 \rangle = \langle v(0)^2 \rangle \left[1 - \frac{t}{t_{evap}} \right]^{(2\zeta-2)/(7-3\zeta)} \quad (5.37)$$

Pertanto, l'energia cinetica media per unità di massa aumenta man mano che il sistema perde massa e si contrae.

Per n e $\langle v \rangle$, le soluzioni sono mostrate in figura 4.3 e 4.4.

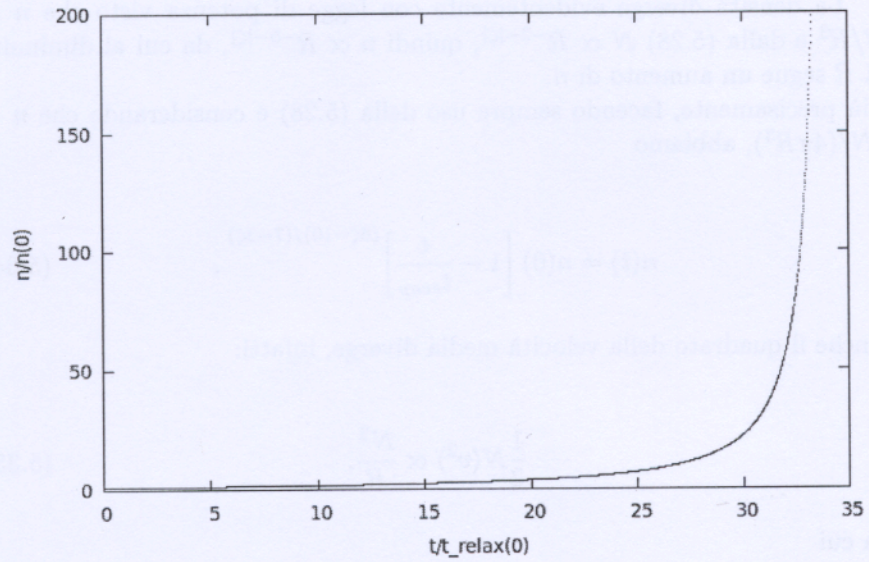


Figura 5.3: Soluzione per la densità numerica; la soluzione è rappresentata solo fino a $n/n(0) = 200$, poichè in realtà essa diverge quando le dimensioni dell'ammasso vanno a zero. Dalle figure precedenti risulta come l'ammasso evapori completamente dopo circa 35 tempi di rilassamento iniziali: si noti come dopo 30 tempi di rilassamento la densità sia circa 20 volte maggiore di quella iniziale.

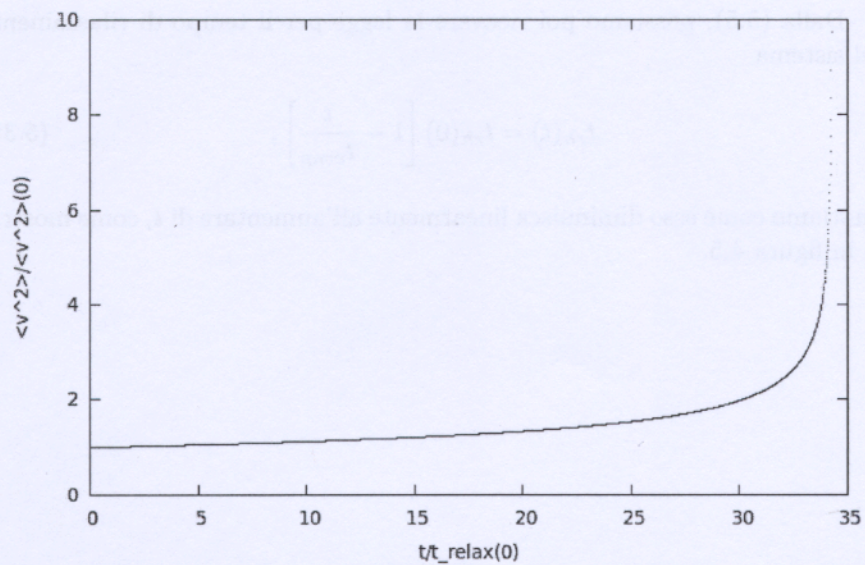


Figura 5.4: Soluzione per la velocità quadratica media. Anche in questo caso tale grandezza diverge, e risulta essere quasi raddoppiata dopo 30 tempi di rilassamento iniziali.

