



GIORNALE DI ASTRONOMIA

Rivista di informazione, cultura e didattica
della Società Astronomica Italiana

Atti del Convegno

Il Sole nella Chiesa:

Cassini e le grandi meridiane come strumenti di indagine scientifica

Bologna, Archiginnasio, 22-23 settembre 2005



A cura di Fabrizio Bònoli, Gianluigi Parmeggiani e Francesco Poppi



Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali
Pisa • Roma

Marzo 2006
Volume 32° • N. 1
ISSN 0339-1106

Attualità di Gian Domenico Cassini

Luca Ciotti

Dipartimento di Astronomia · Università di Bologna

LA figura di Gian Domenico Cassini presenta notevole interesse non soltanto per lo storico della Scienza, ma anche per il ricercatore moderno. Sfortunatamente, alcuni notevoli risultati scientifici di Cassini sono noti solo a una minoranza di esperti che lavorano su specifici problemi di dinamica e ciò rischia di restituire un'immagine parziale di questo grande scienziato. Nella prima parte di questa breve presentazione cercherò, pertanto, di mettere in evidenza tali importanti conquiste, che Cassini enunciò nel 1693 in forma di "leggi" empiriche (Fig. 1).¹ Queste "leggi" e la loro scoperta sono tanto più notevoli quando si pensi che hanno trovato applicazione in astrofisica anche in tempi recenti (ad esempio, nell'ambito di ricerche sulla dinamica dei satelliti planetari e delle galassie) e che una loro piena spiegazione in termini dinamici è ancora argomento di indagine attiva. L'indubbia profondità di pensiero messa in luce dalle scoperte sopra ricordate sembra, pertanto, contrastare in maniera particolarmente stridente col fatto, altrettanto indiscutibile, che Cassini abbia legato il suo nome alla lunga diatriba sulla forma della Terra, diatriba che vide la famiglia dei Cassini sposare la tesi errata (e per un ricercatore moderno errata in maniera "assolutamente evidente") e Newton trionfatore indiscusso. Nella seconda parte di questa breve presentazione illustrerò, quindi, tale contesa, con la speranza di trasmettere al lettore come lo scienziato moderno (in maniera non necessariamente corretta dal punto di vista della storia della scienza) percepisca oggi l'illustre figura di G. D. Cassini.

Le tre "leggi" di Cassini

Cominciamo con l'enunciare in termini moderni le tre Leggi di Cassini relative al moto della Luna.

- 1) La Luna ruota con moto angolare uniforme attorno al proprio asse polare, con un periodo di rotazione uguale al periodo siderale medio di rotazione attorno alla Terra [ovvero, il periodo di spin della Luna coincide col periodo orbitale].
- 2) L'inclinazione dell'equatore lunare rispetto all'eclit-

¹ J.-D. CASSINI, *De l'origine & du progrès de l'Astronomie, & de son usage dans la Géographie & dans la Navigation ...*, in *Recueil d'observations faites en plusieurs voyages par ordre de Sa Majesté pour perfectionner l'astronomie et la géographie, avec diverses traités astronomiques par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences ...*, Imprimerie Royale, Paris, 1693



FIG. 1. Il trattato del 1693, nel quale Gian Domenico Cassini presentò le sue tre leggi "empiriche".

tica è costante e misura approssimativamente 1,5 gradi [ovvero, l'asse di spin della Luna conserva un'inclinazione costante sul piano dell'eclittica]

- 3) Il nodo ascendente dell'orbita lunare rispetto all'eclittica coincide con il nodo discendente dell'equatore lunare sull'eclittica [ovvero, l'asse di spin della Luna, la normale all'orbita lunare, e la normale all'eclittica si mantengono coplanari].

