

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Stabilità di Sistemi Sferici autogravitanti con Forze $r^{-\alpha}$

Relatore:
Prof. Luca Ciotti



Presentata da:
Marco Pacilli

Anno Accademico 2015/2016

Indice

1 Caso Newtoniano	4
1.1 Equazione di Continuità	4
1.2 Potenziale gravitazionale ed equazione di Poisson	6
1.3 Stabilità delle sfere barotropiche	7
1.4 Principio Variazionale di Chandrasekhar	10
2 Caso non-newtoniano: forze $r^{-\alpha}$	12
2.1 Differenze col caso newtoniano	12
2.2 Potenziale per forze $r^{-\alpha}$	14
2.3 Problema $\frac{d\Phi}{dr}$ per forze $r^{-\alpha}$	15
2.4 Stabilità delle sfere barotropiche nella generalizzazione di forze $r^{-\alpha}$	16
2.5 Generalizzazione del Principio Variazionale di Chandrasekhar	19
3 Conclusioni	21
4 Appendice	23
4.1 Teorema della Divergenza	23
4.2 Equazione di Boltzmann senza collisioni	24
4.3 Preliminari matematici	26

Abstract

In questa tesi si è eseguito uno studio preliminare (con risultati positivi) volto a verificare la possibilità di estendere al caso di forze $r^{-\alpha}$ il *Teorema di stabilità di Antonov* per sistemi autogravitanti newtoniani. Tale studio è volto a capire se i risultati di stabilità attualmente noti dipendano dalla speciale natura del campo r^{-2} o se valgono più genericamente per sistemi con forze a lungo range.

Introduzione

È universalmente riconosciuto che la forza di gravità, in regime classico, sia proporzionale a r^{-2} (dove r è la distanza dalla sorgente del campo).

In Astrofisica però, per spiegare fenomeni fisici quali l'andamento delle curve di rotazione del gas nelle galassie a disco, il moto delle galassie all'interno degli ammassi di galassie, la dinamica delle stelle all'interno delle galassie ellittiche, il fenomeno di lente gravitazionale, occorre postulare la *Dark Matter (materia oscura)*.

In ambito astronomico, la molteplicità di sistemi per i quali è necessaria la presenza di materia oscura è così ampia che si può considerare l'esistenza di materia oscura come accertata al di là di ogni possibile dubbio.

È interessante chiedersi però se ci siano versioni alternative alla gravità newtoniana che permettano di escludere l'esistenza della *Dark Matter*.

La prima teoria alternativa alla gravità è il modello **MOND** (*Modified Newtonian Dynamics*) (*Di Cintio, Ciotti, Nipoti, 2013*) il quale però richiede uno studio difficoltoso in quanto in esso, l'analogo de l' *equazione di Poisson* (si tratta dei cosiddetti potenziali di Riesz) (*Di Cintio, Ciotti, Nipoti, 2013*) non è lineare.

Così sono state formulate ulteriori teorie alternative più semplici basate su forze additive $r^{-\alpha}$ (*Di Cintio, Ciotti, Nipoti, 2013*).

Però anche le forze $r^{-\alpha}$, nell'ipotesi di additività , presentano dei problemi: in particolare per $\alpha \neq 2$ non esiste l'analogo de l' *equazione di Poisson*. Questo limita enormemente la possibilità di utilizzare strumenti di calcolo avanzati, come ad esempio espansioni in funzioni ortogonali, etc.

In particolare, utilizzando simulazioni numeriche N-body, si sta studiando la *radial orbital instability* in $r^{-\alpha}$ (*Di Cintio, Ciotti, Nipoti, 2016*). Il risultato empirico interessante è che sfere isotrope sembrano **stabili**. Invece, del caso r^{-2} esiste una spiegazione teorica, basata su un principio variazionale.

Scopo della tesi è il tentativo di inquadrare e vedere fino a che punto la dimostrazione r^{-2} sia estendibile a $r^{-\alpha}$.

In questa tesi si sono ottenuti significativi risultati in proposito e la strada intrapresa sembra promettente per ottenere una dimostrazione rigorosa e completa nel caso di forze $r^{-\alpha}$.

Capitolo 1

Caso Newtoniano

In questo primo capitolo si riassumono i passaggi fondamentali della dimostrazione nel caso r^{-2} , che dovranno poi essere estesi al caso $\alpha \neq 2$.

1.1 Equazione di Continuità

Si considerino stelle che siano sistemi sferici *barotropici*.

Un fluido *barotropico* è un fluido la cui pressione è costante sulle superfici di ugual densità.

Si può pertanto investigare lo studio dei sistemi sferici trattandoli come fluidi.

I criteri, di carattere fisico, più semplici per studiare la stabilità dei sistemi sferici sono basati sullo studio dell'energia.

Segue lo studio del problema attraverso la forma del potenziale gravitazionale (newtoniano, in questa sezione).

Per cominciare è utile introdurre *l'Equazione di Continuità* (*Binney, Tremaine, 1987*) che esprime in forma locale la legge di conservazione della massa del fluido.

Considerando un volume chiuso ed arbitrario V , contenuto in una superficie chiusa S , la massa di un fluido in V è:

$$M(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) d^3x, \quad (1.1)$$

e, se la massa varia nel tempo all'interno del volume,

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d^3x. \quad (1.2)$$

La massa che invece fuoriesce dal volume attraverso la porzione di area d^2S per unità di tempo vale: $\rho \mathbf{v} d^2\mathbf{S}$, con $d^2\mathbf{S} = d^2S \mathbf{n}$ (\mathbf{n} normale alla superficie).

$$\frac{dM(t)}{dt} = - \int_S \rho \mathbf{v} d^2\mathbf{S}. \quad (1.3)$$

Applicando il *Teorema della Divergenza* (vedi Appendice), l'equazione di Continuità è:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) \right] d^3x = 0 \quad (1.4)$$

che deve valere per ogni arbitrario volume di controllo V. Pertanto si ottiene la seguente espressione differenziale per *Equazione di Continuità*:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.5)$$

Si è scelto di partire col parlare di questa equazione, in quanto basilare nello studio dei fluidi e quindi imprescindibile per la costruzione del sistema di equazioni linearizzate di cui ci si servirà in seguito.