Dalla (5.5), possiamo poi ricavare la legge per il tempo di rilassamento del sistema

$$t_{rh}(t) = t_{rh}(0) \left[1 - \frac{t}{t_{evap}} \right], \quad (5.38)$$

e notiamo come esso diminuisca linearmente all'aumentare di t , come mostrato in figura 4.5.



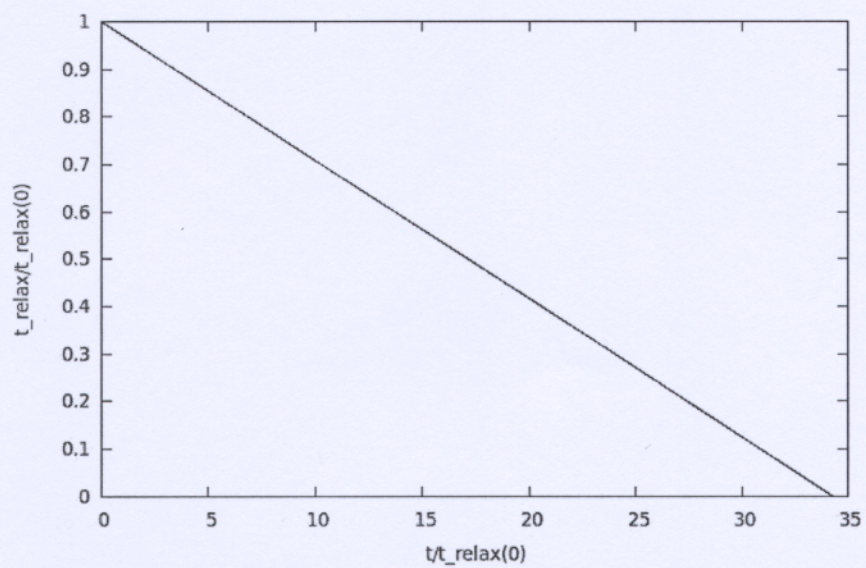


Figura 5.5: Andamento lineare del tempo di rilassamento del sistema, il quale risulta dimezzato dopo poco più di 15 tempi di rilassamento iniziali.

Capitolo 6

Evaporazione con forze mareali

Si effettua un calcolo concettualmente identico a quello eseguito nel capitolo precedente, considerando però l'ammasso non più isolato ma soggetto alle forze mareali della galassia.

Si introduce quindi il raggio di taglio r_t oltre il quale si ha un troncamento del sistema dovuto alle forze sopra menzionate; si ricava la frazione di stelle con energia sufficiente per mantenersi in un'orbita a distanza maggiore di r_t , e si ottiene che tale numero è considerevolmente maggiore rispetto al caso di ammasso isolato, con la conseguenza che anche il tasso di evaporazione sarà più importante.

6.1 Forze mareali e tidal radius

Sebbene abbia un valore didattico, il modello dell'ammasso isolato non è un caso che nella realtà possa risultare verosimile.

Un'ammasso reale è in generale soggetto a forze esterne di tipo mareale, dovute alla galassia in cui orbita, le quali sono dirette lungo la congiungente tra il centro galattico e l'ammasso considerato.

Se consideriamo la galassia come un punto di massa M_G alla distanza R_G dal centro dell'ammasso, l'accelerazione dovuta alla forza di marea è espressa da Cfr[1]

$$a_t = 2G \frac{M_G r}{R_G^3}; \quad (6.1)$$

se definiamo il *tidal radius* come la distanza r_t alla quale la forza di marea agente su una stella dell'ammasso eguaglia quella dovuta all'ammasso stesso (considerato come un punto di massa M_C), si ha per definizione

$$G \frac{M_C}{r_t^2} \equiv 2G \frac{M_G r_t}{R_G^3}, \quad (6.2)$$

da cui

$$r_t^3 = \frac{M_C}{2M_G} R_G^3. \quad (6.3)$$

Quindi, per come abbiamo definito r_t , esso rappresenta un raggio di taglio oltre il quale la forza di attrazione della galassia sulle stelle dell'ammasso diventa importante.