A una lettura superficiale, tali leggi possono apparire come "semplici" constatazioni circa lo stato dinamico della Luna (in particolare la prima che sembra essenzialmente affermare che la Luna «volge sempre la stessa faccia alla Terra»), ma dal punto di vista dinamico la cosa è molto meno ovvia: non soltanto la seconda e la terza legge sono intuitivamente molto meno "evidenti" della prima, ma anche la loro spiegazione in termini dinamici è notevolmente complicata. Infatti, senza entrare in dettagli tecnici che ovviamente esulano dalla pre-

sente trattazione, anche al non addetto ai lavori dovrebbe risultare abbastanza chiaro che il moto lunare non soltanto è complicato dal fatto che si tratta di un problema dei tre corpi Sole-Terra-Luna (talmente complicato che Newton stesso ebbe a scrivere che il problema del moto della Luna era stato il solo a provocargli il mal di testa), ma anche per un altro motivo che è all'origine degli studi successivi che descriveremo sommariamente in seguito, e che formano la base teorica delle 3 leggi di Cassini.

La difficoltà di una descrizione del moto lunare – anche prescindendo dall'azione del Sole – è dovuta al fatto che le dimensioni della Luna non sono trascurabili rispetto alle dimensioni dell'orbita lunare attorno alla Terra e questo fa sì che il campo mareale della Terra sia importante nel determinare la "forma" della Luna (e reciprocamente!).

Da un punto di vista dinamico, ne risulta, quindi, che il sistema Terra-Luna(-Sole) non può essere descritto come un semplice problema dei due (tre) corpi puntiformi, ma debba essere descritto come il moto di due corpi (eventualmente in orbita attorno ad un terzo) "deformati dai mutui campi gravitazionali". Ora, per un corpo la cui forma devii dalla forma sferica non è possibile esprimere il campo gravitazionale in maniera elementare (come invece si può fare nel caso di corpi perfettamente sferici, usando, ad esempio, il primo teorema di Newton): questa prima constatazione ci dice, quindi, che, in linea di principio, per calcolare il campo di gravità che la Terra esercita sulla Luna sarà necessario considerare la sua deviazione dalla forma sferica. In secondo luogo, quando si voglia calcolare il moto di un corpo non sferico (la Luna nel nostro caso) in un campo non uniforme (come quello prodotto dalla Terra) è necessario considerare anche la Seconda Equazione Cardinale della Dinamica. Tale equazione mette in relazione la variazione (vettoriale) del momento angolare del corpo in questione con la presenza di un momento torcente agente su di esso. Nel presente caso si può mostrare che tale momento torcente è dovuto proprio al fatto che la Luna non è un sistema perfettamente sferico. Da un punto di vista dinamico "moderno", tale effetto è descritto nelle equazioni del moto da un termine di "accoppiamento" tra il tensore mareale prodotto dalla Terra (in pratica descritto dalla matrice Hessiana del potenziale di monopolio) e il tensore d'inerzia della distribuzione di massa lunare (rappresentato da una matrice simmetrica 3×3). Chiaramente, indagini di questo tipo sono notevolmente difficili e fino a tempi recenti non si è raggiunta una comprensione sufficientemente completa dei tipi di moto che possono aver luogo in presenza di tali accoppiamenti.

Forse, uno dei più significativi lavori sull'argomento è stato intrapreso dal grande meccanico celeste italiano Giuseppe (Bepi) Colombo, i cui risultati più importanti sono stati pubblicati in un

articolo del 1966:² in tale lavoro è stato mostrato, tra le altre cose, come la seconda e terza legge di Cassini siano «dinamicamente indipendenti» dalla prima (FIG. 2).

In tempi più recenti, l'indagine circa l'origine delle leggi di Cassini è stata ulteriormente approfondita lungo altre linee di ricerca. In ambito planetario, ad esempio, si è cominciato a considerare gli effetti dissipativi dovuti alla viscosità dei corpi planetari che conducono al raggiungimento e alla successiva stabilizzazione di certe posizioni di equilibrio orbitale, per l'appunto descritte dalle leggi di Cassini. Possiamo citare ad esempio, a tal proposito, l'abstract di un recente articolo comparso sulla rivista internazionale di studi planetari *Icarus*:³

«Satellite spin states evolve under the action of solid body torques and tidal forces. The tidal effects result in a damping of fast spin rates and, ultimately, in the locking of the spin into what are known as **Cassini states**».

