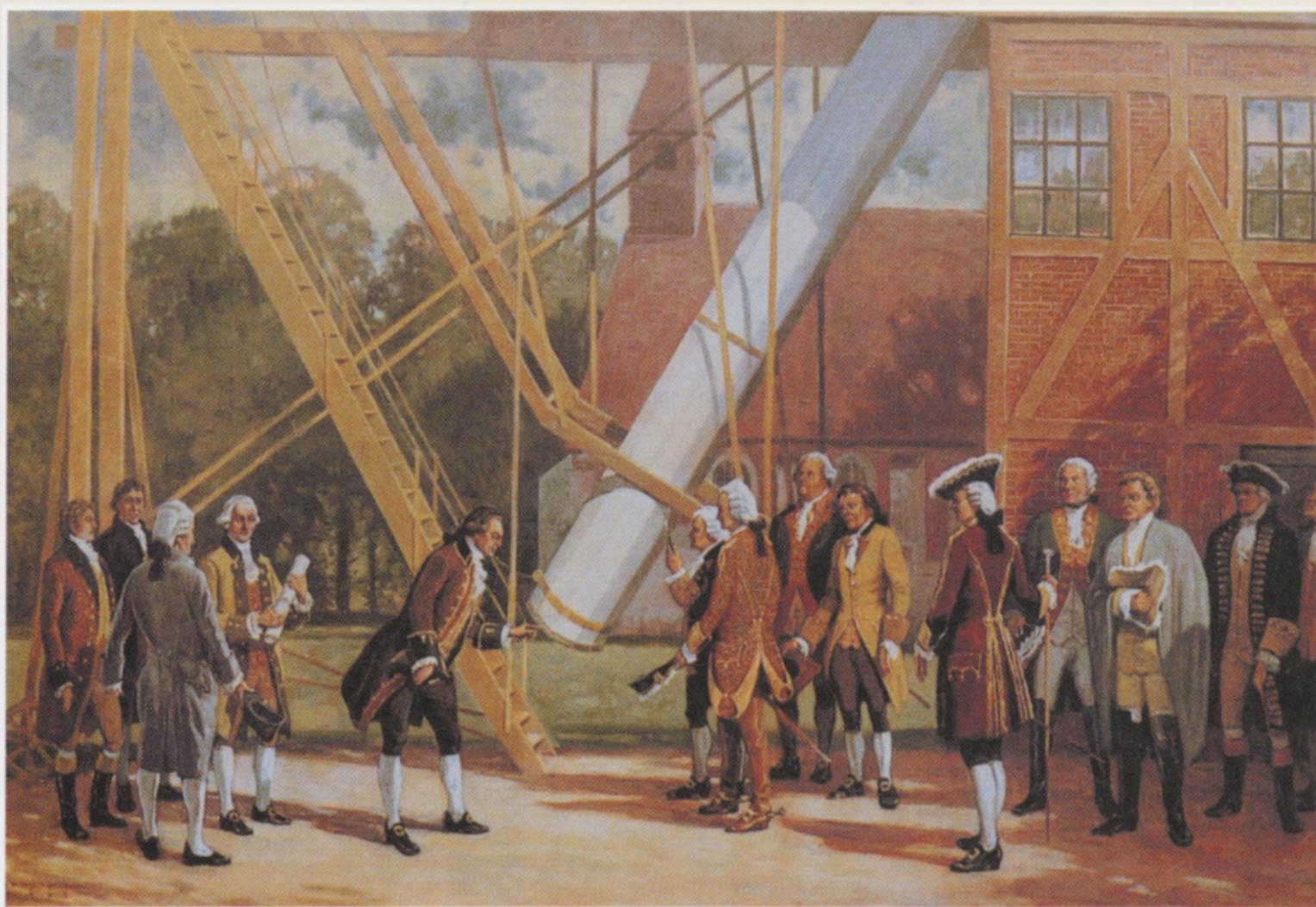




# GIORNALE DI ASTRONOMIA

rivista di informazione cultura e didattica  
della Società Astronomica Italiana



Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali®  
Pisa · Roma

marzo 2001  
volume 28° - n. 1  
ISSN 0339-1106

# Johann Carl Friedrich Gauss e la *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium*

Luca Ciotti \* e Maria Novella Ciotti \*\*

(\*) Osservatorio Astronomico di Bologna e Scuola Normale Superiore di Pisa

(\*\*) Dipartimento di Storia dell'Università di Firenze

...quasi tutto ciò che la Matematica  
del nostro secolo (il XIX)  
ha prodotto sulla via delle idee  
scientifiche originali, si ricollega a Gauss  
L. Kronecker

*Pauca sed matura*  
J. C. F. Gauss

## Introduzione

Dovendo parlare di un'opera di uno dei più grandi matematici mai vissuti, unanimemente affiancato ad Archimede e Newton ai vertici della Matematica – e solo da alcuni ingiustamente considerata “minore” – è opportuno inquadrare brevemente la vita e le opere dell'Autore, rinviando il lettore interessato ad altre e più dettagliate opere (si veda ad esempio [2], [3] e [4]). Questo ci permetterà di capire meglio la situazione storica e scientifica in cui prese vita la *Theoria Motus* della quale successivamente tratteremo una semplice descrizione, basata su una copia in lingua latina stampata ad Amburgo nel 1809 e conservata nella Biblioteca del Dipartimento di Astronomia dell'Università di Bologna [1]. Il lettore curioso potrà infine trovare una traduzione di ampi brani della *Praefatio* della *Theoria Motus*, dove Gauss stesso introduce la sua opera con considerazioni di carattere personale, sia storiche che tecniche, di notevole interesse.