6.2 Frazione di stelle interessate dall'evaporazione

Considerando il teorema del viriale (A.10):

$$2T = -W \approx 0.4G \frac{M^2}{r_h} \quad (6.4)$$

dove $-W$ è l'energia richiesta per distruggere il sistema.
Coerentemente con la (6.4):

$$\frac{T}{M} \approx 0.2G \frac{M}{r_h} = \frac{\langle v^2 \rangle}{2} \quad (6.5)$$

Sappiamo però che $\langle v_{esc}^2 \rangle \simeq 4\langle v^2 \rangle$, quindi l'energia cinetica media per unità di massa richiesta per la fuga è:

$$\langle T_{esc} \rangle = \frac{1}{2} \langle v_{esc}^2 \rangle \approx 0.8G \frac{M}{r_h}. \quad (6.6)$$

A questo punto confrontiamo l'energia di una stella al tidal radius con l'energia richiesta per la fuga espressa in (6.6):

$$G \frac{M}{r_t} / 0.8G \frac{M}{r_h} = \frac{5r_h}{4r_t} \equiv \gamma. \quad (6.7)$$

Siccome un valore tipico è [1, p.58] $r_h/r_t = 0.145$, si ha $\gamma \simeq 0.18$.

Come abbiamo visto nel capitolo 5, ξ_e è funzione del rapporto $\langle v_{esc}^2 \rangle / \langle v^2 \rangle$, che con questo valore di γ non è più 4 ma 3.3.

A questo punto il conto è identico a quello fatto per un ammasso isolato, salvo l'estremo inferiore di integrazione per ricavare ξ_e ; si ha infatti:

$$\xi_e = \frac{4\pi}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^3}} \int_{\sqrt{3.3}\sqrt{3}\sigma}^{+\infty} v^2 e^{-v^2/2\sigma^2} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{3.3}\sqrt{\frac{3}{2}}}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx, \quad (6.8)$$

e dunque

$$\xi_e = \left[\frac{1}{4} (\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x) - 2xe^{-x^2}) \right]_{\sqrt{3.3}\sqrt{\frac{3}{2}}}^{+\infty} \simeq 2 \times 10^{-2}. \quad (6.9)$$

É ovvio che anche questo risultato è ottenuto con approssimazione; ci basti notare come il rate di evaporazione in presenza di campi mareali sia maggiore di quasi un fattore 3 rispetto al caso di ammasso isolato.

6.3 Evoluzione del sistema

Ci chiediamo ora come avvenga l'evoluzione del sistema con il campo mareale considerato.

Le considerazioni fatte nel capitolo 5 per ricavare l'equazione differenziale (5.21), non sono mutate, dunque tale equazione rimane valida.

Dalla (6.3) notiamo che al variare della massa del cluster, varia anche r_t ; inoltre:

$$\frac{M_c}{r_t^3} = 2 \frac{M_G}{R_G^3}, \quad (6.10)$$

il che significa che la densità media dell'ammasso dentro alla sfera di raggio r_t è uguale al doppio della densità media dentro ad una sfera di raggio R_G ottenuta con la massa della galassia M_G ; poiché sia R_G che M_G sono costanti, deduciamo che: *l'evoluzione dell'ammasso avviene a densità costante.*

Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{N(t)}{r_t(t)^3} = \frac{N(0)}{r_t(0)^3} \Rightarrow \frac{r_t(t)}{r_t(0)} = \left[\frac{N(t)}{N(0)} \right]^{1/3}. \quad (6.11)$$

Sostituendo la (6.11) nel membro destro di (5.21), otteniamo che esso non dipende dal tempo; separando le variabili e integrando

$$\int_{N(0)}^{N(t)} dN' = -\frac{\xi_e}{t_{rh}(0)} N(0) \int_0^t dt', \quad (6.12)$$

otteniamo

$$N(t) = N(0) \left[1 - \frac{\xi_e}{t_{rh}(0)} t \right] \equiv \left[1 - \frac{t}{t_{evap}} \right], \quad (6.13)$$

dove in questo caso abbiamo definito

$$t_{evap} \equiv \frac{t_{rh}(0)}{\xi_e}. \quad (6.14)$$

Dalla (6.13) e dalla (6.11), considerando la proporzionalità diretta tra r_t ed r_h e quindi quella tra r_h e R , possiamo esplicitare la soluzione per le dimensioni del sistema

$$R(t) = R(0) \left[1 - \frac{t}{t_{evap}} \right]^{1/3}. \quad (6.15)$$

Per la soluzione della velocità media utilizziamo la (6.5), e otteniamo:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v^2 \rangle(0) \left[1 - \frac{t}{t_{evap}} \right]^{2/3}. \quad (6.16)$$