1.2 Potenziale gravitazionale ed equazione di Poisson

Se si considera l'attrazione gravitazionale agente su una massa distribuita con densità $\rho(\mathbf{x})$, la forza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ sull'unità di massa nella posizione \mathbf{x} vale:

$$\delta\mathbf{F}(\mathbf{x}) = G \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^3} \delta m(\mathbf{x}') = G \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^3} \rho(\mathbf{x}') \delta^3 \mathbf{x}'. \quad (1.6)$$

Da qui deriva la forza in forma integrale:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (1.7)$$

Poichè $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ è conservativa (come si può immediatamente verificare considerando il rotore di 1.7), esiste un potenziale, che notoriamente è scritto come:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} d^3 \mathbf{x}'. \quad (1.8)$$

Con $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi$.

Dato che il campo gravitazionale newtoniano di una particella è radiale, presa una superficie sferica di raggio a , contenente la massa che genera il campo, si può calcolare il flusso del campo sulla superficie (tenendo conto del valore del versore $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}$):

$$G \int_{S(a)} m \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^3} \mathbf{n} d^2 \mathbf{x} = -Gm \int_{S(a)} \frac{d^2 \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2} = -\frac{Gm}{a^2} 4\pi a^2 = -Gm4\pi. \quad (1.9)$$

Dove il penultimo passaggio è possibile in quanto $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$ è il raggio della superficie considerata. Per il *Teorema della Divergenza* è affermare che:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\text{div}_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{4\pi Gm} = \frac{1}{4\pi} \text{div}_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3}. \quad (1.10)$$

L'ultimo passaggio è ottenuto sostituendo la forma di $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ data dalla 1.7. Adesso è possibile scrivere quanto vale la divergenza di $\mathbf{F}(\mathbf{x})$:

$$\text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -4\pi G \int \rho(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' = -4\pi G \rho(\mathbf{x}). \quad (1.11)$$

Si può ora dedurre l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho(\mathbf{x}). \quad (1.12)$$

1.3 Stabilità delle sfere barotropiche

Si consideri una sfera imperturbata statica ($\mathbf{v}=0$), con profilo radiale di densità decrescente: $\frac{d\rho_0}{dr} < 0$, che si annulla sulla superficie della sfera $\rho_0(r_m) = 0$.

Si tratti ora la sfera come un gas che può compiere trasformazioni barotropiche, ovvero $p(\mathbf{x}, t) = p[\rho(\mathbf{x}, t)]$.

Si può riscrivere la *Seconda Legge di Newton*, in un fluido non viscoso, tenendo conto della pressione sulla superficie che ne racchiude il volume totale e dell'intervento di un potenziale gravitazionale: $M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \int_S pd^2S - M\nabla\Phi$.

Per ipotesi la sfera è imperturbata, quindi usando il *Teorema della Divergenza*, si può scrivere l'equazione di Eulero (*Binney, Tremaine, 1987*) per un sistema sferico:

$$\frac{dP_0}{dr} = -\rho_0 \frac{d\Phi_0}{dr}. \quad (1.13)$$

Siccome $(\frac{d\Phi_0}{dr}) = \frac{GM_0(r)}{r^2} > 0$ (dal *Secondo Teorema di Newton*) ne segue che $(\frac{d\Phi}{d\rho})_0 < 0$, da cui il caso newtoniano permette di affermare che è sempre vero:

$$\frac{dP_0}{d\rho_0} = \rho_0 \left| \frac{d\Phi_0}{d\rho_0} \right|. \quad (1.14)$$

A questo punto si prendano in esame le equazioni linearizzate per un sistema fluido soggetto a piccole perturbazioni che soddisfa le *boundary condition* proprie di una distribuzione sferica imperturbata: (*vedi Appendice, Preliminari Matematici*)

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}) = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla h_1 - \nabla \Phi_1, \quad (1.16)$$

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1, \quad (1.17)$$

$$h_1 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0 \frac{\rho_1}{\rho_0}. \quad (1.18)$$

Su queste equazioni le condizioni a contorno sono indipendenti dal tempo (se una distribuzione stabile è imperturbata, rimane stabile nel tempo):

1. ρ_1 e \mathbf{v}_1 sono finiti a $r = 0$;
2. $P_1 = 0$ a $r = r_m$;
3. Φ_1 è finito a $r = 0$;

4. a $r = r_m$ ho $\Phi_1 \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$.

Si prendono soluzioni di forma armonica (in altre parole, se ne considerano le componenti di Fourier nel tempo):

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\rho_a(\mathbf{r})e^{-i\omega at}], \quad (1.19)$$

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{v}_a(\mathbf{r})e^{-i\omega at}], \quad (1.20)$$

$$\Phi_1(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\Phi_a(\mathbf{r})e^{-i\omega at}], \quad (1.21)$$

$$h_1(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[h_a(\mathbf{r})e^{-i\omega at}]. \quad (1.22)$$

Inserendo le precedenti funzioni nelle equazioni linearizzate per fluidi, è possibile riscrivere le 1.15-1.18 come:

$$-i\omega_a \rho_a + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}_a) = 0, \quad (1.23)$$

$$-i\omega_a \mathbf{v}_a = -\nabla h_a - \nabla \Phi_a, \quad (1.24)$$

$$\nabla^2 \Phi_a = 4\pi G \rho_a, \quad (1.25)$$

$$h_a = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0 \frac{\rho_a}{\rho_0} = - \left(\frac{d\Phi}{d\rho} \right)_0 \rho_a = \left| \frac{d\Phi}{d\rho} \right|_0 \rho_a. \quad (1.26)$$

Dal momento che il sistema è instabile per $\text{Im}(\omega_a) < 0$ (infatti in questo caso le funzioni armoniche consterebbero di un esponenziale reale di esponente positivo) è necessario ora conoscere il valore di ω_a .