## Vita

Johann Carl Friedrich Gauss nacque in “una misera casuccia da genitori poverissimi” [2] il 30 aprile 1777, nel paese di Brunswick, in Germania. All'età di 7 anni iniziò la sua educazione elementare, incontrando un maestro, un certo Buttner, famoso più per la crudeltà con cui trattava i bambini a lui affidati che per le doti di insegnante. In ogni caso, già fin dai primi anni Gauss stupì il maestro per la sua abilità matematica, trovando da solo la formula generale per la somma della serie aritmetica. Se la vita nella scuola non era facile, anche la situazione familiare di Gauss non era delle più felici: sappiamo infatti che il padre ne contra-

stò la precocissima inclinazione per la matematica e per lo studio in generale. Fortunatamente per Gauss, sia sua madre Dorotea Benz, alla quale il figlio rimase devotamente affezionato fino alla sua morte, sia Buttner, evidentemente profondamente impressionato dalle capacità del bambino, sostennero la necessità di fornirgli un'istruzione adeguata. Così, all'età di 11 anni Gauss iniziò a frequentare le scuole superiori, dove tra le altre cose studiò latino, che sarebbe rimasta la sua lingua preferita ed in cui scrisse quasi tutti i suoi lavori: Gauss iniziò ad usare il tedesco nelle sue memorie scientifiche soltanto dopo ripetute insistenze dei suoi amici astronomi. Successivamente, nel 1792, grazie ad una elargizione del Duca di Brunswick, iniziò a frequentare il Collegium Carolinum. Non è questo ovviamente il luogo per descrivere nei dettagli le tappe della maturazione matematica di Gauss: sarà qui sufficiente ricordare che a dieci anni aveva già dato la prima dimostrazione rigorosa del Teorema del Binomio. Gauss è considerato a buon diritto il padre dei “rigoristi”, il primo cioè ad aver introdotto ed utilizzato in maniera sistematica il rigore che distingue le dimostrazioni della matematica moderna da quelle delle matematica precedente; esclusi ovviamente i classici greci dell'Età Aurea, Euclide, Archimede, Apollonio ed i loro discepoli. A quindici anni aveva già intravisto la possibilità di geometrie non-euclidee, a sedici anni iniziò ad occuparsi con l'autorità del maestro delle vecchie teorie aritmetiche trasformandole nella moderna Teoria dei Numeri.

Nel 1795 Gauss lasciò Brunswick per studiare all'Università di Gottinga e nel 1799 sottomise la sua dissertazione dottorale in cui veniva dimostrato in maniera rigorosa per la prima volta il Teorema Fondamentale dell'Algebra. Gauss rimase tutta la vita estremamente interessato al problema delle soluzioni delle equazioni polinomiali in campo complesso, tanto da produrre varie dimostrazioni diverse del Teorema Fondamentale stesso. Il 1801 vide la pubblicazione di quello che è uno dei capolavori matematici di ogni tempo, le *Disquisitiones Arithmeticae*. A quest'opera, divisa in sette capitoli e fondamento della moderna Teoria dei Numeri, Gauss consegnò una delle sue scoperte più importanti fatte in gioventù, ovvero la costruzione con riga e compasso del poligono regolare

di 17 lati: si trattava di gran lunga del più significativo avanzamento in geometria classica compiuto dall'antichità.

Lo stesso anno della pubblicazione delle *Disquisitiones*, Gauss fu uno dei protagonisti del ritrovamento del primo degli asteroidi, Cerere, dopo la sua scoperta da parte di Giuseppe Piazzi. Un successo che, come vedremo più in dettaglio nella Sezione 2, ebbe un ruolo fondamentale nella vita di Gauss. La sua fama internazionale, infatti, venne notevolmente accresciuta a seguito del "ritrovamento" avvenuto il 7 dicembre dello stesso anno grazie agli elementi orbitali da lui calcolati attraverso una prima elaborazione del suo metodo che consentiva di ricavarli sulla base delle osservazioni. Il metodo usato sarebbe stato poi pubblicato nella *Theoria Motus* soltanto nel 1809. Nel giugno del 1802 Gauss visitò Olbers ed applicò con altrettanto successo il suo metodo al calcolo dell'orbita di un nuovo asteroide, Pallade, scoperto da Olbers nel marzo dello stesso anno. Sempre al 1802 risale l'inizio della corrispondenza tra Gauss e altre due importanti personalità scientifiche dell'epoca, Bessel e Sophie Germaine. Un vivace resoconto delle sorprendenti relazioni scientifiche di Gauss con la Germaine può essere trovato in [2]. A questo periodo risalgono alcuni tra i più significativi eventi della vita privata di Gauss, ovvero il matrimonio con Johanna Ostoff (9 ottobre 1805) e la perdita del suo benefattore, il Duca di Brunswick, ucciso in battaglia combattendo per l'armata prussiana. A seguito di questo evento e della fama acquistata col suo lavoro sulle orbite degli asteroidi, nel 1807 Gauss lasciò Brunswick e assunse la direzione dell'Osservatorio di Gottinga. Nel 1808 morì suo padre ed un anno dopo anche sua moglie Johanna morì di parto: il bambino sarebbe morto poco tempo dopo. Gauss uscì provato da questa esperienza e scrisse ad Olbers chiedendogli ospitalità per qualche settimana "per riacquistare le forze nelle braccia della tua amicizia, forze necessarie per una vita che ha significato soltanto perché appartiene ai miei tre piccoli figli".

L'anno successivo alla morte di Johanna, tuttavia, Gauss si risposò con Minna, la migliore amica della prima moglie. Nonostante la coppia abbia avuto tre figli, sembra che questo secondo matrimonio sia stato dettato più da ragioni di convenienza che di passione. In ogni caso, il lavoro di Gauss apparentemente non risentì delle circostanze della sua vita in questi anni. Infatti, come già detto sopra, proprio nel 1809 uscì in stampa la *Theoria Motus*. È importante sottolineare come la *Theoria Motus* – seppur da alcuni considerata un'opera "minore" per quanto riguarda l'aspetto matematico – da una parte corrisponda allo stabilirsi della fama universale di Gauss, fino a quel momento ancora limitata all'ambiente matematico e accademico, dall'altra segni l'inizio dell'interesse di Gauss anche per i problemi di Fisica Matematica. Infatti, proprio dopo questa pubblicazione Gauss cessò di occuparsi in maniera esclusiva di

matematica pura (su cui però, a differenza di Newton ed Archimede, continuò a lavorare con risultati fondamentali sino alla morte) ed estese i suoi interessi a problemi di Geodesia, Elettromagnetismo ed Astronomia.