Infine, si noti che anche qui la decrescita del tempo di rilassamento è lineare nel tempo, come nel caso di ammasso isolato, e soddisfa

$$t_{rh}(t) = t_{rh}(0) \left[1 - \frac{t}{t_{evap}} \right]. \quad (6.17)$$

Conclusioni

L'obbiettivo di questo lavoro è stato quello di avvicinarsi ad un argomento estremamente affascinante, quanto complesso, come è l'evaporazione gravitazionale negli ammassi globulari, del quale non vengono forniti dettagli durante il corso di studi triennale.

Sebbene una trattazione rigorosa richieda l'uso di un apparato matematico che esula dagli argomenti del corso di Laurea Triennale, seguendo l'approccio di Spitzer è possibile ottenere risultati soddisfacenti con l'uso di mezzi elementari.

Del lavoro di Spitzer, si è preferito considerare solo quella parte che fosse commisurata all'impegno e agli obbiettivi richiesti da una tesi di laurea triennale, con la consapevolezza che, all'approssimazione dei risultati ottenuti, fa da contrappunto il valore didattico, per chi scrive, del lavoro svolto.

Appendice A

Teorema del Viriale

Di seguito si fornisce una dimostrazione del Teorema del Viriale; a questo scopo, dobbiamo prima introdurre alcuni risultati preliminari.

Cominciamo con il dare la seguente:

Definizione 4. :

Siano $\alpha, k \in \mathbb{R}$, con $\alpha > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

*Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **omogenea di grado k** , se:*

$$f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n).$$

Esiste un importante risultato sulle funzioni omogenee dovuto ad Eulero:

Teorema 2 (di Eulero sulle funzioni omogenee). :

Sia $A \in \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Allora f è omogenea di grado k se e soltanto se:

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = k f(\mathbf{x}). \quad \square$$

Supponiamo di avere una funzione del tempo $f(t)$ e di voler calcolare il suo valore medio; faremo uso della seguente:

Definizione 5. :

*Si chiama **valor medio** di una funzione del tempo $f(t)$ l'integrale:*

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt \quad (\text{A.1})$$

Dalla definizione (A.1), notiamo che se $F(t)$ è una funzione limitata tale che $f(t)$ è la sua derivata rispetto al tempo, abbiamo:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF(t)}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0; \quad (\text{A.2})$$

abbiamo così provato la seguente:

Proposizione 3. :

il valore medio nel tempo della derivata di una funzione limitata è uguale a zero.

Utilizzando ora i risultati ottenuti, possiamo finalmente enunciare e dimostrare il

Teorema 3 (del Viriale). *Se l'energia potenziale di un sistema è una funzione omogenea delle coordinate e il moto avviene in una regione limitata dello spazio, esiste sempre una relazione semplice tra i valori medi nel tempo dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.*

Dimostrazione. L'energia cinetica è una funzione omogenea di grado $k = 2$ nelle velocità, pertanto, dal Teorema di Eulero:

$$\langle \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} T, \dot{\mathbf{x}} \rangle = 2T. \quad (\text{A.3})$$

Siccome $\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} T = \mathbf{p}$, con \mathbf{p} *impulso* del sistema,

$$\langle \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} T, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{x}} \rangle. \quad (\text{A.4})$$

Inoltre, dalla regola di derivazione del prodotto scalare, si ha che:

$$\langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \frac{d}{dt} (\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle) - \langle \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{x} \rangle, \quad (\text{A.5})$$

e quindi

$$2T = \frac{d}{dt} (\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle) - \langle \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{x} \rangle. \quad (\text{A.6})$$

Poichè, per ipotesi, il moto del sistema è limitato, il termine $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle$ è pure limitato, quindi dalla (A.2), il suo valore medio si annulla.

Risulta pertanto:

$$2\overline{T} = -\overline{\langle \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{x} \rangle}. \quad (\text{A.7})$$

Il secondo membro della (A.7) è chiamato *viriale* del sistema.