Un'altra direzione in cui, sorprendentemente, gli stati di Cassini sono ricomparsi in maniera inaspettata è stata l'indagine del problema dell'allineamento delle galassie ellittiche negli ammassi di galassie.



FIG. 2. La prima pagina dell'articolo del 1966 di Giuseppe Colombo su *Astronomical Journal*, nel quale si fa riferimento all'attualità di Cassini nel titolo e sin dalle prime righe.

² G. COLOMBO, *Cassini's Second and Third Laws*, «Astronomical Journal», 1966, vol. 71, p. 891.

³ B. GLADMAN, D. D. QUINN, P. NICHOLSON, R. RAND, *Synchronous locking of tidally evolving satellites*, «Icarus», 1996, vol. 122, p. 166.

Le osservazioni mostrano, infatti, che le galassie ellittiche tendono a trovarsi con il loro asse maggiore preferenzialmente allineato lungo la direzione radiale nell'ammasso di appartenenza, mentre una piccola minoranza di esse è invece disposta con l'asse minore allineato lungo la direzione radiale dell'ammasso. Nei lavori *Alignment and morphology of elliptical galaxies: the influence of the cluster tidal field*⁴ e *Motion of a rigid body in a tidal field: an application to galaxies in clusters*,⁵ rispettivamente del 1994 e del 1998, si è mostrato come le equazioni del moto della dinamica, descriventi l'accoppiamento tra campo di marea dell'ammasso e momento di inerzia delle galassie ellittiche al suo interno, ammettono due posizioni di equilibrio coincidenti con le due configurazioni osservate, che risultano pertanto a tutti gli effetti stati di Cassini; di tali stati si è potuto anche provare analiticamente la stabilità.

Il naturale sviluppo delle precedenti indagini ha portato allo studio delle oscillazioni di una galassia attorno al suo stato di Cassini in un ammasso non sferico (tali oscillazioni in ambito planetario sono ben note e vanno sotto il nome di "librazioni").

In particolare, nel recentissimo lavoro *Collisionless evaporation from cluster elliptical galaxies*,⁶ si è mostrato come i tempi caratteristici delle oscillazioni di una galassia attorno al suo stato di Cassini sono curiosamente dello stesso ordine di grandezza dei periodi orbitali stellari nelle regioni periferiche delle galassie stesse. Ora, in dinamica, ogni volta che si hanno periodi confrontabili in un sistema, si è in una condizione che può condurre a risonanze. Nel lavoro appena citato si è fatto vedere, mediante integrazione numerica di varie decine di migliaia di orbite stellari, che una frazione non trascurabile di stelle potrebbe essere "estratta" dalla galassia di appartenenza e perduta nell'ammasso per l'azione di tali risonanze. È degna di nota l'evidenza osservativa (molto recente) di una popolazione di stelle *intracluster* di incerta origine: si potrebbe pensare che tale popolazione sia prodotta proprio dalle risonanze di galassie che stanno oscillando vicino ai loro stati di Cassini!