I contributi di Gauss all'Astronomia teorica terminarono nel 1817, sebbene egli continuasse a fare osservazioni astronomiche fino all'età di 70 anni. Tra i lavori fondamentali pubblicati da Gauss dopo il 1817 possiamo qui ricordare le *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* (un trattamento rigoroso del concetto di serie e la successiva introduzione alle funzioni ipergeometriche), il *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (un saggio sull'integrazione per approssimazioni numeriche), la *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen* (una discussione sugli stimatori statistici) e la *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata* (una trattazione del calcolo del campo gravitazionale di ellissoidi omogenei). Nel 1818 Gauss ebbe l'incarico di condurre una campagna geodetica, che accettò con entusiasmo, assumendosi personalmente il compito di condurre le rilevazioni, raccogliendo dati durante il giorno e svolgendo i calcoli la notte, anche grazie alle sue straordinarie capacità di calcolo mentale. Il compito si rivelò ben presto immane, ma Gauss trovò il tempo per pubblicare egualmente più di 70 lavori di matematica tra il 1820 e il 1830. Nel 1822 vinse un premio dell'Università di Copenhagen per la *Theoria attractionis* e, nonostante l'impegno negli altri lavori, riuscì a pubblicare nel 1823 la *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*, una sistematizzazione rigorosa del metodo dei Minimi Quadrati. Nel 1828 Gauss pubblicò le *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, il famoso trattato che gettò le basi per lo sviluppo della Geometria Differenziale, in cui era contenuto quello che lui stesso definiva il suo "Theorema egregium" sulla curvatura delle superfici.

Da un punto di vista della vita privata, il periodo che va dal 1817 al 1832 fu ancora segnato da problemi familiari. Nel 1817 Gauss si fece infatti carico dell'assistenza alla madre malata, che tenne con sé fino alla morte di lei, avvenuta nel 1839. Nello stesso tempo si originarono forti tensioni con la moglie, sull'opportunità o meno di trasferirsi all'Università di Berlino, che gli aveva offerto una posizione di professore. Gauss non era amante dell'insegnamento (ci sono giunte varie testimonianze della sua mancanza di pazienza con gli studenti) e preferì declinare l'offerta mantenendo la posizione all'Osservatorio di Gottinga, che gli lasciava più tempo per le sue ricerche. Nel 1831 anche la seconda moglie morì dopo una lunga malattia. Nello stesso anno Gauss pubblicò i *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii*. L'anno successivo insieme a Weber, nuovo professore di Fisica all'Università di Gottinga, iniziò lo studio del magnetismo terrestre,

producendo, anche in questo campo, risultati di grande valore, come la determinazione teorica della posizione del Polo Sud magnetico. Sempre in collaborazione con Weber, scoprì quelle che sarebbero poi state note come "Leggi di Kirchoff", costruì un primo modello di telegrafo e pubblicò un atlante geomagnetico. Da un punto di vista strettamente matematico, può essere curioso ricordare come nel 1846, all'annuncio della formulazione di una geometria non-euclidea da parte di Lobachevsky, reagisse senza apparente sorpresa, affermando che aveva già raggiunto gli stessi risultati 46 anni prima, all'età di 15 anni.

Gauss continuò a lavorare attivamente fino alla fine della sua vita. La sua ultima uscita pubblica fu in occasione dell'inaugurazione della nuova linea ferroviaria tra Hannover e Gottinga. Morì nel sonno la mattina del 23 febbraio 1855.

### La *Theoria Motus*: genesi e contenuto dell'opera

Come già evidenziato nella precedente Sezione, l'inizio della carriera scientifica di Gauss può essere fatto risalire al settembre del 1801 quando Franz Xaver von Zach (1754-1832), un astronomo ungherese che Gauss conosceva da qualche anno, pubblicò le posizioni orbitali di un nuovo "piccolo pianeta" scoperto a Palermo da Giuseppe Piazzi (1746-1826) il 1° gennaio 1801 e da lui chiamato Cerere. Sfortunatamente Piazzi aveva potuto seguire Cerere soltanto per 3 gradi sulla sua orbita, fino all'11 febbraio, quando aveva dovuto sospendere le osservazioni a causa di una malattia, prima che il nuovo oggetto sparisse dietro il Sole. Sorvolando sulla storia delle osservazioni di Piazzi e delle polemiche che ne seguirono tra lo stesso Piazzi, von Zach, Oriani e Bode, ampiamente descritta da Foderà Serio e Chinnici in questo stesso fascicolo della rivista, ricordiamo solo che Zach pubblicò diverse previsioni sulla probabile posizione di Cerere al momento di una sua eventuale ricomparsa, compresa quella di Gauss, che differiva significativamente dalle altre. Quando Cerere fu osservato nuovamente da Zach il 7 dicembre 1801, la sua posizione era quasi esattamente coincidente con quella prevista da Gauss.

Il motivo che portò Gauss ad occuparsi del problema di Cerere fu quindi di natura contingente: solo pochi dati orbitali erano disponibili e questo rendeva il calcolo della sua orbita estremamente complesso. Certamente questo problema poneva una sfida importante ai matematici, pur se essenzialmente di tipo tecnico, e viene quindi da chiedersi come mai Gauss sia stato così fortemente attratto da questo problema, fondamentale per l'astronomia, ma non certamente per la matematica. Secondo Bell [2] si possono identificare vari motivi che in un modo o nell'altro contribuirono a calamitare l'interesse del grande matematico su

