Università degli Studi di Bologna

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Dipartimento di Astronomia

Corso di Laurea in Astronomia

Materia di Tesi: Astrofisica

SIMULAZIONE NUMERICA DELL'INTERAZIONE DI UNA SUPERNOVA DI TIPO II CON IL MEZZO CIRCUMSTELLARE.

Tesi di Laurea

di:

LUCA CIOTTI

Relatore:

Chiar.mo Prof.

ANTONIO MESSINA

Correlatore:

Dott. ANNIBALE D'ERCOLE

Sessione Estiva

Anno Accademico 1987-88

Università degli Studi di Bologna

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Dipartimento di Astronomia

Corso di Laurea in Astronomia

Materia di Tesi: Astrofisica

SIMULAZIONE NUMERICA DELL'INTERAZIONE DI UNA SUPERNOVA DI TIPO II CON IL MEZZO CIRCUMSTELLARE.

Tesi di Laurea

di:

LUCA CIOTTI

Relatore:

Chiar.mo Prof.

ANTONIO MESSINA

Correlatore:

Dott. ANNIBALE D'ERCOLE

Sessione Estiva

Anno Accademico 1987-88

SIMULAZIONE NUMERICA

DELL'INTERAZIONE DI UNA SUPERNOVA DI TIPO II

COL MEZZO CIRCUMSTELLARE

Indice

1-INTRODUZIONE 1

1.1.Le supernovae 2

1.1.1.Curva di luce 3

1.1.2.Luogo dell'esplosione 7

1.1.3.Spettri 7

1.2.Cenni di evoluzione stellare 10

1.2.1.SNII 28

1.2.2.SNI 29

1.3.Venti stellari 31

1.3.1.Vento nelle giganti blu 31

1.3.2.Vento nelle giganti e supergiganti rosse 34

2-IL BUBBLE 36

2.1.Le ipotesi di lavoro 36

2.2.Discussione delle ipotesi di lavoro 37

2.3.Le equazioni 43

2.4.I risultati in letteratura 45

2.4.1.La fase di espansione libera 47

2.4.2.La fase adiabatica 48

2.4.3.La fase isoterma 54

2.4.4.La fase di dispersione 57

2.5.Struttura degli shock 57

2.6.La conduzione e il campo magnetico 59

2.7.Il caso disomogeneo 60

3-LA SUPERNOVA 66

3.1.Il modello per l'esplosione 66

3.2.L'evoluzione di un SNR 68

3.2.1.La soluzione di Sedov 68

3.2.2.La fase radiativa 73

3.2.3.La soluzione di Chevalier 74

3.3.Il nostro programma 79

4-I RISULTATI 83

4.1.Le fasi evolutive 83

4.2.La fase I 83

4.3.La fase A 86

4.3.1.La fase A_{Ch} 86

4.3.2.La fase A_{Se} 92

4.4.La fase S 93

4.5.Una visione d'insieme 100

5-DISCUSSIONE 103

5.1.Un'eventuale fase RG 103

5.2.La ricombinazione 105

6-APPENDICE A 108

6.1.Le equazioni della fluidodinamica 108
6.2.Relazioni di Rankine-Hugoniot 114
6.3.Cenni sulle soluzioni autosimili 116

7-APPENDICE B 118

7.1.Gli schemi numerici 119
7.2.La griglia 120
7.3.L'advezione 125
7.3.1.Il Time-Splitting 125
7.3.2.Il termine advettivo 126
7.3.3.La tangente 130
7.4.Il passo temporale 131
7.5.Il programma 132
7.6.Lo SLIC 138

8-APPENDICE C 140

8.1.La subroutine 'DESTRA' 140

9-BIBLIOGRAFIA 148

1-INTRODUZIONE

Le stelle massicce, che terminano la loro vita come supernovae di tipo II, durante la loro permanenza in sequenza principale subiscono notevoli perdite di massa per l'azione di imponenti flussi di materia dalle loro zone superficiali. Tali perdite di massa sono dette *venti stellari*. La loro azione modifica profondamente il mezzo circumstellare preesistente, sia esso omogeneo o disomogeneo, creando attorno alla stella una grande struttura cava, riempita di gas caldo, detta "*bubble*".

Quando la stella esplode, il materiale espulso (ejecta) si trova quindi ad interagire con un mezzo circumstellare altamente modificato, che rende molto complessa l'evoluzione del resto di supernova (SNR). Si rende quindi necessario un approccio numerico per una dettagliata comprensione del fenomeno.

In questa tesi sarà affrontato numericamente il problema dell'interazione di una supernova di tipo II con il bubble precedentemente prodotto dall'azione del vento stellare sul mezzo circumstellare. Tutto questo con l'ausilio di alcune ipotesi semplificatrici delle quali in seguito si discuterà estesamente.

§ 1.1.Le supernovæ

Le supernovae sono tra gli eventi più violenti osservabili su scala stellare. Tanto grandi sono le luminosità che vengono raggiunte in questo fenomeno che, malgrado si tratti di eventi di una relativa rarità osservativa, già in epoche remote si ha traccia di osservazioni di supernovae.

Le testimonianze di queste osservazioni sono giunte fino a noi: le più famose sono riportate nella tabella sottostante, che comprende le SN osservate prima che il telescopio fosse introdotto.

SN storiche		
Nome	*Anno*	*Tipo*
Lupo	1006	I (?)
Crab	1054	II (?)
1181	1181	II (?)
Tycho	1572	I
Keplero	1604	I
CasA	~ 1680	I (?)

fig.1.1-Le supernovae storiche

Osservativamente, i dati che si possono ottenere dopo l'esplosione di una supernova e che consentono poi di indagare sulla reale natura di questo fenomeno, sono i seguenti:

(i) il **luogo dell'esplosione**, ossia il tipo di galassia che ospitava la stella esplosa e la posizione della stella all'interno della galassia stessa (disco, bracci,

alone,...)

(ii) la **curva di luce**, ossia l'andamento temporale della quantità di energia luminosa irradiata dopo l'esplosione

(iii) lo **spettro**, che offre, qualora lo si riesca ad interpretare, importantissime informazioni, come la composizione chimica e la velocità dell'ejecta.

Le supernovae non rappresentano una categoria omogenea di fenomeni astronomici, nel senso che, mentre certe caratteristiche sono comuni a tutte le supernovae osservate, alcune peculiarità sembrano escludersi reciprocamente. Infatti, in base ai dati osservativi sopra indicati, le supernovae osservate (circa mezzo migliaio e tutte in galassie esterne) sono divisibili in due grandi classi. D'ora in poi non parleremo dunque più, genericamente, di "supernova" ma specificheremo anche di quale "*tipo*" di supernova stiamo parlando. Ci riferiremo d'ora in poi a *supernovae di tipo I* (SNI) e a *supernovae di tipo II* (SNII).

Vediamo ora in breve quali sono le differenze fondamentali delle varie caratteristiche dell'esplosione che possono essere osservate e che permettono di eseguire la divisione in tipi suindicata.

1.1.1.Curva di luce

La caratteristica osservativa che meglio permette di distinguere in due classi le supernovae sono le loro curve di luce.

Queste si possono infatti ripartire in due grandi gruppi. Ad uno di questi appartengono curve di luce che sono fra loro estremamente simili, addirittura sovrapponibili con buonissima approssimazione. Questo testimonia senz'altro che i fenomeni fisici che sono alla base dell'esplosione delle supernovae che mostrano tali curve di luce sono gli stessi, così come il valore dei parametri

che regolano le *modalità* dell'esplosione stessa (massa della stella, velocità del materiale espulso, etc).

Le supernovae appartenenti a questo gruppo sono dette supernovae di tipo I (SNI).