La strana contesa sulla forma della Terra

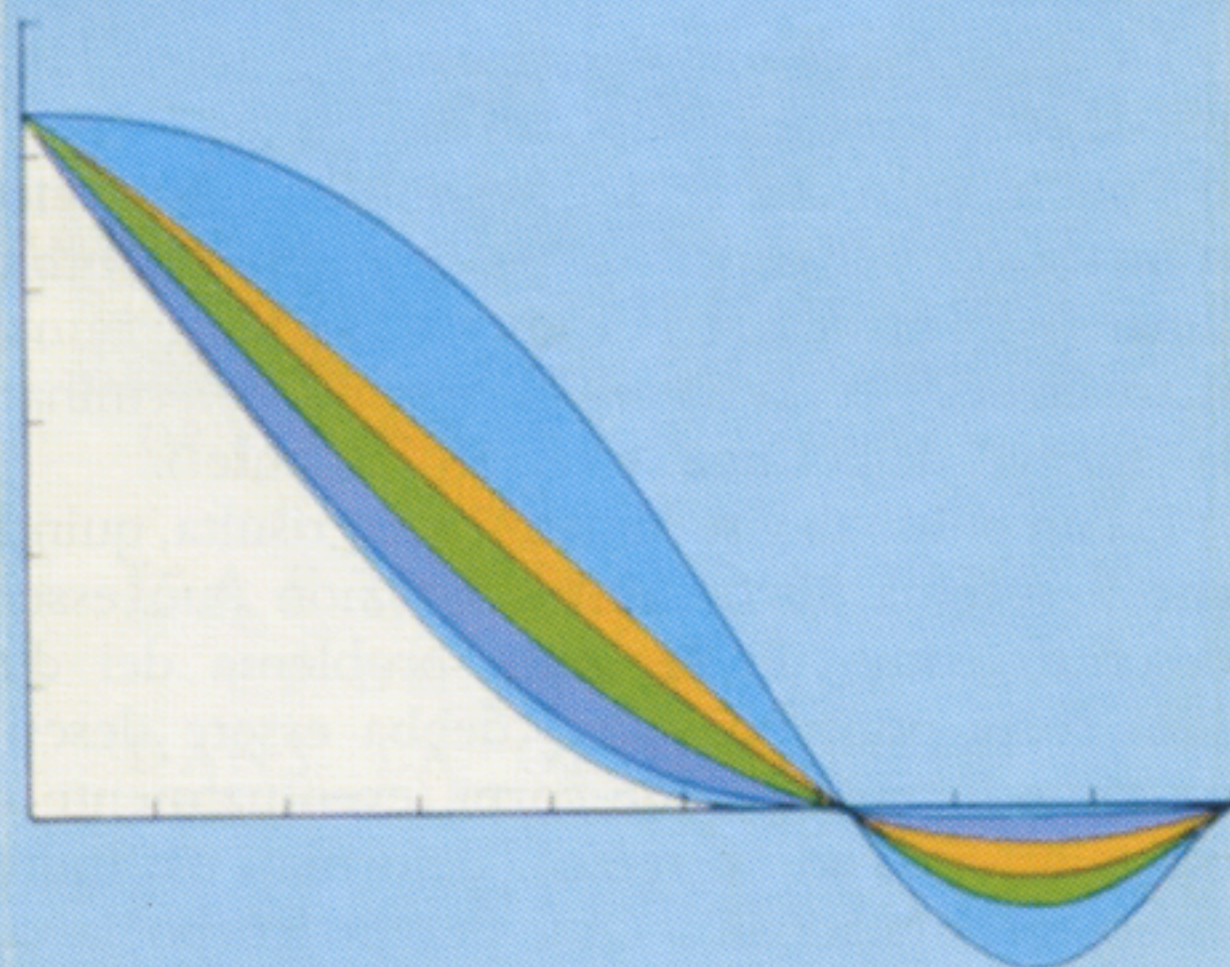
Anche se necessariamente condensato, il precedente riassunto dovrebbe aver reso chiara la grande ampiezza e profondità di pensiero di Gian Domenico Cassini. Proprio per questo motivo, lo studioso moderno (come ad esempio chi scrive) tro-

⁴ L. CIOTTI, S. N. DUTTA, «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society», 1994, vol. 270, p. 390.

⁵ L. CIOTTI, G. GIAMPIERI, «Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy», 1998, vol. 68, p. 313.

⁶ V. MUCCIONE, L. CIOTTI, «Astronomy & Astrophysics», 2004, vol. 421, p. 583.