questo problema di Meccanica Celeste. Il primo dei motivi proposti è che la figura di Newton, scomparso da più di settanta anni e per il quale, come abbiamo detto, Gauss nutriva una sconfinata ammirazione, dominava ancora completamente la matematica dell'epoca ed i "grandi" matematici erano quelli che, sulle orme di Newton, si sforzavano di completarne l'imponente edificio dei *Principia Mathematica*. Un altro aspetto della questione era rappresentato certamente dall'incredibile facilità mentale con la quale Gauss riusciva, a detta dei contemporanei, ad eseguire i più complicati calcoli numerici, fino al punto di calcolare logaritmi con svariate cifre decimali significative senza bisogno di penna e carta, se per caso era già impegnato in altre occupazioni che gli impedivano di scrivere. Si può ritenere, quindi, che Gauss non fosse intimorito dalla mole di calcoli che certamente si sarebbero dovuti eseguire, come sempre accade quando dalla teoria si passa alla pratica. Come ultima e forse più importante ragione si può infine considerare il fatto, non secondario, dell'onore e della gloria che certamente sarebbero stati tributati a colui che avesse permesso di rintracciare Cerere. Conviene qui, infatti, ricordare ancora una volta le modestissime origini di Gauss, che forse vedeva nella soluzione di questo problema un definitivo affrancamento dalle ristrettezze patite e dagli ostacoli affrontati in gioventù. Fatto sta che, come ricordato sopra, Cerere fu ritrovato nella posizione predetta da Gauss e dopo di esso anche Pallade, Vesta e Giunone mostrarono di adattarsi perfettamente alle predizioni orbitali ottenute col nuovo metodo.

La cosa più sorprendente per uno studioso moderno è come Gauss - che avrebbe ancora dato



Fig. 1. Un ritratto di Gauss a 55 anni.

contributi fondamentali alla Matematica come il Teorema Fondamentale dell'Algebra, le funzioni Ipergeometriche, la teoria del Potenziale di sferoidi, la Geometria Differenziale e molti altri - abbia potuto consacrare quasi completamente i successivi *venti* anni del suo tempo all'applicazione ripetitiva e sicuramente tediosa di questo metodo.

### La *Theoria Motus*: aspetti tecnici

Riteniamo ora opportuno presentare in qualche dettaglio l'aspetto tecnico dell'opera, anche considerando il fatto che molto spesso e più spesso ancora quando si tratti di opere circondate oramai da un'aura di timore quasi reverenziale sono più le persone che ne parlano di quelle che possono dire di averle almeno sfogliate. Da un punto di vista generale Gauss portò nella Meccanica Celeste tutto il peso della sua formidabile forza matematica. Come un meccanico provetto, in primo luogo Gauss letteralmente "smontò" pezzo a pezzo tutto il poderoso e anche involuto "motore matematico" che era usato all'epoca per la determinazione delle orbite approssimate, rimontandolo in una macchina ben lubrificata capace di funzionare anche con un numero di dati minimo. Vale la pena di riportare una piacevole descrizione dell'impresa di Gauss: "Il lavoro di Gauss è un raro caso in cui un grande e a lungo dibattuto problema di Meccanica Celeste è stato risolto usando soltanto modesti strumenti matematici. Si tratta di un complicato problema di matematica applicata, contenente più di 80 variabili, la cui geometria è descritta in tre sistemi diversi di coordinate. Gauss riuscì nel suo scopo non tanto grazie a profondi e astratti argomenti matematici, quanto piuttosto grazie ad un'incredibile capacità di visualizzazione di come le varie quantità sono tra loro collegate, una visione che lo guidò attraverso straordinari calcoli che chiunque altro avrebbe immediatamente abbandonato come impraticabili" [5].

L'opera si presenta suddivisa in due Libri, ciascuno composto a sua volta da 4 Sezioni, preceduti da una *Praefatio*, cui è dedicata la Sezione 4 di questo articolo, e seguiti dalle *Tabulae*.

Libro Primo: *Relationes generales inter quantitates per quas corporum coelestium motus circa solem definiuntur*

Il contenuto del Libro Primo è dedicato a quella che possiamo definire una "rifondazione" dei risultati generali noti sul problema dei due corpi, in un formalismo opportuno per la successiva trattazione presentata nel Libro Secondo e la vera parte originale dell'opera. Nella prima delle quattro Sezioni in cui si articola il Libro Primo - *Relationes ad locum simplicem in orbita spectantes* - Gauss enuncia esplicitamente le sue ipotesi di lavoro, ovvero che ogni pianeta viene considerato un punto materiale, che le perturbazioni dei satelliti sui pianeti non sono considerate e che anche le relative per-

turbazioni planetarie non sono prese in considerazione. In tal senso il Sistema solare viene rappresentato come una "somma" di problemi dei due corpi. In particolare, il moto di ogni pianeta si svolge su un piano invariabile. La Sezione Prima prosegue quindi con l'esposizione completa e dettagliata delle proprietà orbitali del Problema dei due corpi, nei tre casi del moto ellittico, parabolico ed iperbolico. Per ciascuna delle tre famiglie orbitali vengono esplicitamente definite le varie quantità "intrinseche" dell'orbita, come ad esempio le anomalie vera, media ed eccentrica, e viene mostrato al lettore come risolvere l'equazione di Keplero col metodo delle approssimazioni successive. In termini più semplici, in questa Sezione viene mostrato come calcolare la posizione di un pianeta sulla sua orbita avendo specificato il tempo.

Nella Sezione Seconda - *Relationes ad locum simplicem in spatio spectantes* - l'apparato tecnico edificato nella Sezione Prima viene applicato al caso più complesso in cui l'orbita di un corpo celeste non viene studiata nelle sue proprietà intrinseche, ma come vista dal piano dell'eclittica. In altre parole, viene discusso il problema della descrizione dell'orbita all'interno del Sistema solare. A questo scopo, vengono prima introdotti i sette elementi orbitali - longitudine media, moto medio, semiasse maggiore, eccentricità, longitudine del perielio, longitudine del nodo ascendente, inclinazione dell'orbita - e vengono fornite al lettore le più importanti formule di trigonometria sferica necessarie per la descrizione del problema nel nuovo sistema di riferimento. Successivamente viene introdotto l'ultimo dei tre sistemi di riferimento usati per la soluzione del problema, un sistema di riferimento cartesiano, e vengono derivate le formule di trasformazione delle coordinate tra i tre sistemi. Al termine di un vero e proprio tour de force, vengono infine ricavate le formule di trasformazione delle posizioni di un pianeta che si misurano in uno specifico luogo sulla superficie terrestre in quelle geocentriche.