Conformemente alle equazioni di Newton, indicando con $U(\mathbf{x})$ l'energia potenziale del sistema, segue che $\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{x}}U(\mathbf{x})$; quindi sostituendo in (A.7):

$$2\overline{T} = \overline{\langle \nabla_{\mathbf{x}}U(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle}. \quad (\text{A.8})$$

Per ipotesi, l'energia potenziale è una funzione omogenea di grado k delle coordinate, quindi il teorema di Eulero fornisce:

$$2\overline{T} = k\overline{U}. \quad (\text{A.9})$$

□

La (A.9) è nota come *Teorema del Viriale*.

Per il campo gravitazionale $k = -1$, da cui:

$$2\overline{T} = -\overline{U} \quad (\text{A.10})$$

Possiamo anche ricavare dalla (A.9), le relazioni che legano \overline{T} ed \overline{U} all'energia totale \overline{E} ; poichè $\overline{T} + \overline{U} = \overline{E}$, troviamo:

$$\overline{U} = \frac{2}{k+2}\overline{E}, \quad \overline{T} = \frac{k}{k+2}\overline{E}, \quad (\text{A.11})$$

da cui, per l'interazione Newtoniana, $\overline{E} = -\overline{T}$, conformemente al fatto che in un campo di gravità il moto avviene in una regione finita dello spazio solo se l'energia totale è negativa.

Appendice B

Tempo di rilassamento a due corpi in approssimazione impulsiva

Prendiamo un sistema con densità particellare N . Tra la totalità delle particelle, scegliamo una massa test m_t e supponiamo che le restanti particelle di campo abbiano masse uguali m_f .

Supponiamo di lanciare m_t all'interno del sistema con velocità iniziale \mathbf{v}_t , e studiamo la variazione della velocità della particella di test, in direzione perpendicolare alla velocità relativa iniziale: tale oggetto lo indichiamo con $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$.

Il motivo del nostro interesse, come spiegato nella sezione 4.1, è collegato alla valutazione del riscaldamento perpendicolare della particella m_t , dovuto al processo diffusivo nello spazio delle fasi.

La situazione per ogni interazione, è schematizzata in figura B.1:

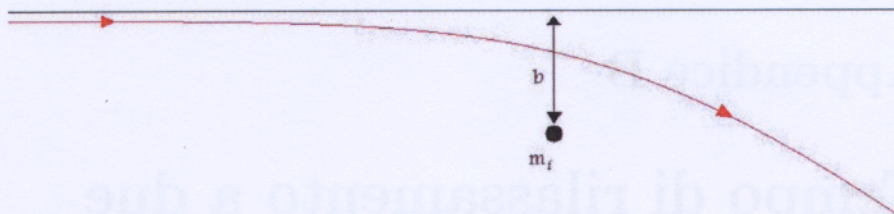


Figura B.1: Schematizzazione di un singolo incontro: la retta nera rappresenta l'asintoto del ramo d'iperbole che la massa m_t percorre entrando nell'orbita, mentre l'altro asintoto non è disegnato per non appesantire la figura. Con le frecce si indica il verso di percorrenza della traiettoria iperbolica. La quantità b rappresenta il parametro d'impatto, il cui significato è spiegato successivamente.

Nella figura abbiamo indicato con b la distanza alla quale passerebbero le due particelle se non vi fosse alcuna interazione; b è chiamato *parametro d'impatto*. È immediato verificare che per le interazioni repulsive, la distanza effettiva minima alla quale passano i due corpi è maggiore del parametro d'impatto, mentre per le interazioni attrattive vale il contrario.

Concentriamoci ora sulla variazione della velocità sperimentata dalla massa di test.

Da (2.24), troviamo:

$$\Delta \mathbf{v}_t = \frac{\mu}{m_t} \Delta \mathbf{v}, \quad (\text{B.1})$$

dove \mathbf{v} è la velocità relativa.

Per la direzione perpendicolare quindi, vale:

$$(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp = \frac{\mu}{m_t} (\Delta \mathbf{v})_\perp \quad (\text{B.2})$$

e tale identità è rigorosa.

A questo punto, introduciamo la cosiddetta *approssimazione impulsiva*, o *approccio asintotico* a cui si arriva attraverso il percorso concettuale illustrato di seguito.