Sfruttando un principio variazionale per il set di equazioni 1.23-1.26 e, servendosi della 1.24, si ottiene:

$$i\omega_a \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \nabla(h_a + \Phi_a) d^3 \mathbf{r}, \quad (1.27)$$

Integrando per parti, poichè sia P_a che ρ_0 scompaiono sulla superficie:

$$i\omega_a \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = - \int \nabla(\rho_o \mathbf{v}_b^*)(h_a + \Phi_a) d^3 \mathbf{r}. \quad (1.28)$$

La 1.23 semplifica ulteriormente, in modo da ottenere:

$$i\omega_a \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = i\omega_b^* \int \rho_b^*(h_a + \Phi_a) d^3 \mathbf{r}. \quad (1.29)$$

Sapendo che $h_a = \left. \frac{d\Phi}{d\rho} \right|_0 \rho_a$ e la forma del potenziale $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$, l'equazione diventa:

$$\frac{\omega_a}{\omega_b^*} \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = \int \left. \frac{d\Phi}{d\rho} \right|_0 \rho_b^* \rho_a d^3 \mathbf{r} - G \int \int \frac{\rho_b^*(\mathbf{r}) \rho_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}'. \quad (1.30)$$

A questo punto ci si sofferma su considerazioni di carattere matematico. Si prende la complessa coniugata dell'equazione 1.30, e poi, scambiando tra di loro gli autovalori a e b, si ottiene:

$$\left(\frac{\omega_a}{\omega_b^*} - \frac{\omega_b^*}{\omega_a} \right) \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = 0. \quad (1.31)$$

Si presentano quindi le seguenti possibilità:

- se $a = b$, allora $\omega_a^2 = (\omega_a^*)^2 = (\omega_a^2)^*$ per cui ω^2 è reale. Si separano due casi:
 - $\omega^2 \geq 0$ per cui il modello è stabile ed oscilla con frequenza ω ;
 - $\omega^2 < 0$ per cui $\omega^2 = -\gamma^2$, con $\gamma \in R$, che risulta un modello instabile
- se $a \neq b$ conseguono: $\omega_a = \omega_b$ o $\int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = 0$

In particolare, ponendo $a = b$, si ottiene la fondamentale identità (ottenuta da *Binney-Tremaine*) per il caso r^{-2} . Pertanto, un sistema sferico autogravitante è stabile se e solo se il termine a destra della 1.32 è positivo.

$$\frac{\omega_a^2}{|\omega_a|^2} \int \rho_o |\mathbf{v}_a|^2 d^3 \mathbf{r} = \int \left. \frac{d\Phi}{d\rho} \right|_0 |\rho_a|^2 d^3 \mathbf{r} - G \int \int \frac{\rho_a^*(\mathbf{r}) \rho_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}'. \quad (1.32)$$

1.4 Principio Variazionale di Chandrasekhar

Si mostra adesso come, a partire dalla 1.32, si possa ottenere il fondamentale *Principio Variazionale di Chandrasekhar*.

Una stella barotropica con $\frac{d\rho_0}{dr} < 0$ e $\rho_0(r_m) = 0$ è stabile se e solo se la quantità:

$$\epsilon[\rho_1] \equiv \int \left| \frac{d\Phi}{d\rho} \right|_0 \rho_1^2 d^3\mathbf{r} - G \int \int \frac{\rho_1(\mathbf{r})\rho_1(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}', \quad (1.33)$$

è non negativa per ogni $\rho_1(\mathbf{r})$ reale che conserva la massa totale della stella ($\int \rho_1 d^3\mathbf{r} = 0$).

Dimostrazione:

Si assuma che la stella sia instabile e che $\epsilon[\rho_1] \geq 0$ per ogni ρ_1 che conserva la massa. Dal momento che la stella è instabile, segue che $\omega_a^2 < 0$, per cui l'elemento destro dell'equazione 1.33 è minore di zero.

Questa quantità può essere fattorizzata in $\epsilon[Re(\rho_a)] + \epsilon[Im(\rho_a)]$.

Per vederlo basta prendere ρ_a complessa; si assuma per semplicità che la densità abbia la seguente forma:

$$\rho_a(\mathbf{r}) = a + ib, \quad (1.34)$$

$$\rho_a(\mathbf{r}') = a' + ib'. \quad (1.35)$$

Nella 1.33 compare il prodotto $\rho_a^*(\mathbf{r})\rho_a(\mathbf{r}')$ che, con le 1.34 e 1.35, diventa:

$$\rho_a^*(\mathbf{r})\rho_a(\mathbf{r}') = aa' + bb' + i[ab' - a'b], \quad (1.36)$$

dove parte reale e immaginaria sono separate.

Si definisca

$$A = \int \frac{d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (ab' - a'b). \quad (1.37)$$

Poichè l'integrale è invariante per lo scambio \mathbf{r} - \mathbf{r}' , diventa valida l'equazione:

$$A = \int \frac{d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (a'b - ab'), \quad (1.38)$$

in cui sono state scambiate $\rho_a^*(\mathbf{r})\rho_a(\mathbf{r}')$ con $\rho_a^*(\mathbf{r}')\rho_a(\mathbf{r})$ senza modificare il risultato dell'integrale.