Nella Sezione Terza - *Relationes inter locos plures in orbita* - Gauss inizia a delineare i termini pratici, seppure ancora in maniera del tutto teorica, del problema. Infatti l'autore affronta adesso il problema della determinazione dei parametri intrinseci dell'orbita avendo a disposizione tre posizioni sull'orbita stessa. Si può notare la perfetta simmetria nello svolgimento del lavoro: siamo adesso tornati all'ambiente di lavoro delineato nella Sezione Prima. È quasi superfluo dire che i calcoli vengono presentati per i tre tipi orbitali, ellittico, parabolico ed iperbolico, ma certamente il lettore moderno non può che rimanere stupefatto dal fatto che molti dei passaggi più complessi sono svolti usando la tecnica dell'espansione in frazioni continue!

La Sezione Quarta - *Relationes inter locos plures in spatio* - conclude il Libro Primo. Qui il lettore trova la trasformazione delle tre posizioni (gene-

riche) utilizzate nella precedente Sezione nelle coordinate introdotte nella Sezione Seconda. Poiché le formule di trasformazione sono già state derivate, si tratta di una parte dell'opera molto breve e che non presenta particolari difficoltà per chi abbia seguito fino a questo punto lo svolgimento del Libro Primo.

Libro Secondo: *Investigatio orbitarum corporum coelestium ex observationibus geocentricis*

Nel Libro Secondo Gauss entra direttamente nel problema della determinazione dell'orbita di un pianeta a partire da reali osservazioni astronomiche. Il taglio dell'opera assume in questa parte un carattere molto diverso da quello mostrato nel Libro Primo. Se è vero infatti che la struttura della presentazione mantiene caratteristiche di notevole simmetria rispetto al Libro Primo (ancora quattro Sezioni, adesso dedicate all'aspetto "pratico" del problema rispetto a quello teorico del Libro Primo) è anche vero che Gauss nel Libro Secondo sente una forte necessità di spiegare ai lettori la sua tecnica, quasi a volerli condurre per mano verso la soluzione finale del problema. Non a caso la prima delle quattro Sezioni del Libro Secondo è la più lunga di tutte le otto Sezioni, con intere pagine di descrizioni verbali e relativamente poche formule.

Nella Sezione Prima – *Determinatio orbitae e tribus observationibus completis* – Gauss inizia col dimostrare come, nelle ipotesi 1) che la massa del pianeta sia nota oppure trascurabile rispetto a quella del Sole, 2) che l'orbita del pianeta medesimo non sia complanare con quella della Terra (cioè che non sia coincidente col piano dell'Eclittica), TRE osservazioni sono in linea di principio sufficienti per determinare completamente la sua orbita. Gauss passa poi ad illustrare con due esempi pratici il suo metodo in questo caso, calcolando i parametri orbitali di tre asteroidi, il *planeta novus Iuno* (Giunone), *Pallade* [...], *cuius observationes sequentes Mediolanis facta*, ed infine *Ad exemplum tertium observationes sequentes Cereris eligimus*.

Nella Sezione Seconda – *Determinatio orbitae e quatuor observationibus, quarum duae tantum completae sunt* – Gauss analizza il caso degenerare in cui il piano orbitale del corpo celeste coincide con l'Eclittica e dimostra come, supponendo ancora valida l'ipotesi 1) presentata nella Sezione Prima, siano adesso necessarie QUATTRO osservazioni per fissare completamente l'orbita. L'esempio concreto utilizzato per illustrare il suo metodo in questo caso è *Vesta, quae inter omnes planetas recentissime detectos inclinatione ad Ellipticam minima gaudet*.

La Sezione Terza – *Determinatio orbitae observationibus quotcunque quam proxime satisfaciendis* – è certamente per il lettore moderno la più interessante di tutta la *Theoria Motus*.

Infatti, mentre nelle precedenti due Sezioni le osservazioni sono ipotizzate non affette da errori di misura, qui Gauss si pone il problema del trattamento di osservazioni, inevitabilmente più o meno imprecise: [...] *omnes mensurationes atque observationes nostrae nihil sint nisi approximationem ad veritatem*. Prima di affrontare il problema concreto della determinazione dell'orbita, introduce quella che sarà poi universalmente nota come la funzione "Gaussiana" per la distribuzione degli errori, riferendosi alla scoperta del valore dell'integrale di questa funzione esteso a tutta la retta reale – radice quadrata di  $\pi$  – come al *theorema elegans primo ab illustrissimus Laplace inventum*. Si noti che una determinazione rigorosa delle condizioni necessarie e sufficienti per l'applicabilità della distribuzione Gaussiana sarà ottenuta molto più tardi, nel corso di questo secolo, utilizzando il cosiddetto Teorema del Limite Centrale. Successivamente, Gauss procede a descrivere il metodo dei Minimi Quadrati, sia basandosi sulla sua distribuzione di probabilità, sia in base a considerazioni di carattere intuitivo: *Ceterum principium, quod quadrata differentiarum inter quantitates observatas et computatas summam quam minimam producere debeant, etiam independenter a calculo probabilitas sequenti modo considerari poterit*.

Vale la pena di menzionare come la pubblicazione del metodo dei Minimi Quadrati provocasse una certa polemica, in quanto il famoso matematico Legendre rivendicò a sé questa scoperta nel 1806. È pertanto interessante vedere come Gauss trattò nella *Theoria Motus* tale questione di priorità. Lasciamo parlare l'autore: [...] *principium nostrum, quo iam inde ab anno 1795 usi sumus, [...] etiam a clarissimus Legendre in opere Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes (Paris, 1806) prolatum est, ubi plures aliae proprietates huius principii expositae sunt, quas hic brevitatis causa suppressimus*.