Le curve di luce delle SNI presentano indistintamente un'ascesa rapidissima (dell'ordine di giorni o addirittura di ore), una luminosità al massimo di circa $4 \cdot 10^9 L_\odot$ (d'ora in poi un qualunque simbolo $X_\odot$ si intenderà riferito al Sole: perciò $L_\odot = 3.862 \cdot 10^{33}\, erg\, s^{-1}$).

Il massimo di luminostà si protrae per circa una ventina di giorni, rimanendo in questo periodo di tempo abbastanza stabile. Poi la luminosità inizia a diminuire: al principio di 1/15 in 55 giorni, poi si ha una caduta regolare, di tipo esponenziale, con una riduzione della metà ogni 35 giorni circa:

$$L = L_0 e^{-\alpha t}. \tag{1.1.1}$$

In figura 1.2 è rappresentata la caratteristica curva di luce delle SNI, ottenuta sovrapponendo le curve di 38 SNI. In ascissa si ha il tempo t, misurato in giorni, mentre in ordinata si ha la *magnitudine assoluta*, di cui ricordiamo la definizione:

$$M_{*V} = -Log_{10}\left(\frac{L_*}{L_\odot}\right) + M_{\odot V}, \tag{1.1.2}$$

$$M_{\odot V} = +4.77\ . \tag{1.1.3}$$

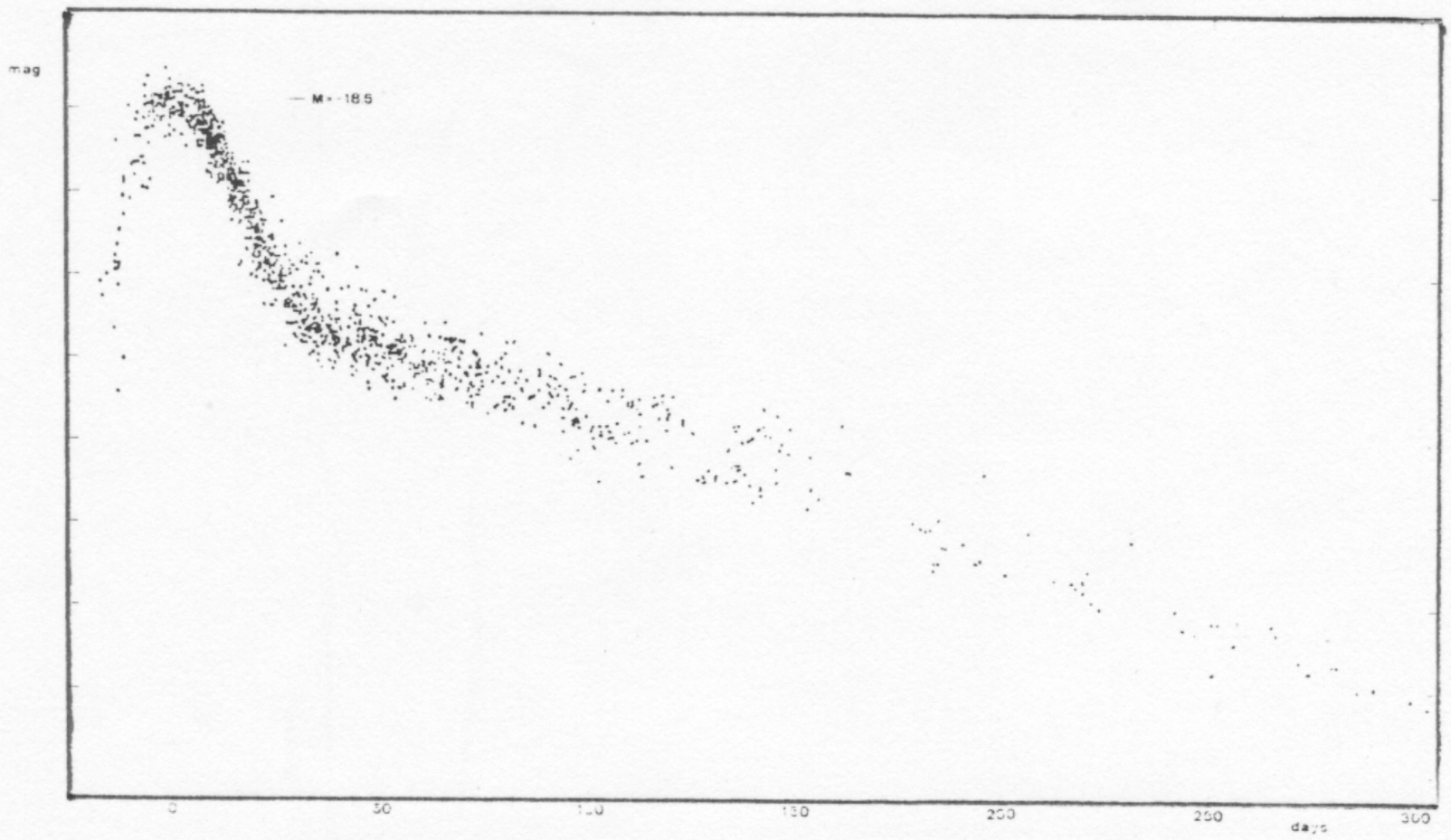
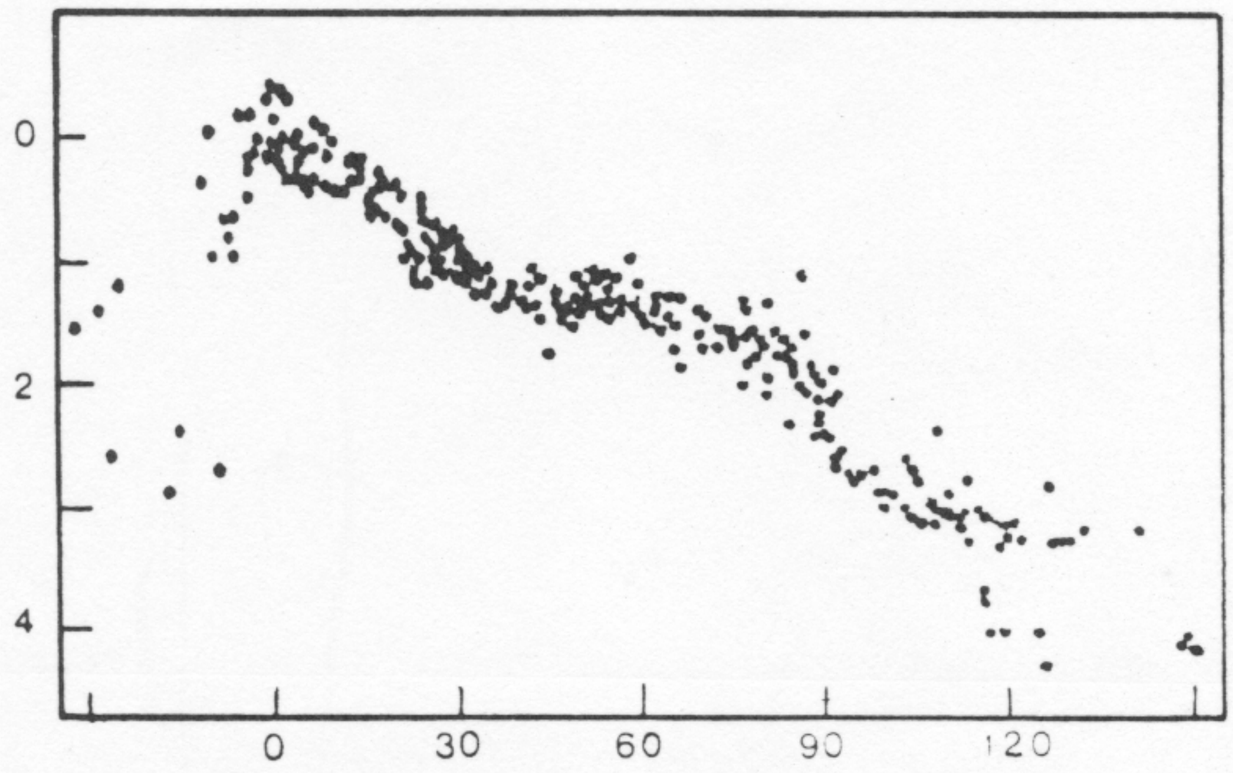