Consegue direttamente: $2A = 0$ e con ciò si vede che $[Im(\rho_a)] = 0$.

Tornando alla dimostrazione, si ipotizza $\epsilon[Re(\rho_a)] < 0$ e $\rho_1 = Re(\rho_a)$.

L'equazione di continuità 1.23 garantisce l'annullarsi dell'integrale $\int \rho_a d^3\mathbf{r}$. Prendendone la parte reale, si vede che: $\int \rho_1 d^3\mathbf{r} = 0$.

Questo porta alla contraddizione che $\epsilon[\rho_1] < 0$ e che ρ_1 conserva la massa.

Da qui la dimostrazione che si cercava.

Si conclude che è necessaria la richiesta che $\epsilon[\rho_1]$ sia non negativo affinchè la stella sia stabile.

Capitolo 2

Caso non-newtoniano: forze $r^{-\alpha}$

2.1 Differenze col caso newtoniano

Per quanto riguarda lo studio della stabilità delle stelle barotropiche nel caso $r^{-\alpha}$, si può ragionare come nel caso di campi gravitazionali newtoniani ad eccezione che per qualche piccola accortezza.

Va precisato che lo scopo che si vuole perseguire in questo elaborato non riguarda lo studio del funzionamento di modelli che mirano a rappresentare una realtà governata da forze non newtoniane. In tal caso, infatti, sarebbe stato opportuno effettuare una stima di come viene modificato il moto dei corpi celesti a partire dalla considerazione della forma e stabilità delle orbite. Il vero interesse, del presente lavoro, sta invece nel cercare di capire analiticamente se sia possibile, e in quali condizioni, dimostrare la validità del *Principio Variazionale di Chandrasekhar* per tipi di forze differenti da quella newtoniana. Questo perchè la forza r^{-2} gode di proprietà estremamente peculiari ed è interessante sapere se i risultati di stabilità dei sistemi isotropi siano dovuti a tali peculiarità.

Dunque il potenziale della forma $r^{\alpha-1}$ ha la stessa forma del potenziale gravitazionale newtoniano, ad esclusione ovviamente del valore dell'esponente della r .

La costante G cambia dimensione al variare dell'esponente, ma rimane comunque una costante e verrà trattata come tale.

A seguire ci si approccerà al problema appena esposto nel caso r^{-2} per il caso $r^{-\alpha}$. La prima considerazione da fare è la non esistenza dell'operatore di Laplace. *L'equazione di Poisson* è infatti valida solo per i campi Gravitazionale o Elettrostatico in \mathbf{R}^3 .

È necessario dunque evitare eventuali conti in cui compaia il *Laplaciano*.

Si vedrà che questo non è un vero problema in questo studio, in quanto, nella dimostrazione che segue, si usa soltanto la rappresentazione integrale del potenziale.

Per quanto affermato fino ad ora, la questione da trattare è capire in quali casi la 1.14 sia estendibile a un campo generalizzato e, successivamente, verificare che i conti a seguire

siano altrettanto validi.

Per anticipare e spiegare i passaggi di questo capitolo, si sottolinea l'importanza dello studio del segno della 1.14 per il semplice fatto che un cambio di positività del risultato ricercato ne comprometterebbe la validità, rendendo inefficace lo scopo della tesi.

2.2 Potenziale per forze $r^{-\alpha}$

Si consideri ora di avere un sistema (in origine) sferico che consta di N particelle di uguale massa m , interagenti mutuamente con forze centrali a lungo range, che obbediscono al principio di sovrapposizione.

L'accelerazione in \mathbf{r}_i , per una particella di massa m_j in \mathbf{r}_j , vale:

$$\mathbf{a}_{ji} = -Gm_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^{\alpha+1}}. \quad (2.1)$$

(*Di Cintio, Ciotti, Nipoti, 2013*)

Associando ad \mathbf{a}_{ji} il potenziale generalizzato: $\mathbf{a}_{ji} = -\nabla_i \Phi_{ji}$, si ottiene:

- $\Phi_{ji} = Gm_j \frac{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ per $\alpha \neq 1$
- $\Phi_{ji} = Gm_j \ln \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ per $\alpha = 1$

In questo lavoro ci si occupa del caso $\alpha > 1$, dove il potenziale assume la forma:

$$\Phi_1 = -\frac{G}{\alpha - 1} \int \frac{\rho(\xi, t)}{\|\mathbf{x} - \xi\|^{\alpha-1}} d^3\xi. \quad (2.2)$$

2.3 Problema $\frac{d\Phi}{dr}$ per forze $r^{-\alpha}$

Per la forza di gravitazione newtoniana si sa con certezza che $(\frac{d\Phi}{d\rho})_0 < 0$ e che $\frac{d\rho_0}{dr} < 0$, da cui ne segue: $\frac{d\Phi}{dr} > 0$.

Se si generalizza al caso $\frac{1}{r^\alpha}$, la faccenda si complica, in quanto non è più garantito che $\frac{d\Phi}{dr} > 0$. Questo può essere illustrato dall'esempio che segue.

In realtà è possibile costruire anche una dimostrazione geometrica (che non è riportata qui) che mostra come per $1 < \alpha \leq 2$ certamente $\frac{d\Phi}{dr} > 0$.

Considerando $\alpha \neq 2$, risulta necessario uno studio di funzione per verificare in quali casi resta valido che $\frac{d\Phi}{dr} > 0$.

Per $1 < \alpha < 3$ l'equazione 2.2, integrata per una distribuzione sferica di densità $\rho(\mathbf{r})$, diventa: (*Di Cintio, Ciotti, Nipoti, 2015*)

$$\Phi(r) = -\frac{2\pi G}{r} \int_0^\infty \rho(r') \frac{(r+r')^{3-\alpha} - |r-r'|^{3-\alpha}}{(\alpha-1)(3-\alpha)} r' dr'. \quad (2.3)$$

È comodo a questo punto ipotizzare di avere a che fare con una densità della forma: $\rho(r') = \frac{A}{(r')^b}$ e di effettuare la sostituzione: $t \equiv \frac{r'}{r}$.