La Sezione Quarta – *De determinatione orbitarum, habita ratione perturbationum* – l'ultima di tutta l'opera, tratta infine in maniera estremamente concisa (è la Sezione più breve di tutta la *Theoria Motus*, appena tre pagine) il problema posto alle osservazioni dall'esistenza delle perturbazioni planetarie e qui Gauss afferma che il suo metodo deve essere visto come il primo passo nella determinazione dell'orbita vera dei corpi celesti.

### La Praefatio della *Theoria Motus*

Forse la *Praefatio*, dove l'autore espone il contenuto della *Theoria Motus* ed i motivi che l'hanno indotto a darla alle stampe, è più interessante, per il moderno lettore, degli aspetti tecnici dell'opera sopra brevemente riassunti. È qui impossibile per motivi di spazio riportarne la traduzione integrale e ci limiteremo perciò ad una traduzione, abbastanza libera per renderne più scorrevole la lettura,

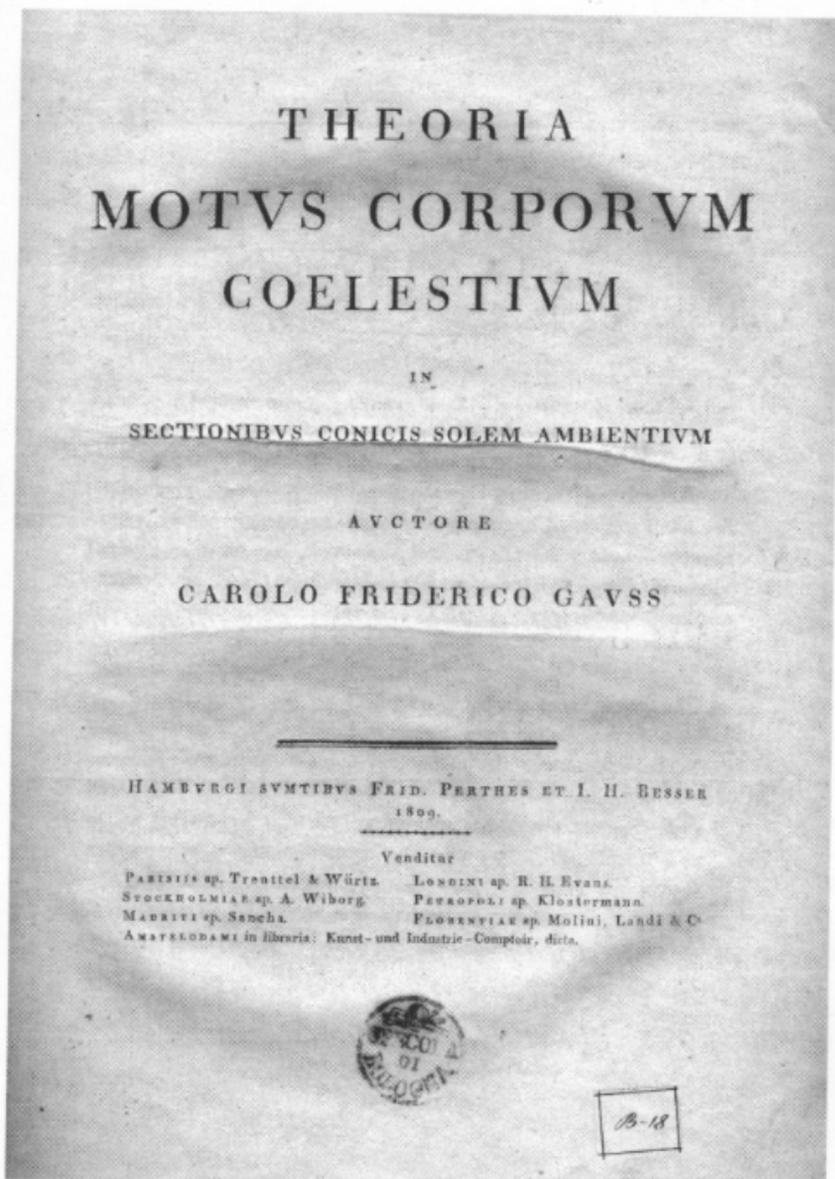


Fig. 2. Frontespizio della prima edizione della *Theoria Motus Corporum Coelestium*.

ma fedele per quanto riguarda il contenuto, delle parti che riteniamo più significative; tra parentesi quadre sono riportati alcuni commenti o interpolazioni di chi scrive volti a chiarificare il senso, non sempre lineare, dei vari periodi. Infine, i passaggi che riteniamo più importanti per la comprensione dell'opera sono sottolineati, mentre le parti in grassetto sono quelle evidenziate tipograficamente da Gauss stesso, alle quali egli ovviamente dava particolare importanza nel contesto dell'introduzione.

**PRAEFATIO.** Scoperte le leggi generali del moto dei pianeti, all'ingegno di Keplero non mancarono gli aiuti per determinare gli elementi orbitali dei singoli pianeti per mezzo delle osservazioni. [Infatti] Tycho Brahe, che aveva elevato l'astronomia pratica ad una dignità prima ignota, aveva osservato per una lunga serie di anni tutti i pianeti con tanta applicazione e perseveranza, che a Keplero, degnissimo erede, era rimasto solo da scegliere con cura quello che di tale notevole tesoro serviva al suo scopo. Aiutavano molto questo lavoro i moti medi dei pianeti definiti già da tempo con grande precisione grazie alle antiche osservazioni.

Gli astronomi, che dopo Keplero tentarono il calcolo delle orbite dei pianeti, furono sorretti sia dall'aiuto delle più recenti e accurate osservazioni, sia dai precedenti autorevoli risultati.

Non si trattava mai, infatti, di ottenere risultati

completamente nuovi, ma soltanto di correggere e migliorare i risultati precedenti.