fig.1.2-Curva di luce di SNI

Le supernovae rimanenti, ossia quelle che non sono riconducibili alle SNI, hanno curve di luce molto più varie. Tuttavia anche in queste curve di luce, seppur con meno evidenza e molta più dispersione, si possono individuare 2 tipi ricorrenti di andamento. Perciò anche le supernovae che non sono SNI possono essere classificate in qualche modo introducendo però almeno due sottoclassi. Una caratteristica comune alle due sottoclassi è un aumento di luminosità comunque piú lento rispetto a quello delle SNI, mentre la successiva diminuzione, oltre ad essere diversa nelle due sottoclassi, varia molto anche da supernova a supernova.

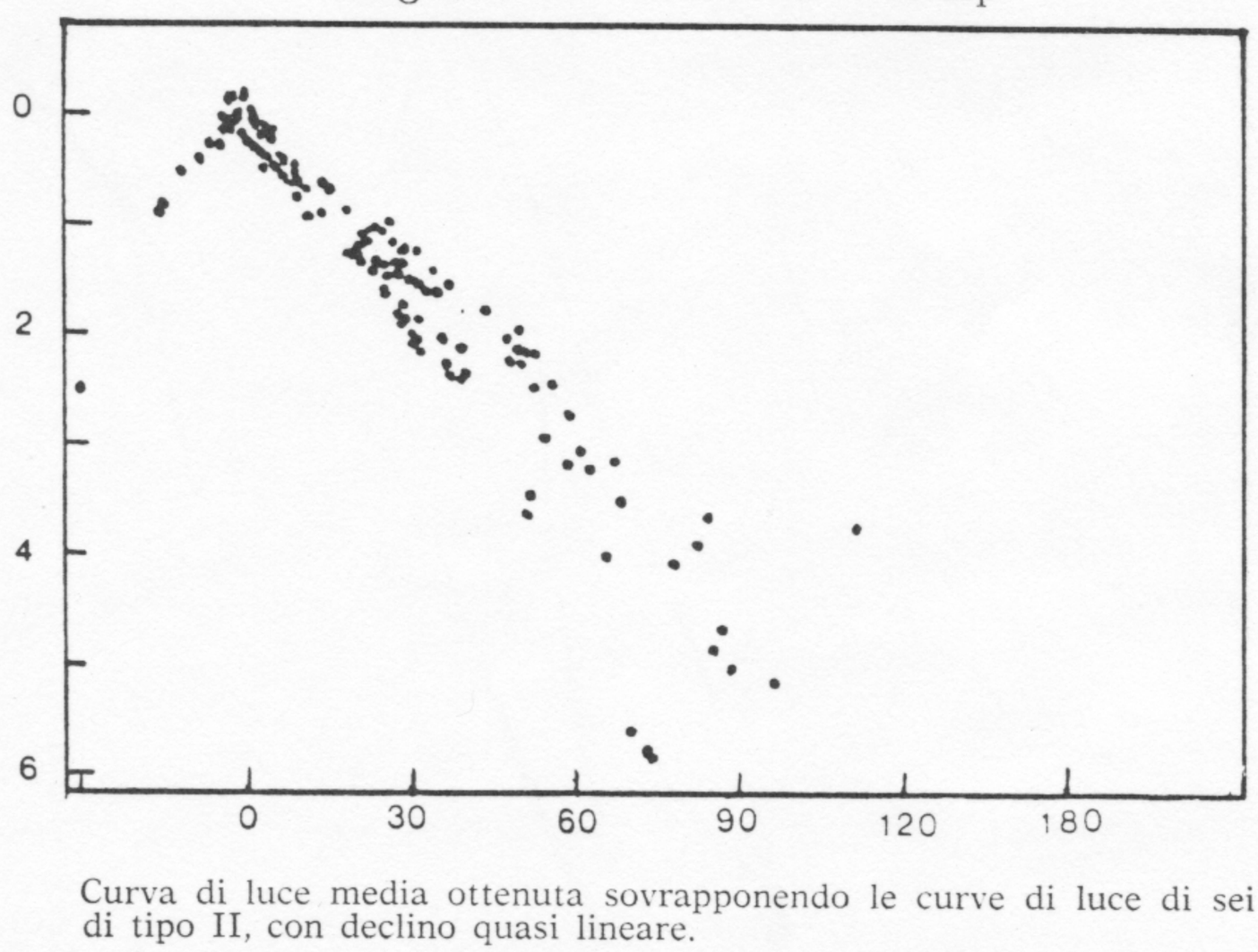
Le supernovae appartenenti a questa seconda classe sono dette supernovae di tipo II (SNII). Si osserva che le SNII nella fase di massimo sono in media meno luminose delle SNI, raggiungendo "soltanto" $3 \cdot 10^8 L_\odot$.

In figura 1.3a e 1.3b sono rappresentate le curve di luce caratteristiche delle due principali classi di supernovae di tipo II.



Curva di luce media ottenuta sovrapponendo le curve di luce di quindici SN di tipo II, che presentano un « plateau » nel ramo discendente.

fig.1.3a-Curva di luce di SNIIp



Curva di luce media ottenuta sovrapponendo le curve di luce di sei SN di tipo II, con declino quasi lineare.

fig.1.3b-Curva di luce di SNIIl

La distinzione fra queste due sottoclassi è dovuta al fatto che, mentre in un sottotipo di SNII, dette SNIIp, la curva discendente presenta un *pianerottolo*, in cui la luminosità si mantiene praticamente costante, nell'altro, detto SNIIl, la discesa avviene in maniera lineare, che ricorda le SNI.

1.1.2.Luogo dell'esplosione

Importanti ai fini di un giusto inquadramento del problema sono anche le informazioni statistiche circa le galassie in cui maggiormente si concentrano i due tipi di supernovae. Così, mentre le SNI si osservano esplodere in ogni tipo di galassia, le SNII sembrano trovarsi soltanto nelle spirali e nelle irregolari e mai nelle ellittiche.

Questo è un dato molto significativo, in quanto sappiamo che nei bracci delle spirali sono ancora attivi processi di formazione stellare, mentre nelle ellittiche è ormai cessata ogni attività di questo tipo. Ciò significa allora che le SNI sono stelle "vecchie", e questo significa anche che la loro massa non può essere molto grande.

Al contrario le SNII, proprio per la loro assenza nelle galassie ellittiche devono essere stelle più giovani dei progenitori delle SNI e questo significa che la loro massa è più grande di qualche massa solare (vedi § **1.2.Cenni di evoluzione stellare**).

1.1.3.Spettri

Le curve di luce non sono la sola differenza significativa fra i due tipi di supernova. Il fatto che anche gli spettri presentino differenze notevoli fra le SNI e le SNII indica che la suddivisione fatta è certamente significativa: quindi i due tipi di supernova rappresentano veramente due fenomeni fisici essenzialmente

diversi. Gli spettri delle SNII presentano larghe bande di emissione di H , HeI, HeII, FeII, ed indicano velocità di espulsione della materia stellare dell'ordine di $15000\,km\,s^{-1}$. Gli spettri delle SNI, al contrario, sono molto più enigmatici: essi mostrano una successione di bande in assorbimento ed in emissione talmente complessa che ne rende estremamente difficile l'interpretazione.