Ellipsoidal Figures of Equilibrium



S. Chandrasekhar

FIG. 3. Copertina del volume *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* di Chandrasekhar nell'edizione Dover del 1987.

va tanto più sorprendente e difficilmente comprensibile la diatriba sulla forma della Terra alla quale prese parte l'intera dinastia dei Cassini, sposando una tesi che oggi appare clamorosamente errata. In particolare, mentre Newton sosteneva che la Terra doveva essere schiacciata ai poli per effetto della rotazione attorno al proprio asse (arrivando fino a calcolarne quantitativamente lo schiacciamento che si sarebbe dovuto misurare), i Cassini sostenevano che la Terra era "allungata" ai poli (in quella che si dice essere la forma di un ellissoide prolato). Una piacevole descrizione di alcuni aspetti di questa contesa può essere trovata nel classico trattato di Subramanyan Chandrasekhar *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* (Yale University Press, 1969, FIGG. 2, 3a, 3b) di cui riportiamo qui soltanto le parti più salienti:

«[...] "two generations of the best astronomical observers formed at the school of the Cassinis struggled in vain against the authority and reasoning of Newton" [...]. The opposing ideas of Newton and Cassini are strikingly illustrated in the accompanying caricature (FIG. 2). However geodetic measurements made in Lapland by Maupertuis and Clairaut (1738) afforded data which conclusively showed the flattening of the earth at the poles, as Todhunter has written [...], "The success of the arctic expedition may be ascribed in great measure to the skill and energy of Maupertuis and his fame was

the “dilution factor” remains constant and is given by its value at the boundary, namely m .

If a denotes the equatorial radius, the weight of the equatorial column is given by

$$\text{weight of equatorial column} = \frac{1}{2}ag_{\text{equator}}(1-m), \quad (4)$$

where g_{equator} is the acceleration due to gravity at the equator. Similarly, if b denotes the polar radius,

$$\text{weight of polar column} = \frac{1}{2}bg_{\text{pole}}. \quad (5)$$

And since the two weights must be equal,

$$ag_{\text{equator}}(1-m) = bg_{\text{pole}}. \quad (6)$$

But for a slightly oblate body Newton knew that

$$\frac{g_{\text{pole}}}{g_{\text{equator}}} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2). \quad (7)$$

Equations (6) and (7) and the definition of $\epsilon (= 1 - b/a)$ now give

$$1-m = (1-\epsilon)(1+\frac{1}{2}\epsilon) + O(\epsilon^2) = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + O(\epsilon^2); \quad (8)$$

and Newton's relation (3) follows.

It was known already in Newton's time that

$$m = \frac{1}{296}. \quad (9)$$

Therefore, Newton concluded that if the earth were homogeneous, it should be oblate with an ellipticity

$$\epsilon = \frac{5}{4} \frac{1}{296} \approx \frac{1}{230}. \quad (10)$$

This prediction of Newton was contrary to the astronomical evidence of the time and “two generations of the best astronomical observers formed in the school of the Cassinis struggled in vain against the authority and reasoning of Newton” (Todhunter's *History*, 1, 100). The opposing ideas of Newton and Cassini are strikingly illustrated in the accompanying old caricature (Fig. 2). However, geodetic measurements made in Lapland by Maupertuis and Clairaut (1738) afforded data which conclusively showed the flattening of the earth at the poles. As Todhunter has written (1, 100), “The success of the arctic expedition may be ascribed in great measure to the skill and energy of Maupertuis; and his fame was widely celebrated. The engravings of the period represent him in the costume of a Lapland Hercules having a fur cap over his eyes; with one hand he holds a club and with the other he compresses the

FIGG. 4a, b. Le due pagine, nell'introduzione storica di Chandrasekhar al suo *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, in cui lo scienziato indiano, Nobel per la Fisica nel 1983, illustra l'argomento centrale della contesa tra Newton e la famiglia dei Cassini.