Il principio di gravitazione universale, scoperto dal sommo Newton [Newton è l'unico scienziato per il quale Gauss usi il termine *summus*], aprì un campo del tutto nuovo, e mostrò che tutti i corpi celesti governati dalla forza di attrazione del Sole sarebbero stati soggetti a quelle stesse leggi con le quali Keplero aveva descritto il moto dei cinque pianeti [si ricorda qui che nel 1809 i pianeti, esclusa la Terra, erano ancora i cinque noti fin dall'antichità più remota, mancando all'appello Urano, Nettuno e Plutone]. In particolare Keplero aveva dichiarato, basandosi sulle osservazioni, che l'orbita di ogni pianeta era un'ellisse, nella quale le aree intorno al Sole, occupando esso un fuoco [Prima Legge] erano descritte uniformemente [Seconda Legge] e in modo tale che i tempi di rivoluzione nelle diverse ellissi fossero in rapporto sesquialtero con i semiassi maggiori [Terza Legge]. Reciprocamente Newton, stabilito il principio di gravitazione universale, mostrò a priori che tutti i corpi mossi dalla forza attrattiva del Sole si muovono in sezioni coniche, delle quali una sola specie, le ellissi, sono percorse dai pianeti, ma che le altre specie, ovvero le parabole e le iperboli, devono anche esse essere considerate ugualmente, dimostrò che il Sole occupa sempre un fuoco della conica; dimostrò che le aree, che lo stesso corpo descrive intorno al Sole in tempi diversi sono proporzionali a questi tempi e che le aree descritte da corpi diversi in tempi uguali intorno al Sole sono in ragione subduplicata dei semiparametri delle orbite. L'ultima di queste leggi, identica all'ultima legge di Keplero riguardo al moto ellittico, si estende al moto parabolico ed iperbolico, ai quali [quella] non può essere applicata, essendo mancanti le rivoluzioni. Oramai, trovato il filo conduttore, fu possibile entrare nel labirinto dei moti delle comete, prima inaccessibile. E questo fu felicemente fatto e per spiegare i moti di tutte le comete che erano state osservate con grande precisione fu sufficiente un'unica ipotesi, che le loro orbite erano parabole. Così il sistema di gravitazione universale aveva prodotto nuovi e splendidi trionfi dell'Analisi; e aveva permesso di controllare le comete, che fino a quel momento sembravano indomabili o, se domate, subito sediziose e ribelli.

A questo punto segue una lunga digressione sulla difficoltà pratica di applicare i metodi noti all'epoca di Newton alla determinazione di specifiche orbite paraboliche e delle varie approssimazioni accettate dagli astronomi dell'epoca. Tali approssimazioni sono chiamate da Gauss metodi speciali. Sentiamo quindi cosa l'autore ha da dire a proposito di tali metodi.

L'illustre Newton stesso, primo geometra del suo secolo, non nascondeva la difficoltà del problema [della determinazione cioè dei parametri orbitali delle orbite paraboliche a partire dai dati osservativi], tuttavia, come ci possiamo attendere, uscì vincitore anche da questa battaglia. Dopo Newton

1609  
1613

molti geometri applicarono il suo metodo allo stesso tipo di problemi [...]. E così, in ogni caso in cui fu necessario dedurre le orbite dei corpi celesti da osservazioni non si trascurarono delle opportunità [situazioni o configurazioni orbitali favorevoli] da sfruttare, opportunità che permettono o almeno inducono l'applicazione dei metodi speciali. Fra queste opportunità la più importante era quando si era già potuta raggiungere, tramite supposizioni ipotetiche, la conoscenza approssimata di alcuni elementi orbitali prima che il calcolo degli elementi fosse intrapreso.

Gauss passa adesso a descrivere le ragioni del suo interesse per la materia trattata nella sua opera.

[...] Similmente sembra abbastanza sorprendente che il problema generale **Determinare l'orbita di un corpo celeste dalle osservazioni senza nessuna supposizione ipotetica** [...] sia stato trascurato quasi del tutto fino all'inizio di questo secolo, o almeno sia stato seriamente o adeguatamente trattato da alcuno, avendo potuto senza dubbio [tale problema] affidarsi alla speculazione per la sua difficoltà ed eleganza, sebbene non ne fosse ancora chiaramente dimostrata l'utilità presso gli astronomi osservativi [practicos nel testo!]. È chiaro che presso tutti era prevalsa l'opinione mal fondata che fosse **impossibile** tale determinazione completa da brevi osservazioni condotte in un tempo limitato senza alcuna ipotesi aggiuntiva [...]

Nel mese di settembre dell'anno 1801, allora occupato in un lavoro del tutto diverso, mi erano venute in mente alcune idee che sembravano servire alla soluzione del grande problema di cui ho parlato. Spesso in tali circostanze, per non essere distratti da una piacevole ricerca in cui siamo impegnati, permettiamo che vadano perdute associazioni di idee, che avrebbero potuto portare frutti abbondanti, se esaminate con maggiore attenzione. [...]. È vero che circa nello stesso tempo la notizia di un nuovo pianeta scoperto nell'Osservatorio di Palermo il 1 gennaio di questo anno volava sulla bocca di tutti e subito le stesse osservazioni da quel momento fino all'11 febbraio intraprese dall'eccellente astronomo Piazzi giunsero come pubblica notizia. In verità negli annali dell'astronomia non troviamo un'occasione tanto pregnante [gravis nel testo] e a mala pena può essere immaginato qualcosa di più urgente [...] quando ogni speranza di ritrovare il corpuscolo sperduto da quasi un anno nei cieli tra innumerevoli stelle dipendeva in modo unico dalla conoscenza abbastanza approssimata dell'orbita, da costruire sopra a quelle poche e sole osservazioni. Forse mai avrei potuto sperimentare più a proposito le mie idee per un uso pratico, come per la determinazione dell'orbita di Cerere, e in che modo il pianeta aveva descritto un arco di soli 3 gradi geocentrici durante quei 41 giorni e dove avesse dovuto essere ricercato dopo un anno sperduto nello spazio del cielo in spazi remotissimi da lì. La prima applicazione di questo metodo fu effettuata nel mese di ottobre del 1801

e la prima notte serena, in cui il pianeta fu ricercato secondo la regola [...] lo rese rintracciabile alle osservazioni. Altri tre nuovi pianeti scoperti a partire da quel momento, fornirono nuove occasioni di esaminare e di dimostrare valida l'efficacia e l'universalità del metodo.