Focalizzando l'attenzione sulle SNII, che sono quelle che più da vicino ci interessano in questo lavoro, sottolineiamo la presenza nei loro spettri delle righe dell'idrogeno, che invece mancano nelle SNI.

Questo fatto suggerisce ancora una volta che i progenitori delle SNII siano stelle massicce, la cui notevole massa conduce velocemente alla fine (vedi *Legge Massa-Luminosità*, (§ **1.2.Cenni di evoluzione stellare**).

Dal punto di vista qualitativo, molti dei meccanismi che conducono una stella ad esplodere come supernova sono abbastanza chiari, anche se alcuni punti sono ancora fonte di controversia fra i teorici.

Diamo qui di seguito una tabella riassuntiva delle principali grandezze associate al fenomeno di esplosione dei due tipi di supernova:

DISTRIBUZIONE ENERGETICA* DEI DUE TIPI DI SN

	E_{tot}	E_{cin}	E_{rad}	E_{neu}
SNI	10^{51}	10^{51}	10^{49}	10^{49}
SNII	10^{53}	10^{51}	10^{49}	10^{53}

* Le energie sono date in erg

fig.1.4-Energetica delle SN

* * * * *

Come è già stato accennato all'inizio, scopo di questa tesi è lo studio dell'interazione fra il materiale espulso nell'esplosione di una SNII ed il mezzo circumstellare precedentemente modificato dal vento del progenitore. Un ruolo importante è allora assunto dal modo con cui la stella si è evoluta verso la sua fine. Nel prossimo paragrafo analizzeremo quindi i principali punti dell'evoluzione di una stella di $20M_{\odot}$ (vedi ad es. Maeder e Chiosi, 1986), che assumeremo essere il precursore della supernova da noi studiata.

§ 1.2.Cenni di evoluzione stellare

Uno degli strumenti più importanti ai fini della comprensione dell'evoluzione stellare è il *diagramma di Hertzsprung- Russel*.

Osservativamente di una stella possiamo avere lo *spettro*, ossia la decomposizione della sua luce nelle varie componenti alle diverse lunghezze d'onda, e la *magnitudine*, definita come segue:

$$m_* = -2.5 Log_{10} l_* + \text{cost.}, \tag{1.2.1}$$

dove l_* è la luminosità della stella. La luminosità di una stella è collegata alla sua *luminosità assoluta* L_* (definita come la quantità di energia che ogni secondo lascia la superficie stellare) dalla formula seguente

$$l_* = \frac{L_*}{4\pi d_*^2}, \tag{1.2.2}$$

dove d_* è la distanza della stella dall'osservatore.

Si dice poi *magnitudine assoluta* di una stella la magnitudine che essa avrebbe se fosse portata alla distanza di 10 parsec (1parsec=1pc=$3 \cdot 10^{18}$cm) dall'osservatore.

La relazione fra la magnitudine e la magnitudine assoluta di una stella è data da:

$$M_* - m_* = 5 - 5 Log_{10} \left(\frac{d_*}{pc} \right). \tag{1.2.3}$$

Le misure di magnitudine possono essere fatte a diverse lunghezze d'onda: si parlerà cosìdi magnitudine nell'*ultravioletto* (U), nel *blu* (B), nel *visibile* (giallo) (V).

Usando questi tre tipi di magnitudine si costruisce una grandezza molto usata in Astrofisica, detta *indice di colore*, che viene comunemente definito come:

$$m_U - m_B \equiv U - B \quad ; \quad m_B - m_V \equiv B - V. \tag{1.2.4}$$

Osservando dalla (1.2.1) che, quanto maggiore è la luminosità di una stella tanto minore è il numero che esprime la sua magnitudine, dalla (1.2.4) si deduce immediatamente che gli indici di colore di una stella blu sono negativi, mentre per una stella rossa sono positivi, in quanto una stella blu è più luminosa nel blu che nel giallo, al contrario di una stella rossa.

Essendo poi le atmosfere stellari dei radiatori quasi perfetti, possiamo considerarle in prima approssimazione un "*corpo nero*", e quindi dedurne la *temperatura effettiva*, definita come la temperatura che un corpo nero dovrebbe avere per irradiare lo stesso quantitativo di energia:

$$\lambda_{\max} \cdot T_*^{eff} = 0.29\, K\, cm^{-1}. \tag{1.2.5}$$

A questo punto, se conosciamo il valore di d_*, è possibile misurare anche il raggio della stella, usando le seguenti relazioni:

$$L_* = (4\pi R_*^2 \sigma)(T_*^{eff})^4, \tag{1.2.6}$$

dove σ è la costante di Stefan,

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5}\, erg\, cm^{-2}\, s^{-1}. \tag{1.2.7}$$

Osserviamo infine che lo spettro di ogni stella dipende, oltre che dalla composizione chimica della materia stellare, anche dalla temperatura: elementi

diversi infatti, in condizioni di temperatura, pressione e densità diverse danno righe diverse, in assorbimento come in emissione. Per questo si usa classificare le stelle anche in base ai loro *tipi spettrali*. In ordine di temperatura decrescente si ha (ciascun tipo è diviso in dieci sottotipi, indicati con un numero da 0 a 9):

$$W;\ O,\ B,\ A,\ F,\ G,\ K,\ M;\ C(N,\ R,\ S) \tag{1.2.8}$$

(i due tipi W e C sono classi particolari).

In realtà le cose sono molto più complesse, poichè una grande quantità di effetti, (uno fra tutti, l'assorbimento delle polveri interstellari), si oppone ad una corretta stima dei vari parametri sopra ricordati. Ma in linea di principio i ragionamenti esposti sono sufficienti per i discorsi che svilupperemo.

Abbiamo accennato all'inizio del paragrafo del diagramma H-R: ora possiamo essere più precisi e dire che questo diagramma mette in relazione, per ogni stella studiata, l'indice di colore (o la temperatura effettiva, o il tipo spettrale) con la luminosità L (o la magnitudine assoluta).

Esistono anche diagrammi H-R che mettono in relazione i due indici di colore.

In figura 1.5 è riportato uno schematico diagramma H-R.