In questo modo la 2.3 diventa:

$$\Phi(t) = -\frac{2\pi G A}{(\alpha-1)(3-\alpha)r^{b-1}} \int_0^\infty \frac{r^{3-\alpha}}{t^{b-1}} (1+t)^{3-\alpha} |1-t|^{3-\alpha} dt. \quad (2.4)$$

Dove, chiamando con $I(\alpha, b)$ l'integrale in dt che non dipende più da r , e, occupandosi solo dell'andamento di Φ rispetto a r , si ottiene:

$$\Phi(t) = -r^{3-\alpha-(b-1)} I(\alpha, b) = -r^{4-\alpha-b} I(\alpha, b), \quad (2.5)$$

per cui è possibile studiare la positività di $\frac{d\phi}{dr}$:

$$\frac{d\Phi}{dr} = -(4-\alpha-b)[r^{4-\alpha-b} I(\alpha, b)]. \quad (2.6)$$

La quantità $[r^{4-\alpha-b} I(\alpha, b)]$ è sempre positiva.

Segue pertanto:

$$\frac{d\Phi}{dr} = (b+\alpha-4)[r^{4-\alpha-b} I(\alpha, b)] > 0 \text{ se e solo se: } b > 4-\alpha.$$

2.4 Stabilità delle sfere barotropiche nella generalizzazione di forze $r^{-\alpha}$

Si consideri una sfera imperturbata statica ($\mathbf{v}=0$) con profilo radiale di densità decrescente: $\frac{d\rho_0}{dr} < 0$ che si annulla sulla superficie della stella $\rho_0(r_m) = 0$.

Di seguito viene ripercorso il *paragrafo 1.3* con le opportune correzioni.

Si tratti la sfera come un gas omogeneo.

È possibile riscrivere l'equazione di Eulero per un sistema sferico:

$$\frac{dP_0}{dr} = -\rho_0 \frac{d\Phi_0}{dr}. \quad (2.7)$$

Mentre invece non ci si può servire della 1.14.

A questo punto si prendano in esame le equazioni linearizzate per un sistema fluido, soggetto a piccole perturbazioni, che soddisfa le *boundary condition* di una sfera imperturbata (ad esclusione che per l'*Equazione di Poisson* che non è valida nella generalizzazione):

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}) = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla h_1 - \nabla \Phi_1, \quad (2.9)$$

$$h_1 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0 \frac{\rho_1}{\rho_0}. \quad (2.10)$$

Su queste equazioni le condizioni a contorno sono indipendenti dal tempo:

1. ρ_1 e \mathbf{v}_1 sono finiti a $r = 0$;
2. $P_1 = 0$ a $r = r_m$;
3. Φ_1 è finito a $r = 0$;
4. a $r = r_m$ ho $\Phi_1 \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$.

Si prendono soluzioni di forma armonica (se ne considerano le componenti di Fourier nel tempo):

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\rho_a(\mathbf{r})e^{-i\omega at}], \quad (2.11)$$

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{v}_a(\mathbf{r})e^{-i\omega at}], \quad (2.12)$$

$$\Phi_1(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\Phi_a(\mathbf{r})e^{-i\omega at}], \quad (2.13)$$

$$h_1(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[h_a(\mathbf{r})e^{-i\omega at}]. \quad (2.14)$$

Inserendo le precedenti fuzioni nelle equazioni linearizzate per fluidi, è possibile riscrivere le 2.8-2.10 come:

$$-i\omega_a \rho_a + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}_a) = 0, \quad (2.15)$$

$$-i\omega_a \mathbf{v}_a = -\nabla h_a - \nabla \Phi_a, \quad (2.16)$$

$$h_a = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0 \frac{\rho_a}{\rho_0} = -\left(\frac{d\Phi}{d\rho} \right)_0 \rho_a. \quad (2.17)$$

Dal momento che il sistema è instabile per $\text{Im}(\omega_a) < 0$ (infatti in questo caso le funzioni armoniche consterebbero di un esponenziale reale di esponente positivo) è necessario ora conoscere il valore di ω_a .

Sfruttando un principio variazionale per il set di equazioni 2.15-2.17 e, servendosi della 2.16, si ottiene:

$$i\omega_a \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \nabla(h_a + \Phi_a) d^3 \mathbf{r}, \quad (2.18)$$

Integrando per parti, poichè sia P_a che ρ_0 scompaiono sulla superficie:

$$i\omega_a \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = - \int \nabla(\rho_o \mathbf{v}_b^*)(h_a + \Phi_a) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.19)$$

La 2.15 semplifica ulteriormente, in modo da ottenere:

$$i\omega_a \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = i\omega_b^* \int \rho_b^*(h_a + \Phi_a) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.20)$$

Sapendo che $h_a = \left. \frac{d\Phi}{d\rho} \right|_0 \rho_a$ solo nel caso di un potenziale 2.3 e per una $\rho(\mathbf{r}') = \frac{A}{(\mathbf{r}')^b}$, con $b > 4 - \alpha$:

$$\frac{\omega_a}{\omega_b^*} \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = \int \left| \frac{d\Phi}{d\rho} \right|_0 \rho_b^* \rho_a d^3 \mathbf{r} - \frac{G}{\alpha - 1} \int \int \frac{\rho_b^*(\mathbf{r}) \rho_a(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^{\alpha-1}} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}'. \quad (2.21)$$

Si è utilizzata la 2.2, valida per $\alpha > 1$.