La massa m_t subisce una variazione $(\Delta v_t)_\perp$ e quindi una variazione di impulso Δp . Possiamo ragionevolmente proporre che

$$\Delta p \sim F \Delta t, \quad (\text{B.3})$$

cioè che la variazione dell'impulso è prodotta dalla forza agente per un determinato intervallo di tempo.

Tale forza è la forza di gravità, che nell'approssimazione da noi fatta viene congelata al momento in cui le due particelle si trovano a distanza b , uguale al parametro d'impatto.

Pertanto poniamo:

$$\mu (\Delta v)_\perp \sim G \frac{m_t m_f}{b^2} \Delta t. \quad (\text{B.4})$$

A questo punto ci occorre una stima di Δt ; secondo l'approccio asintotico sarebbe logico porre $\Delta t \sim b/v$, in realtà, a posteriori, si vede che è necessario un intervento correttivo di un fattore 2;

pertanto alla fine:

$$\mu(\Delta v_t)_\perp \sim 2G \frac{m_t m_f}{bv}. \quad (\text{B.5})$$

Abbiamo già sottolineato nella sezione 4.1, come, in presenza di distribuzione di velocità isotropa delle particelle di campo, la somma vettoriale di tutti i singoli $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$ è uguale al vettore nullo, proprio in virtù dell'isotropia del sistema.

Abbiamo però anche messo in evidenza l'interesse per la norma al quadrato di questo vettore, collegato chiaramente all'energia cinetica.

In base alla (B.5) e alla (B.2), si ha

$$(\Delta v_t^2)_\perp = \frac{\mu^2}{m_t^2} (\Delta v^2)_\perp = \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 v^2}. \quad (\text{B.6})$$

La (B.6) vale per il singolo urto, pertanto occorrerà valutare il numero di urti dn con particelle che hanno parametro d'impatto compreso tra b e $b + db$ e successivamente integrare per avere il contributo del sistema nella sua interezza.

Consideriamo un cilindro di raggio b e spessore db e interessiamoci solo agli incontri con velocità relativa v ; chiamando con $f(v_f)$ la distribuzione di velocità delle particelle di campo, otteniamo:

$$dn = N \, 2\pi \, b \, db \, v \, dt \, f(v_f) \, d^3 \mathbf{v}_f, \quad (\text{B.7})$$

dove $2\pi \, b \, db \, v \, dt$ è il volume del cilindro in cui avviene un numero infinitesimo di incontri, $f(v_f) \, d^3 \mathbf{v}_f$ è il numero di particelle per unità di volume con velocità compresa in una direzione tra v_f e $v_f + dv_f$.

A questo punto moltiplichiamo la (B.6) per il numero di urti trovato in (B.7):

$$(\Delta v_t^2)_\perp dn = \frac{8\pi N G^2 m_f^2}{bv} f(v_f) d^3 v_f \, db \, dt. \quad (\text{B.8})$$

Adesso dobbiamo integrare su tutti i b tra 0 e $+\infty$ e su tutte le velocità in \mathbb{R}^3 .

Notiamo innanzi tutto che l'integrale su b diverge in entrambe gli estremi; la divergenza a 0 prende il nome di *divergenza ultravioletta*, ed è fisicamente dovuta agli urti vicini che variano sostanzialmente la velocità della particella

di test; tale divergenza non rappresenta un ostacolo perchè è frutto dell'approssimazione impulsiva e non comparirebbe in una trattazione rigorosa del problema.

Di diversa origine è, invece, la divergenza a $+\infty$; detta *divergenza infrarossa*, è dovuta al contributo sommato di tutti gli urti lontani che, come già fatto notare nel capitolo 4, risulta alla fine preponderante.

Se la divergenza ultravioletta è curabile inserendo come estremo inferiore dell'integrale quello che risulterebbe dalla trattazione non approssimata, la divergenza infrarossa non è curabile in gravità Newtoniana; questo fa sì che si debba inserire come estremo superiore una sorta di distanza di taglio, che impedisce all'integrale di divergere.

Alla fine quindi, l'integrale in b dà $\ln b_{max}/b_{min}$, che è il cosiddetto *logaritmo di Coulomb* e che indichiamo con $\ln \Lambda$; un suo valore tipico è, come vedremo, tra 10 e 15, e può pertanto essere preso 12 come valore rappresentativo.