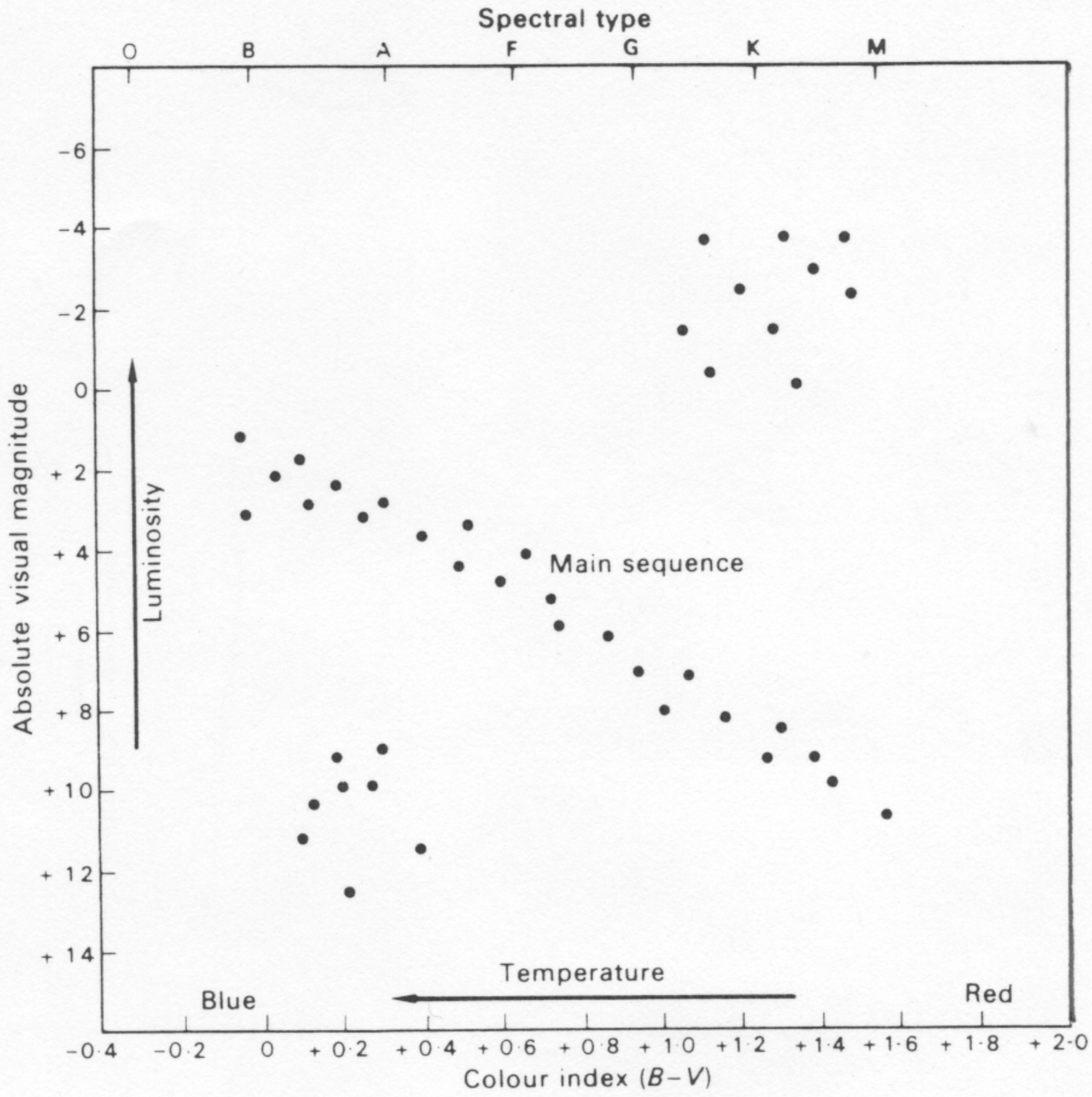


fig.1.5-Diagramma H-R (qualitativo)

Osservando la figura di pagina precedente, possiamo notare come il maggior numero di stelle si distribuisca lungo una linea ben definita che, partendo dall'angolo destro in basso attraversa tutto il diagramma ed arriva all'angolo opposto, in alto a sinistra. Questa particolare struttura è chiamata *Sequenza Principale*, (in inglese Main Sequence, MS).

Osserviamo poi che, a parità di temperatura si hanno stelle molto luminose e stelle molto deboli: ricordando che è

$$\frac{L_*}{L_\odot} = \left(\frac{R_*}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T_*}{T_\odot}\right)^4 \tag{1.2.9}$$

$$R_\odot = 6.960 \cdot 10^{10}\, cm \tag{1.2.10}$$

$$T_\odot^{eff} = 5800\, K \tag{1.2.11}$$

si vede subito che le differenze in luminosità, a parità di colore (ossia di temperatura), sono da imputarsi a differenti valori dei rispettivi raggi stellari. Si parla allora di *giganti* e *supergiganti* per le stelle molto luminose, e di *nane* per le stelle più deboli. Osserviamo anche che fra le stelle giganti esiste una netta divisione in astri di colore rosso ed astri di colore blu. Poichè una stella rossa è piú fredda di una stella blu, si ha che, a parità di luminosità, le stelle rosse sono più grandi delle stelle blu. Si parla cosìdi giganti e supergiganti rosse (RG, RSG) e di giganti blu (BG).

Attualmente l'Astrofisica Teorica è riuscita in buona parte a ricostruire le tappe fondamentali della vita di una stella. Acceneremo qui brevemente agli aspetti fondamentali della teoria.

(I modelli numerici vengono rappresentati sul piano $logT - logL$, che è l'analogo teorico del piano H-R).

Una stella è essenzialmente una sfera di gas alla continua ricerca di uno stato di stabilità. Due sono le forze concorrenti che possono rompere l'equilibrio della struttura stellare: una è la forza gravitazionale, che continuamente tende a far collassare la stella su se stessa, l'altra è la pressione termica associata all'energia prodotta dalle reazioni nucleari che si svolgono nelle regioni centrali della stella (*nucleo*), e che invece tende a farla espandere.

Una stella inizia la propria esistenza come una perturbazione in densità in una nube di gas. Non molto chiari sono i motivi per cui una tale perturbazione si produca: si può pensare a urti supersonici fra nubi relativamente fredde, ad esplosioni di supernovae in vicinanza delle nubi stesse, ad onde di densità nel piano galattico. In ogni caso, una volta prodotta, una tale condensazione - se in possesso di una massa superiore ad una massa limite, detta *massa di Jeans* (che dipende dalla densità e dalla temperatura) - inizia a collassare sotto il proprio peso e tale collasso porta ad un aumento della temperatura del gas.

In queste prime fasi la "*protostella*" non è stabile, essendo ancora alla ricerca di un equilibrio definitivo: infatti, dopo alcuni assestamenti di tipo gravitazionale, nel nucleo viene raggiunta una temperatura sufficientemente elevata (dell'ordine di $10^6 K$) per poter innescare la combustione degli elementi più leggeri, come litio (Li), berillio (Be), boro (B), elio-3(^3He). Questo innesco produce ancora qualche variazione nella struttura della stella. Se quest'ultima ha una massa superiore ad un certo limite (non esattamente definito, ma che sembra situarsi attorno a qualche centesimo di massa solare, con incertezze dovute alla composizione chimica della nube) la temperatura al centro continua a salire, fino a raggiungere valori tali da consentire l'innesco del bruciamento dell'idrogeno. A questo punto la protostella è diventata una vera e propria stella,

con un equilibrio interno ormai assestato: ad esempio, una troppo intensa produzione di energia porterebbe la stella ad espandersi, essendo la pressione direttamente proporzionale alla temperatura. Questo, poichè il numero di reazioni nucleari per unità di tempo ("*rate*") dipende dalla densità, ridurrebbe immediatamente la produzione energetica, ristabilendo cosìl'equilibrio originario.

Viceversa, se la stella per qualche motivo dovesse contrarsi, l'aumento del tasso di reazioni nucleari farebbe salire la temperatura (e quindi la pressione) nelle zone centrali favorendo cosìuna espansione dell'intera struttura che si riporterebbe in breve tempo nelle condizioni iniziali.

Vedremo in seguito che le stelle non rimangono in questo stato di equilibrio per tutta la loro esistenza, ma che in certe fasi della loro vita l'equilibrio della loro struttura è molto precario, se non addirittura instabile.

Ritorniamo adesso alle stelle che bruciano idrogeno al centro: fissata una massa M ed una certa composizione chimica (individuata dalle abbondanze in massa di idrogeno (X), di elio (Y) e degli elementi di numero atomico maggiore di 2 (Z), detti metalli), la stella è stabile ed in questo stato di equilibrio ha un raggio, una temperatura e quindi una luminosità ed un colore definiti: nel piano $LogT - LogL$ la stella è allora individuabile con un punto ben preciso.

In figura 1.6 è rappresentato il piano $LogT - LogL$.