widely celebrated. The engravings of the period represent him in the costume of a Lapland Hercules having a fur cap over his eyes, with one hand he holds a club and with the other he compresses the terrestrial globe”. And Voltaire, then Maupertuis' friend, congratulated him warmly for having “aplati les poles et les Cassini”. Later Maupertuis and Voltaire became involved in a heroic-comic controversy and Voltaire wrote “Vouz avez confirmé dans les lieux pleins d'ennui Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.”.

terrestrial globe.” And Voltaire, then Maupertuis' friend, congratulated him warmly for having “aplati les poles et les Cassini.” Later Maupertuis and Voltaire became involved in a heroic-comic controversy and Voltaire wrote

Vouz avez confirmé dans les lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.

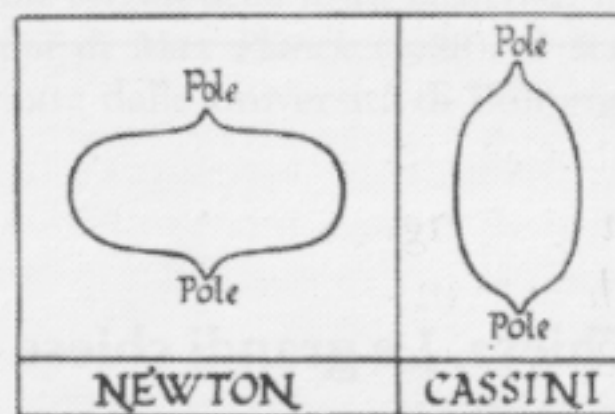


FIG. 2. An old-time caricature of the controversy between the opposing schools of Newton and Cassini with respect to the figure of the earth.

We know now that the actual ellipticity of the earth ($\sim 1/294$) is substantially smaller than Newton's predicted value ($\sim 1/230$); and this discrepancy is interpreted in terms of the inhomogeneity of the earth.

2. Maclaurin

The next advance (1742) in the theory was due to Maclaurin who generalized Newton's result to the case when the ellipticity caused by the rotation cannot be considered small.

Maclaurin had solved earlier the problem of the attraction of an oblate spheroid at an internal point; and he had shown in particular that the acceleration due to gravity at the equator and at the poles have the values

$$g_{\text{equator}} = 2\pi G\rho a \frac{(1-e^2)^{3/2}}{e^3} [\sin^{-1}e - e(1-e^2)^{1/2}]$$

$$\text{and} \quad g_{\text{pole}} = 4\pi G\rho a \frac{(1-e^2)^{3/2}}{e^3} [e - (1-e^2)^{1/2} \sin^{-1}e], \quad (11)$$

where ρ is the density of the spheroid, a its semi-major axis, and e its eccentricity. And since both the centrifugal acceleration in the equatorial plane and the acceleration due to gravity vary linearly with the coordinates, Newton's argument applies to this case equally well and we can write

$$g_{\text{equator}} - a\Omega^2 = g_{\text{pole}}(1-e^2)^{3/2}, \quad \text{or} \quad \Omega^2 = \frac{1}{a} [g_{\text{equator}} - g_{\text{pole}}(1-e^2)^{3/2}]. \quad (12)$$

Indubbiamente, il passo sopra riportato ha influito in maniera negativa sull'immagine che di Gian Domenico Cassini hanno i ricercatori moderni. Spero pertanto, con questo mio breve riassunto, di aver portato all'attenzione del lettore altri aspetti meno noti della personalità scientifica di Cassini che possano darne un'idea più bilanciata, fermo restando la “sorpresa” generata dalla scelta di campo “perdente” nella contesa col grande Newton.

Luca Ciotti, nato a Firenze nel 1964, attualmente è professore associato presso il Dipartimento di Astronomia dell'Università di Bologna. I principali interessi di ricerca riguardano la dinamica delle galassie, l'idrodinamica del mezzo interstellare e intracluster e la teoria dell'accrescimento su buchi neri al centro delle galassie.