Con lo stesso passaggio matematico visto nel caso newtoniano, si arriva a:

$$\left(\frac{\omega_a}{\omega_b^*} - \frac{\omega_b^*}{\omega_a}\right) \int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = 0. \quad (2.22)$$

Si presentano quindi le seguenti possibilità:

- se $a = b$, allora $\omega_a^2 = (\omega_a^*)^2 = (\omega_a^2)^*$ per cui ω^2 è reale. Si separano due casi:
 - $\omega^2 \geq 0$ per cui il modello è stabile ed oscilla con frequenza ω ;
 - $\omega^2 < 0$ per cui $\omega^2 = -\gamma^2$, con $\gamma \in R$, che rende instabile il modello
- se $a \neq b$ segue: $\omega_a = \omega_b$ o $\int \rho_o \mathbf{v}_b^* \mathbf{v}_a d^3 \mathbf{r} = 0$

In particolare, ponendo $a = b$, si ottiene la fondamentale identità per il caso $r^{-\alpha}$. Pertanto, un sistema sferico autogravitante è stabile se e solo se la quantità 2.23 è positiva.

$$\frac{\omega_a^2}{|\omega_a|^2} \int \rho_o |\mathbf{v}_a|^2 d^3 \mathbf{r} = \int \left| \frac{d\Phi}{d\rho} \right|_0 |\rho_a|^2 d^3 \mathbf{r} - \frac{G}{\alpha - 1} \int \int \frac{\rho_a^*(\mathbf{r}) \rho_a(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^{\alpha-1}} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}', \quad (2.23)$$

2.5 Generalizzazione del Principio Variazionale di Chandrasekhar

Si mostra adesso come, a partire dalla 2.23, si possa ottenere il fondamentale *Principio Variazionale di Chandrasekhar*.

Una stella barotropica con $\frac{d\rho_0}{dr} < 0$ e $\rho_0(r_m) = 0$ è stabile se e solo se la quantità:

$$\epsilon[\rho_1] \equiv \int \left| \frac{d\Phi}{d\rho} \right|_0 \rho_1^2 d^3\mathbf{r} - \frac{G}{\alpha - 1} \int \int \frac{\rho_1(\mathbf{r})\rho_1(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^{\alpha-1}} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}', \quad (2.24)$$

è non negativa per ogni $\rho_1(\mathbf{r})$ reale che conserva la massa totale della stella ($\int \rho_1 d^3\mathbf{r} = 0$).

Si ricordi che la quantità $\left| \frac{d\Phi}{d\rho} \right|_0$ non fa perdere di significato il Principio se e solo se ci si ricorda che si sta considerando un potenziale del tipo 2.3 con una densità $\rho(\mathbf{r}') = \frac{A}{(\mathbf{r}')^b}$, dove $b > 4 - \alpha$.

Dimostrazione:

Si assuma che la stella sia instabile e che $\epsilon[\rho_1] \geq 0$ per ogni ρ_1 che conserva la massa. Dal momento che la stella è instabile, segue che $\omega_a^2 < 0$, per cui l'elemento destro dell'equazione 2.24 è minore di zero.

Questa quantità può essere fattorizzata in $\epsilon[Re(\rho_a)] + \epsilon[Im(\rho_a)]$.

Per vederlo basta prendere ρ_a complessa; si assuma per semplicità che la densità abbia la seguente forma:

$$\rho_a(\mathbf{r}) = a + ib, \quad (2.25)$$

$$\rho_a(\mathbf{r}') = a' + ib'. \quad (2.26)$$

Nella 2.24 compare il prodotto $\rho_a^*(\mathbf{r})\rho_a(\mathbf{r}')$ che, con le 2.25 e 2.26, diventa:

$$\rho_a^*(\mathbf{r})\rho_a(\mathbf{r}') = aa' + bb' + i[ab' - a'b], \quad (2.27)$$

dove sono separate parte reale e immaginaria.

Si definisca

$$A = \int \frac{d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (ab' - a'b). \quad (2.28)$$

Poichè l'integrale è invariante per lo scambio $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, diventa valida l'equazione:

$$A = \int \frac{d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (a'b - ab'), \quad (2.29)$$

in cui sono state scambiate $\rho_a^*(\mathbf{r})\rho_a(\mathbf{r}')$ con $\rho_a^*(\mathbf{r}')\rho_a(\mathbf{r})$ senza modificare il risultato dell'integrale.

Consegue direttamente: $2A = 0$ e con ciò si vede che $[Im(\rho_a)] = 0$.

Tornando alla dimostrazione, si ipotizza $\epsilon[Re(\rho_a)] < 0$ e $\rho_1 = Re(\rho_a)$.

L'equazione di continuità 2.15 mi garantisce l'annullarsi dell'integrale $\int \rho_a d^3\mathbf{r}$. Prendendone la parte reale, si vede che: $\int \rho_1 d^3\mathbf{r} = 0$.

Questo porta alla contraddizione che $\epsilon[\rho_1] < 0$ e che ρ_1 conserva la massa.

Da qui la dimostrazione che si cercava.

Si conclude che è necessaria la richiesta che $\epsilon[\rho_1]$ sia non negativo affinchè la stella sia stabile.

Capitolo 3

Conclusioni

In questo lavoro, preliminare ed esplorativo, si è cercato di capire se sia possibile generalizzare, a sistemi autogravitanti in cui la forza tra particelle sia additiva e caratterizzata da un andamento $r^{-\alpha}$, la dimostrazione di alcuni teoremi di stabilità validi in gravità newtoniana che hanno ampia applicazione in astrofisica (*Teorema di Antonov*).

Alcune simulazioni numeriche a N-corpi sembrano mostrare infatti che sistemi sferici isotropi (sistemi nei quali il tensore di pressione è isotropo in ogni punto) autogravitanti con forze $r^{-\alpha}$ siano stabili.