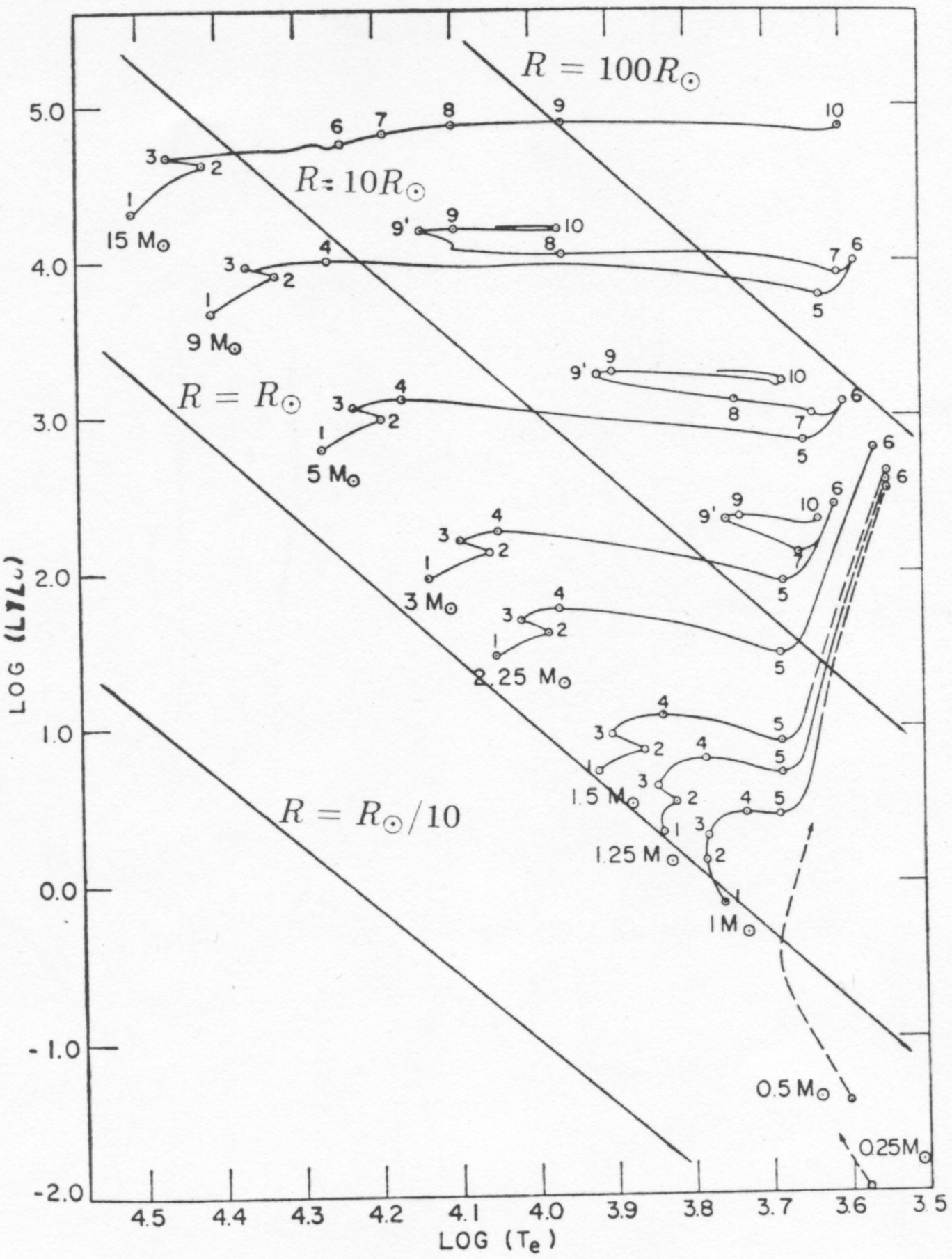


fig.6-Piano $LogT - LogL$

In ordinata sono dati i valori delle luminosità normalizzate alla luminosità solare, mentre in ascissa è riportato il logaritmo della temperatura effettiva. Le linee numerate rappresentano tracce evolutive di stelle di alta metallicità (vedi avanti).

Stelle con masse diverse si situano evidentemente in punti diversi di questo piano. L'interessante è notare come i modelli non riempiano il piano in modo disordinato od uniforme, ma si dispongano su una linea ben definita, chiamata Zero Age Main Sequence (ZAMS).

Il bruciamento dell'idrogeno al centro delle stelle avviene essenzialmente in due modi diversi (a loro volta divisi in sottogruppi), che dipendono direttamente dalla massa stellare: per stelle di massa inferiore alla massa solare ($M_\odot = 1.98 \cdot 10^{33}\, g$) il bruciamento dell'idrogeno avviene principalmente secondo la *catena protone-protone*, detta anche *catena p-p*, mentre per stelle di massa superiore il processo seguito è essenzialmente il *ciclo CNO* (così chiamato dal nome dei catalizzatori della reazione): questo perchè il ciclo CNO necessita di temperatura più elevate di quelle della catena p-p per produrre energia ad un tasso significativo, e che solo stelle abbastanza massicce riescono a raggiungere nel loro interno.

Riportiamo nella pagina seguente gli schemi secondo cui si realizzano queste due importanti vie di bruciamento dell'idrogeno.

catena protone-protone (p-p)

$$^1H(p,e^+\nu)^2D(p,\gamma)^3He(^3He,2p)(^4He) \qquad (1.2.12)$$

$$^1H(p,e^+\nu)^2D(p,\gamma)^3He(\alpha,\gamma)^7Be(e^+,\nu)^7Li(p)(2\,^4He) \qquad (1.2.12')$$

$$^1H(p,e^+\nu)D(p,\gamma)^3He(\alpha,\gamma)^7Be(p,\gamma)^8Be(e^+\nu)^8Be(2\,^4He) \qquad (1.2.12'')$$

ciclo CNO (CNO)

$$^{12}C(p,\gamma)^{13}N(e^+\nu)^{13}C(p,\gamma)^{14}N(p,\gamma)^{15}O(e^+\nu)^{15}N(p,^{12}C)(^4He) \qquad (1.2.13.)$$

$$^{12}C(p,\gamma)^{13}N(e^+\nu)^{13}C(p,\gamma)^{14}N(p,\gamma)^{15}O(e^+\nu)^{15}N(p,\gamma) \longrightarrow$$

$$^{16}O(p,\gamma)^{17}F(e^+\nu)^{17}O(p,^{14}N)(^4He) \qquad (1.2.13')$$

Per quanto riguarda le energie liberate per ogni grammo di materia trasformata da queste reazioni si ha:

$$E_{\mathrm{pp}} = 6.3 \cdot 10^{18}\, erg\, g^{-1} \qquad (1.2.14)$$

$$E_{\mathrm{CNO}} = 6.0 \cdot 10^{18}\, erg\, g^{-1}. \qquad (1.2.15)$$

Non solo il tipo di produzione energetica varia al crescere della massa stellare, ma anche il modo con cui l'energia prodotta nel nucleo raggiunge la superficie stellare e si irradia successivamente nello spazio. Si hanno due possibili modi di trasmissione del calore negli interni stellari: per *irraggiamento* o per *convezione*; a volte questi due meccanismi sono contemporaneamente presenti in zone diverse della stessa stella.

La differenza sostanziale tra i due meccanismi è che, mentre nel caso del trasporto radiativo la trasmissione di calore avviene senza moti significativi di materia, nel caso della convezione è proprio il movimento della materia più

calda a trasportare calore alle zone più fredde. In maniera molto semplice possiamo affermare che la convezione tenderà maggiormente a svilupparsi nelle zone dove è in atto un "ingolfamento" di energia. Ad esempio, è naturale aspettarsi processi convettivi nelle zone centrali delle stelle massicce, per l'alta temperatura raggiunta dalle reazioni del CNO, mentre stelle più piccole, che bruciano idrogeno con la catena p-p, svilupperanno in generale nuclei radiativi.