Molti astronomi speravano, dopo il ritrovamento di Cerere, che io rendessi pubblico il metodo di calcolo [...] in verità molteplici circostanze hanno ostacolato ciò: altri impegni, il desiderio di estrarre ancora più risultati e principalmente il desiderio di rivestire di maggior generalità, semplicità ed eleganza possibile il metodo sviluppato. Io non posso essere giudice del risultato, ma penso che non rimarrà deluso chi ha atteso. Infatti i metodi applicati hanno subito tanti e tali cambiamenti che fra la regola con la quale fu calcolata la prima volta l'orbita di Cerere e la regola insegnata in quest'opera è rimasta appena un legame. Sebbene in verità fosse alieno dal mio proposito scrivere una narrazione completa su tutte queste ricerche [...], in questa opera ho spiegato, oltre alle soluzioni dei principali problemi scientifici, quelle cose che mi si erano rivelate nella lunga occupazione intorno ai moti dei corpi celesti nelle sezioni coniche, sia grazie alla precisione analitica, sia principalmente nell'uso pratico. Tuttavia ho sempre dedicato una maggior attenzione al nuovo metodo, dedicandomi più superficialmente alle cose già note e soltanto fino a dove sembrava lo esigesse il nesso degli argomenti.

A questo punto Gauss elenca sommariamente il contenuto specifico delle varie parti dell'opera, che abbiamo già visto nel precedente paragrafo da un punto di vista più tecnico.



Fig. 3. Il ritratto di Gauss sulle banconote tedesche da 10 marchi.

Così tutta l'opera è divisa in due parti. Nel Libro primo sono studiate le relazioni tra le quantità dalle quali dipende il moto dei corpi celesti intorno al Sole, secondo le leggi di Keplero [...]. Così nel Libro primo si mostrano gli strumenti e le tecniche attraverso cui si porta a termine nel Libro secondo questo stesso arduo lavoro: la gran parte del lavoro infatti consiste adesso in questo e cioè che quelle tecniche siano collegate come si deve, siano disposte nel giusto ordine e siano dirette verso lo scopo preposto. I problemi più difficili sono stati illustrati per la gran parte con esempi pertinenti, sempre scelti, tutte le

volte che era possibile, da osservazioni reali. Così non solo sarà procurata una maggior fiducia nell'efficacia dei metodi stessi [...] ma anche spero che sarà assicurato che i meno esperti non siano distolti dallo studio di queste cose, che senza dubbio costituiscono la parte più feconda e bella dell'astronomia teorica.  
Gottinga, 28 marzo 1809

## Referenze

- [1] Gauss, C.F.: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, Amburgo, 1809.
- [2] Bell, E.T.: *I grandi matematici*, Sansoni, 1950.
- [3] Boyer, C.B.: *Storia della matematica*, Mondadori, 1980.
- [4] Gillespie, Ch.C. (Ed.): *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's Sons, New York, 1970-1980, ad vocem.
- [5] Teets, D., and Whitehead, K.: "The discovery of Ceres: how Gauss became famous", *Mathematics Magazine*, 1999, 72, p. 83.

**Luca Ciotti** è ricercatore astronomo presso l'Osservatorio Astronomico di Bologna e Astronomo Visitatore presso la Scuola Normale Superiore di Pisa. I suoi principali campi di interesse sono la dinamica delle galassie e le applicazioni della fluidodinamica in ambito astrofisico.

**Maria Novella Ciotti** si è laureata con una tesi in Storia della Chiesa basata su ricerche di documenti originali conservati presso l'Archivio Arcivescovile di Firenze.

# Terza scuola estiva della SAIIt in Calabria

La Società Astronomica italiana, l'Amministrazione Provinciale di Reggio Calabria ed il Comune di Stilo organizzano, presso il centro di didattica di Stilo (RC), la **Terza scuola estiva** della SAIIt in Calabria.

Il tema è: *Programmare per moduli: l'interdisciplinarietà della Astronomia.*

Al corso possono partecipare 30 docenti, equamente distribuiti tra gli insegnanti di materie scientifiche e umanistiche - storiche, filosofiche, artistiche - della scuola secondaria di secondo grado. Ai soci della Sezione Calabria della SAIIt viene riservato il 50% dei posti disponibili.

La priorità verrà stabilita dall'appartenenza allo stesso consiglio di classe dei docenti ed in subor-

dine dalla data di iscrizione al corso.

Le spese di viaggio sono a carico dei partecipanti mentre quelle di soggiorno sono a carico degli organizzatori.

È prevista una quota d'iscrizione di Lire 100.000. Il corso si terrà a Stilo dal 23 al 28 luglio 2001 ed il programma dettagliato sarà successivamente reso noto.

Le iscrizioni devono pervenire entro il 5 luglio a:  
Sezione Calabria della SAIIt  
Laboratorio di Didattica "Pitagora"  
C.P. 32, 89100 Reggio Calabria - tel. 0965-891017  
Contestualmente all'iscrizione deve essere effettuato il versamento.

## Errata Corrige

N. 1 del marzo 2001:

In copertina e a pag 1 il numero del volume è 27° e non 28°.

Pag. 3, fig. 2. Nella didascalia le scritte tra parentesi (a destra) e (a sinistra) sono invertite.

Pag. 29, colonna a destra, riga 10 dall'alto: dietro gentile segnalazione di alcuni lettori notiamo che la data corretta è 1609, anno di pubblicazione dell'*Astronomia Nova* di Keplero (dove compaiono le prime due leggi del moto planetario), e non 1809. Per completezza ricordiamo qui che la terza legge di Keplero compare per la prima volta nell'*Harmonices Mundi* del 1619 ed è, ovviamente, riferita ai pianeti allora conosciuti, mentre Urano venne scoperto solo nel 1781.