Questo studio di tesi ha condotto al risultato che il *Principio Variazionale di Chandrasekhar* possa essere generalizzato, sotto opportune condizioni, al caso di generiche forze $r^{-\alpha}$. Questo è importante perché la validità del *Principio Variazionale di Chandrasekhar* è il primo passo per la dimostrazione (non ancora ottenuta) dell'estensione del *Teorema di Antonov* a forze $r^{-\alpha}$.

Le forze $r^{-\alpha}$ non godono di peculiarità proprie della gravitazione newtoniana, come l'*equazione di Poisson*. Nonostante ciò, è stato comunque possibile trovare una condizione sulla distribuzione di densità dei corpi a simmetria sferica, che ha permesso di poter risolvere analiticamente il problema della variazione del potenziale rispetto alla distanza r (dalla sorgente del campo). È noto, infatti, che nel caso newtoniano il potenziale gravitazionale di sistemi sferici aumenta con l'aumentare di r , mentre invece questo non risulta necessariamente vero per potenziali di forze che vanno come $r^{-\alpha}$.

Lo studio è stato quindi portato avanti servendosi, nel caso generalizzato, di un potenziale ottenuto da un forza $r^{-\alpha}$, con $1 < \alpha < 3$. In questo modo, pur comprendendo il caso newtoniano, si può tener conto dell'andamento del potenziale sia nel caso in cui l'esponente sia maggiore, sia in cui sia minore dell'esponente del caso classico ($\alpha = 2$).

In realtà è stato sottolineato che per $1 < \alpha \leq 2$ un ragionamento geometrico (basato su quello originale di Newton per il caso di bucce sferiche) mostra che il campo si comporta come fosse semplicemente newtoniano.

Più interessante la situazione in cui: $2 < \alpha < 3$ in cui invece non è possibile fare lo stesso tipo di ragionamento, anche se nemmeno questo caso è stato di ostacolo allo studio

svolto.

Quindi si considera soddisfacente il risultato ottenuto, che potrebbe aprire la strada alla dimostrazione del *Teorema generalizzato di Antonov*. A sua volta, tale Teorema mostrebbe che le proprietà di stabilità di sistemi autogravitanti non dipendono necessariamente dalla molto speciale natura matematica del campo r^2 , ma vanno probabilmente ricercate soltanto nella natura a "largo range".

Capitolo 4

Appendice

4.1 Teorema della Divergenza

Si prenda un campo vettoriale \mathbf{W} in \mathbf{R}^n .

Si consideri una superficie chiusa arbitraria in un volume Ω e frontiera $\partial\Omega$.

Il flusso del campo \mathbf{W} vale:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \mathbf{n} d^{n-1}\mathbf{x} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{W} d^n\mathbf{x}, \quad (4.1)$$

dove \mathbf{n} è il versore normale alla superficie di dimensione $n - 1$.

Per definire il valore di \mathbf{W} si sfrutta la 4.1:

si prendono superfici sempre più piccole contenenti il punto \mathbf{x} ; il valore $\operatorname{div} \mathbf{W}$ è lo stesso per tutti i volumi contenenti il punto. Quando il volumetto attorno al punto diventa sufficientemente piccolo, si arriva al valore costante (che non dipende dal modo in cui si è risolto il limite): $\operatorname{div} \mathbf{W} V(\Omega)$.

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{V(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \mathbf{n} d^{n-1}\mathbf{x}. \quad (4.2)$$

In coordinate cartesiane si può scrivere:

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{W}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{W}_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{W}, \quad (4.3)$$

pertanto si ottiene il risultato frequentemente utilizzato:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \mathbf{n} d^{n-1}\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{W} d^n\mathbf{x}. \quad (4.4)$$

4.2 Equazione di Boltzmann senza collisioni

(*Binney, Tremaine, 1987*)

Si immagini un grande numero di stelle che si muovono sotto l'influenza di un potenziale liscio $\Phi(\mathbf{x}, t)$.

In ogni istante di tempo t il numero di stelle $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ (posizionate nel volume infinitesimo $d^3\mathbf{x}$ centrato in \mathbf{x} e di velocità appartenenti allo stretto range $d^3\mathbf{v}$ centrato su \mathbf{v}) offre una completa descrizione degli stati di ogni sistema non collidente.

La quantità $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ è chiamata *funzione di distribuzione (DF)*.

Vale la condizione $f \geq 0$ ovunque nello spazio delle fasi.

Conoscendo le coordinate e velocità iniziali di ogni stella, le equazioni di Newton permettono di sapere le posizioni e le velocità in ogni momento. Perciò, dato $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t_0)$, è possibile trovare $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$.

Si possono scrivere le coordinate nello spazio delle fasi: $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{w} = (w_1 \dots w_6)$. Dove la velocità di questo flusso è: $\dot{\mathbf{w}} = (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{v}}) = (\mathbf{v}, -\nabla\Phi)$.

Una caratteristica del flusso descritto da $\dot{\mathbf{w}}$ è che conserva le stelle: in assenza di stelle incontrate non passa da un punto dello spazio delle fasi a un altro, ma va liscio.

La densità delle stelle $f(\mathbf{w}, t)$ soddisfa un'equazione di continuità analoga a quella soddisfatta dalla densità $\rho(\mathbf{x}, t)$ di un ordinario flusso di fluido:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^6 \frac{\partial(f\dot{\mathbf{w}}_\alpha)}{\partial \mathbf{w}_\alpha} = 0. \quad (4.5)$$

Il contenuto fisico di questa equazione può essere visto integrandola su un volume dello spazio delle fasi.

Il primo termine descrive il tasso al quale il blocco di stelle dentro al volume si sta incrementando.