In realtà il problema non è così semplice: ogni fenomeno che porti ad un notevole ingolfamento di energia, come abbiamo già fatto notare, tenderà a sviluppare la convezione in quella zona. È proprio quello che può fare un'elevata *opacità* del materiale stellare:

$$< k >=< k(Z) > . \qquad (1.2.16)$$

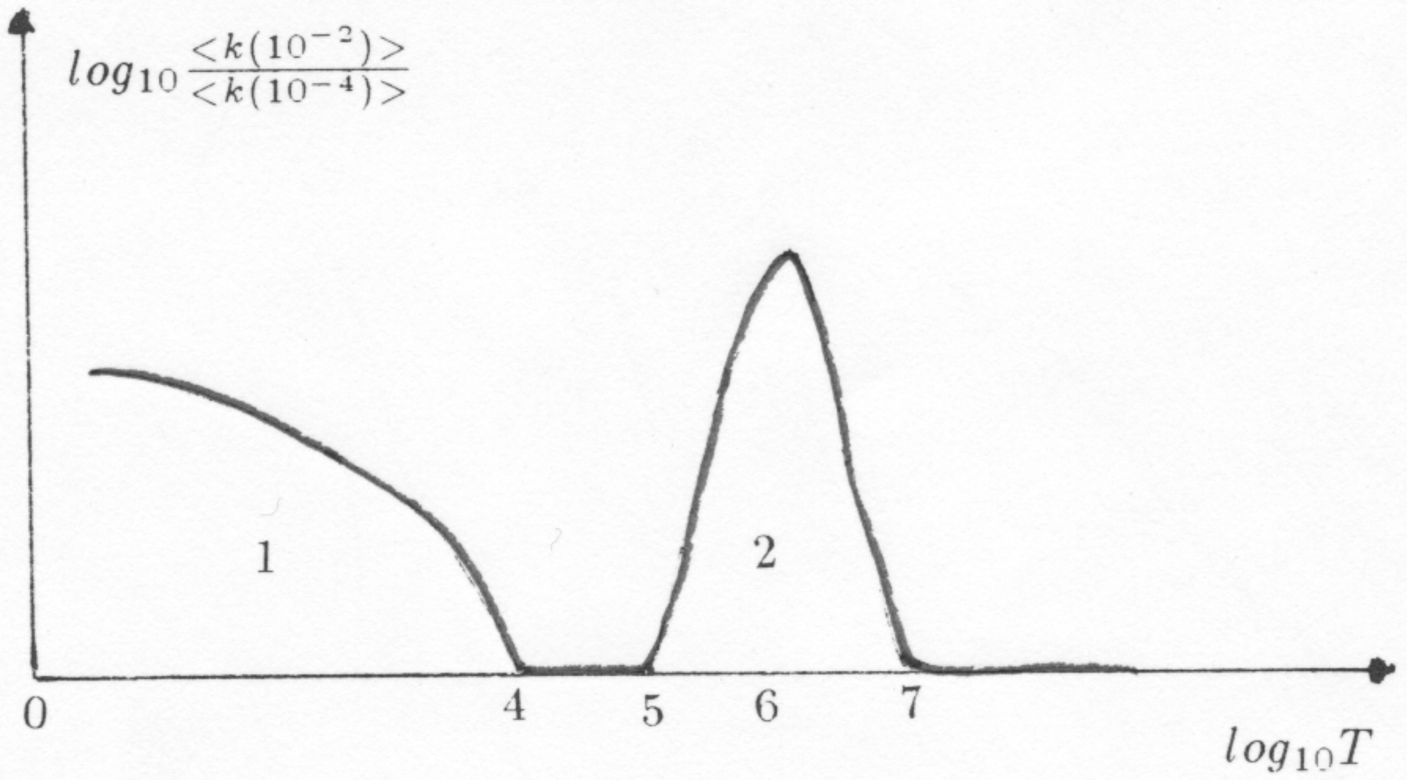


fig.1.7-Opacità

Nella zona 1 l'opacità dipende essenzialmente da H^-, che viene ionizzato dagli e^- liberati dagli elementi leggeri, nella zona 2 invece l'opacità è dovuta essenzialmente a transizioni atomiche *legato–legato* (bound-bound, $b-b$) e *legato–libero* (bound-free, $b-f$).

I modelli teorici indicano la seguente struttura interna per stelle che si trovino sulla ZAMS:

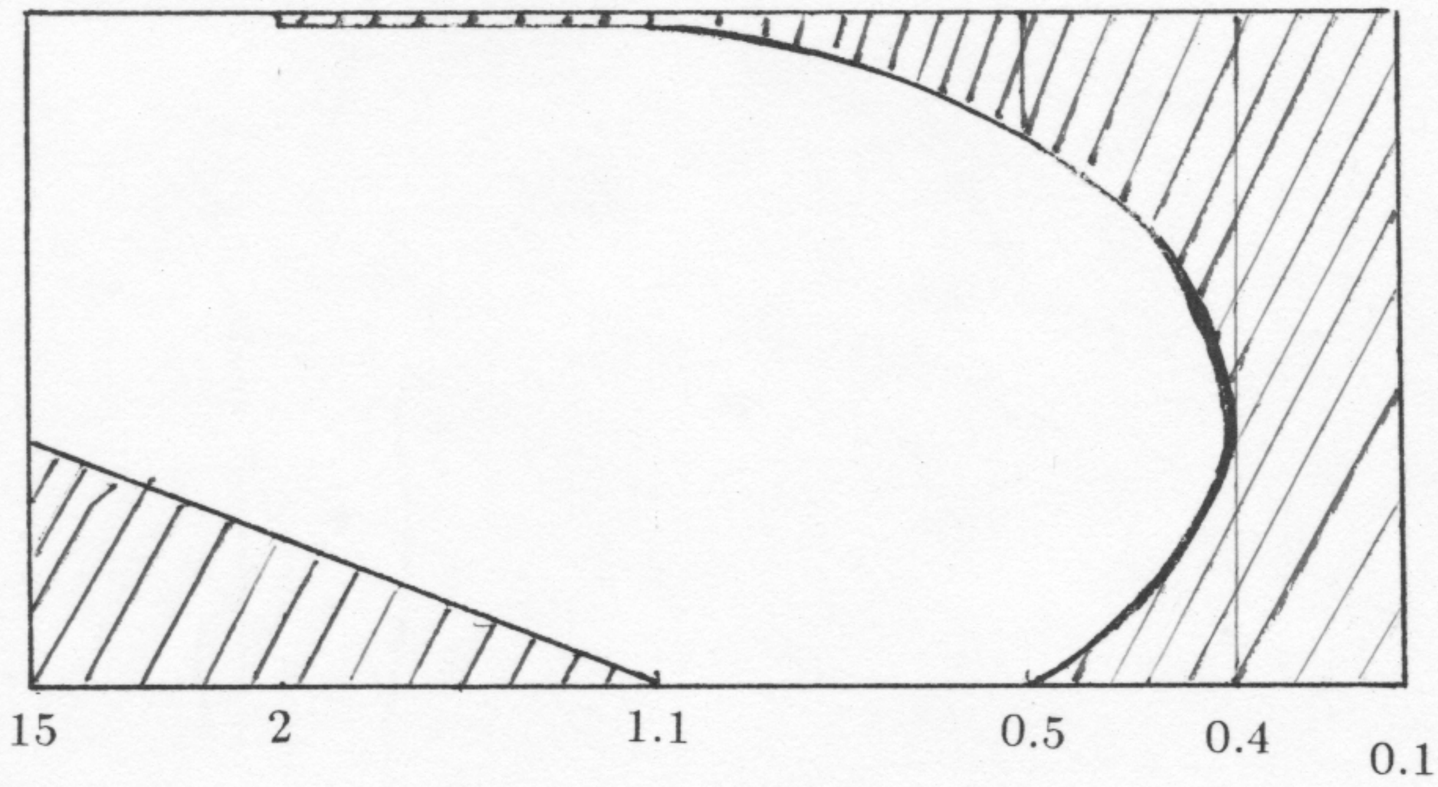


fig.1.8-Struttura interna di stelle sulla ZAMS

In figura 1.8 le zone tratteggiate sono interessate dalla convezione, le altre dai processi radiativi.