Rimane infine l'integrale nelle velocità; l'integrando (B.8), dipende dalla velocità v_f anche nella velocità relativa v perchè, per definizione, $v = \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|$. Anche $\ln \Lambda$ dipende dalla distribuzione f e quindi, a rigore, dovrebbe essere compreso nell'integrale; tuttavia, essendo un logaritmo, il suo valore varia estremamente poco al variare dei suoi argomenti, per questo motivo possiamo considerarlo costante.

Si tratta quindi di calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(v_f)}{\|\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_t\|} d^3 \mathbf{v}_f. \quad (\text{B.9})$$

Possiamo eseguire il calcolo sulla base della seguente analogia: l'integrale (B.9), è formalmente identico all'espressione di un potenziale dovuto ad una distribuzione di densità $\rho(\mathbf{x})$, dove però $\rho \equiv f$ e $\mathbf{x} \equiv \mathbf{v}_f$; esattamente come nel caso di un potenziale si ha

$$\phi(\xi) = \text{const} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \xi\|} d^3 \mathbf{x}, \quad (\text{B.10})$$

anche qui definiamo

$$\Psi(\mathbf{v}_t) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(v_f)}{\|\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_t\|} d^3 \mathbf{v}_f, \quad (\text{B.11})$$

e chiamiamo Ψ *Potenziale di Rosenbluth*.

Esattamente come avviene per un potenziale a grandi distanza dalla sorgente di campo, anche il potenziale di Rosenbluth tende a $1/\|\mathbf{v}_t\|$ per grandi

valori di $\|\mathbf{v}_t\|$, cioè quando la massa di test entra nel sistema con velocità elevata; per il momento però, ignoriamo questo aspetto e diciamo che:

$$\sum_{i=1}^{N_{tot}} \|\langle \mathbf{v}_i^2 \rangle\| = 8\pi G^2 m_f^2 N \ln \Lambda \Psi(\mathbf{v}_t) dt. \quad (\text{B.12})$$

Dunque se moltiplichiamo ora per $m_t/2$ e dividiamo per dt , otteniamo una buona stima di dT_{\perp}/dt .

Il nostro scopo è però quello di calcolare il tempo caratteristico di questo processo di riscaldamento perpendicolare; ogni tempo caratteristico τ di qualsiasi processo fisico F , si ricava ponendo:

$$\tau \equiv \frac{F}{dF/dt}. \quad (\text{B.13})$$

Nel nostro caso dunque, abbiamo che

$$t_{relax} \equiv \frac{\|\mathbf{v}_t\|^2}{8\pi G^2 N m_f^2 \ln \Lambda \Psi(\mathbf{v}_t)}. \quad (\text{B.14})$$

Se adesso teniamo in conto la considerazione fatta precedentemente sul potenziale di Rosenbluth, ricaviamo l'espressione del tempo di rilassamento come introdotta in (4.1), considerando che la velocità della particella di test può essere presa come velocità media di riferimento per tutto il sistema.

Dunque si ha:

$$t_{relax} = \frac{\langle v \rangle^3}{8\pi G^2 N m_f^2 \ln \Lambda}. \quad (\text{B.15})$$

Dalla (B.15), possiamo ricavare un'espressione alternativa per il tempo di rilassamento, esprimendo tutte le quantità in funzione del solo numero N_{tot} di componenti del sistema.

Consideriamo un sistema di N_* stelle con masse tutte uguali m ; sappiamo che $\langle v \rangle = \sigma$, dove con σ indichiamo la dispersione di velocità del sistema. Siano inoltre R le dimensioni dell'ammasso: dal Teorema del Viriale si ha:

$$2 \frac{N_* m}{2} \sigma^2 = G \frac{(N_* m)^2}{R}, \quad (\text{B.16})$$

la quale fornisce

$$\sigma^2 = G \frac{N_* m}{R}. \quad (\text{B.17})$$

Ora cerchiamo di valutare $\ln \Lambda$. Dal problema dei due corpi, posso considerare come b_{min} , la distanza tale per cui l'urto genera una deviazione di $\pi/2$, e quindi

$$G \frac{2m}{b_{min}} = v^2 \equiv \sigma^2, \quad (\text{B.18})$$

da cui, confrontando con (B.17), otteniamo

$$b_{min} = \frac{2R}{N_*}. \quad (\text{B.19})$$

Inoltre, è logico assumere come distanza di taglio della divergenza infrarossa, le dimensioni R del sistema; con questa scelta