Un'applicazione del *teorema della Divergenza* mostra che il secondo termine descrive il tasso di stelle che fluiscono da questo volume.

Il tasso descritto da $\dot{\mathbf{w}}$ è speciale, ha la proprietà che:

$$\sum_{\alpha=1}^6 \frac{\partial \dot{\mathbf{w}}_\alpha}{\partial \mathbf{w}_\alpha} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_i}{\partial \mathbf{v}_i} \right) = \sum_{i=1}^3 -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_i} \right) = 0. \quad (4.6)$$

Nella 4.6 il termine $\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{x}_i} = 0$ perché \mathbf{v}_i e \mathbf{x}_i sono coordinate indipendenti dello spazio delle fasi.

Inoltre Φ non dipende dalle velocità.

L'equazione 4.5 diventa sotto l'ultima condizione:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^6 \dot{\mathbf{w}}_\alpha \frac{\partial(f)}{\partial \mathbf{w}_\alpha} = 0; \quad (4.7)$$

segue:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{v}_i \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_i}) = 0 \quad (4.8)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f - \nabla \Phi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (4.9)$$

4.3 Preliminari matematici

In questa sezione si vuole partire dai risultati di *Poisson* e di *Boltzmann* per costruire un set di equazioni 1.15-1.18 linearizzate per fluidi.

Si hanno:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \nabla \Phi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0; \quad (4.10)$$

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v}. \quad (4.11)$$

Un sistema stellare in equilibrio è descritto da una $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ e dal potenziale $\Phi_0(\mathbf{x})$, che vanno inseriti nelle equazioni 4.10 e 4.11 ottenendo:

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} - \nabla \Phi_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (4.12)$$

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \int f_0 d^3 \mathbf{v}. \quad (4.13)$$

Ora si perturbi il sistema in equilibrio, facendo sì che f e Φ dipendano dal tempo per via di un termine di perturbazione:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \epsilon f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (4.14)$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \epsilon \Phi_1(\mathbf{x}, t); \quad (4.15)$$

con $\epsilon \ll 1$.

La 4.10 diventa:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \frac{\partial \epsilon f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{x}} \\ & - \nabla \Phi_0(\mathbf{x}) \frac{\partial f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} - \nabla \Phi_0(\mathbf{x}) \frac{\partial \epsilon f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} - \nabla \epsilon \Phi_1(\mathbf{x}, t) \frac{\partial f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} - \nabla \epsilon^2 \Phi_1(\mathbf{x}, t) \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sono da elidere i termini f_0 derivati parzialmente rispetto al tempo, quelli che soddisfano la 4.12 e infine ricorrarsi della condizione $\epsilon \ll 1$, in modo da ottenere l' *Equazione Linearizzata senza collisioni di Boltzmann*:

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{x}} - \nabla \Phi_0(\mathbf{x}) \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} - \nabla \Phi_1(\mathbf{x}, t) \frac{\partial f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (4.17)$$

Per quanto riguarda la 4.11 si ha:

$$\nabla^2 \Phi_0(\mathbf{x}) + \epsilon \nabla^2 \Phi_1(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \int [f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \epsilon f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)] d^3 \mathbf{v}, \quad (4.18)$$

che fornisce *l'equazione di Poisson*:

$$\nabla^2 \Phi_1(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \int f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v}. \quad (4.19)$$

A questo punto si analizzano le soluzioni delle equazioni appena ottenute.

Sottolineato che si lavora nell'assunzione che i sistemi stellari si comportino come fluidi, si considera il sistema di equazioni:

1. equazione di continuità (vedi 1.5);
2. equazione di Eulero: $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi$;
3. equazione di Poisson 4.19 per una densità: $\rho(\mathbf{x}, t)$;
4. equazione per le trasformazioni barotropiche: $p(\mathbf{x}, t) = p[\rho(\mathbf{x}, t)]$.

Lo stato di equilibrio del fluido è descritto dalle quantità: $\rho_0(\mathbf{x})$, $p_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ e $\Phi_0(\mathbf{x})$ indipendenti dal tempo.

Si prenda una piccola perturbazione di queste quantità:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}) + \epsilon \rho_1(\mathbf{x}, t), \quad (4.20)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}) + \epsilon p_1(\mathbf{x}, t), \quad (4.21)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t), \quad (4.22)$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0(\mathbf{x}) + \epsilon \Phi_1(\mathbf{x}, t). \quad (4.23)$$

Mettendo le equazioni 4.20- 4.23 dentro al sistema di equazioni precedentemente citato, si ottengono le *equazioni linearizzate per i fluidi*:

$$\frac{\partial \rho_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla(\rho_0(\mathbf{x}) \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t)) + \nabla(\rho_1(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_0(\mathbf{x})) = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \nabla) \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) \nabla) \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \frac{-\rho_1(\mathbf{x}, t)}{\rho_0(\mathbf{x})^2} \nabla p_0(\mathbf{x}, t) - \frac{\nabla p_1(\mathbf{x}, t)}{\rho_0(\mathbf{x})} - \nabla \Phi_1(\mathbf{x}, t), \quad (4.25)$$

$$\nabla^2 \Phi_1(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (4.26)$$

$$p_1(\mathbf{x}, t) = (\frac{dp}{d\rho})_0(\mathbf{x}) \rho_1(\mathbf{x}, t). \quad (4.27)$$

Bibliografia

- Binney, J., Tremaine, S., 1987, Galactic Dynamics, Princeton University Press*
Di Cintio, P.F., Ciotti, L., Nipoti, C., 2013, MNRAS, 431, 3177-3188
Di Cintio, P.F., Ciotti, L., Nipoti, C., 2015, J. Plasma Physics, 81, 14 pages
Di Cintio, P.F., Ciotti, L., Nipoti, C., 2016, MNRAS, in preparation