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{N_*}{2} \right). \quad (\text{B.20})$$

Considerando che $N = 3N_*/4\pi R^3$, otteniamo

$$t_{relax} = \frac{\sigma^3 R^3}{6G^2 N_* m^2 \ln(0.5N_*)}. \quad (\text{B.21})$$

Confrontiamo ora il risultato ottenuto con il tempo di attraversamento t_{cross} ; esso è ben approssimato da $t_{cross} = 2R/\sigma$, dove il fattore 2 tiene conto del fatto che in un'orbita una stella copre il sistema per intero, e non per la sola metà.

Inserendo t_{cross} , l'equazione precedente diventa

$$t_{relax} = \frac{\sigma^4 R^2}{12G^2 N_* m^2 \ln(0.5N_*)}, \quad (\text{B.22})$$

e sostituendovi la (B.17) si ha

$$t_{relax} = \frac{N_*}{12 \ln(0.5N_*)}. \quad (\text{B.23})$$

Possiamo poi utilizzare la relazione approssimata

$$t_{relax} \simeq \frac{0.1N_*}{\ln N_*}, \quad (B.24)$$

dato che $0.5N_* \simeq N_*$ e $1/12 \simeq 0.1$.

La (B.24) è l'espressione del tempo di rilassamento più utilizzata in letteratura.

Bibliografia

- [1] Lyman Spitzer, Jr. *Dynamical Evolution of Globular Clusters*. Princeton University Press, 1987.
- [2] J. Binney, S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 2008.
- [3] J. Binney, M. Merrifield. *Galactic Astronomy*. Princeton University Press, 1998.
- [4] A. Fasano, S. Marini. *Meccanica analitica*. Bollati Boringhieri, 2002.
- [5] L. Ciotti. *Appunti di dinamica stellare*. 2008.

Indice

Introduzione	3
1 Gli ammassi globulari	5
1.1 Panoramica sugli ammassi globulari	6
1.2 Il diagramma Colore-Magnitudine	8
1.2.1 La sequenza principale (MS)	10
1.2.2 Il ramo delle sottogiganti (SGB)	11
1.2.3 Turnoff point (TO) ed età degli ammassi globulari . .	12
1.3 Modello di King, profili di brillantezza e segregazione di massa .	12
1.4 Il modello di Plummer	15
2 Richiami sul problema dei due corpi	17
2.1 Le equazioni del moto nel problema dei due corpi	18
2.2 Leggi di conservazione	19
2.3 Massa ridotta e orbita relativa	22
3 Variazione dell'energia di una stella ad opera di mutue interazioni	25
3.1 Conservazione della velocità sull'orbita relativa	26
3.2 Effetto fionda	29
3.3 Scambi di energia	30
4 L'evaporazione gravitazionale	33
4.1 Teoria cinetica e tempo di rilassamento	34
4.2 Il meccanismo di evaporazione	37
5 Evaporazione da un ammasso isolato	41
5.1 Risultati preliminari	42
5.2 Velocità media e velocità di fuga in una distribuzione Maxwelliana	43
5.3 Frazione di stelle con velocità maggiore della velocità di fuga	45
5.4 Equazione per l'evaporazione	46

6	Evaporazione con forze mareali	59
6.1	Forze mareali e tidal radius	60
6.2	Frazione di stelle interessate dall'evaporazione	60
6.3	Evoluzione del sistema	61
	Conclusioni	65
A	Teorema del Viriale	67
B	Tempo di rilassamento a due corpi in approssimazione impulsiva	71
	Bibliografia	79

Ringraziamenti

Ai miei genitori, grazie ai quali mi è concesso il privilegio di studiare.

A mia sorella, perché ogni suo modo di essere lascia sempre una traccia dentro di me.

Alla mia famiglia, quella numerosa, per non avermi mai fatto sentire solo.

Ai miei compagni di studio, di ieri e di oggi, per non aver mai allungato il passo senza di me.

Ad Erick, per l'assistenza tecnica in un pomeriggio in cui forse avrebbe avuto altro da fare.

Ai miei relatori Luca Ciotti e Carlo Nipoti, per il tempo che mi è stato dedicato.

A Sara, perché con lei i mercoledì esistono eccome.