Fintanto che la stella brucia idrogeno al centro, ossia circa i nove decimi della sua intera esistenza, si dice che essa si trova in **Sequenza Principale** (Main Sequence, MS): è questo il dato fisico comune a tutti gli astri che si trovano, sul diagramma H-R, nella caratteristica fascia di cui abbiamo già parlato.

Il tempo di permanenza in MS, ovvero, il tempo di bruciamento di H nel nucleo, è indirettamente dato, in prima approssimazione, da una relazione molto semplice, detta legge Massa-Luminosità.

Tale "legge" afferma che:

$$L \propto M^{\alpha} \qquad 2.5 < \alpha < 4.75. \tag{1.2.17}$$

Come vedremo più dettagliatamente in seguito, le stelle di grande massa, durante la loro permanenza in MS, perdono notevoli quantità di materia per pressione di radiazione, avendo luminosità e temperature molto elevate (vedi § **1.3.Venti stellari**).

In figura 1.9 è mostrato un grafico che riproduce i vari andamenti della luminosità in funzione della massa.

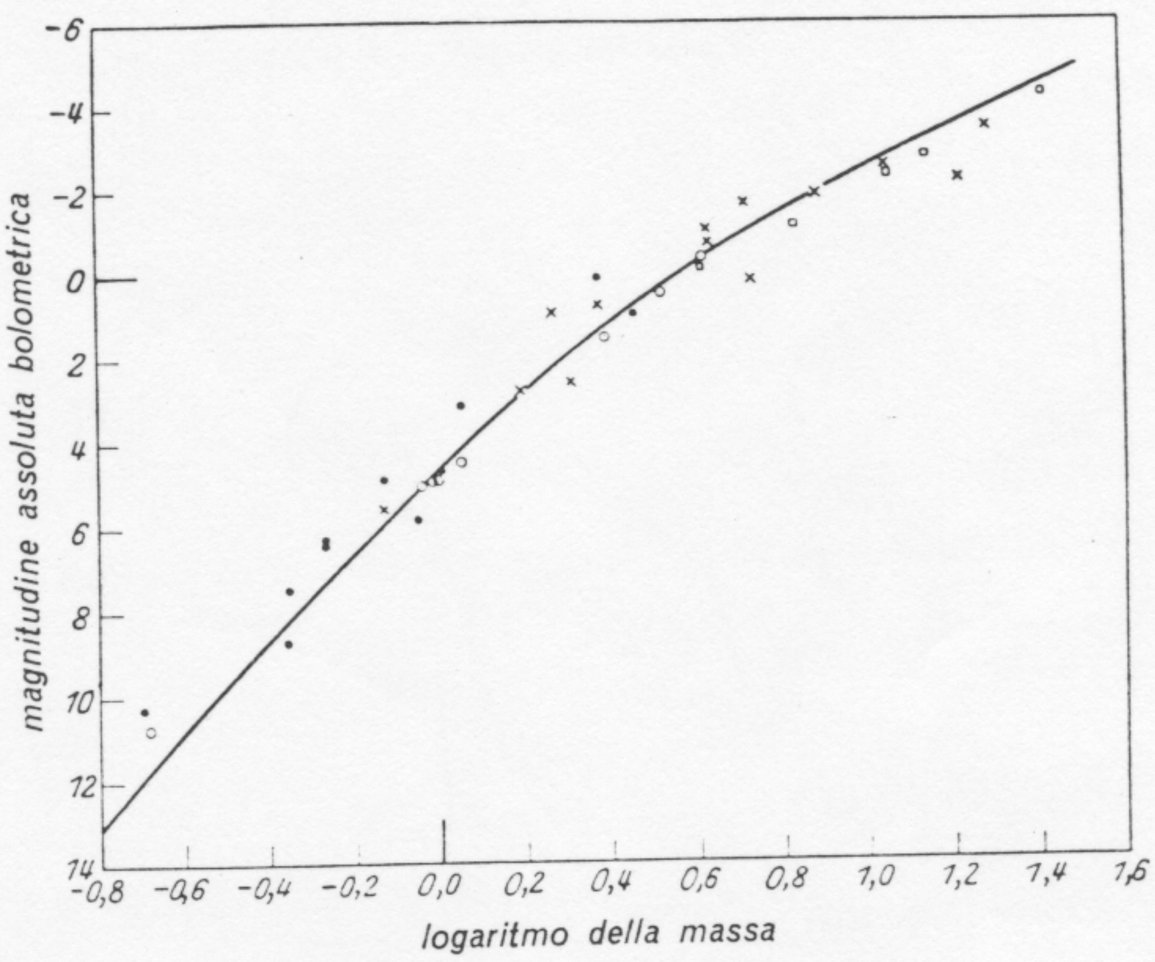


fig.1.9-La legge Massa-Luminosità

Una volta esaurito l'idrogeno disponibile per la combustione, la stella si trova ad avere la zona centrale formata essenzialmente di elio. Questo nucleo, pur essendo molto caldo (circa $10^7\ K$) non può bruciare, essendo richiesta una temperatura dell'ordine dei $10^8\ K$ per poter innescare il bruciamento dell'elio.

La stella tenderà allora a contrarsi, essendo venuta a mancare la pressione interna dovuta alle reazioni nucleari. Ciò determina un ulteriore innalzamento della temperatura nell'interno stellare. A questo punto l'evoluzione della stella dipende in modo critico dalla sua massa: se questa è inferiore ad un certo limite ($M_* < 0.8 M_\odot$) la stella continuerà a contrarsi fino a che la pressione interna non avrà bilanciato la forza di gravità, deteminando così il raggio finale della struttura. Stelle di massa maggiore invece vanno incontro all'accensione di uno strato (*shell*) di idrogeno nella zona subito circostante al nucleo di elio. Questa accensione provoca un rilascio di energia che a sua volta innesca un meccanismo molto complesso: tale fenomeno porterà la stella a diventare una RG.

L'immediato rilascio di energia causato dall'accensione della shell di idrogeno provoca una leggera espansione dell'inviluppo stellare per cui le zone più esterne di quest'ultimo si trovano ad essere più fredde. Questo fatto provoca un aumento dell'opacità.

Che accade dell'energia prodotta all'interno? L'effetto sulla luminosità dovuto all'aumento del raggio agisce in senso opposto all'effetto dovuto all'aumento di luminosità. I due fenomeni si trovano così in "competizione".

Quale sia il comportamento degli strati esterni della stella, solo il calcolo numerico può dirlo. Se infatti domina l'effetto dovuto all'aumento del raggio, ben presto la maggior energia prodotta viene rilasciata cosicché in breve tempo il raggio della stella si assesta su un nuovo valore, mentre se è l'effetto dovuto all'aumento dell'opacità a prevalere, all'aumento delle dimensioni stellari corrisponde solo una maggior capacità di non lasciare sfuggire l'energia prodotta nelle zone centrali, dando cosìorigine ad un meccanismo a catena.

Tutto questo è stato spiegato teoricamente da Renzini (1984), che ha in-

trodotto il concetto di *derivata evolutiva*, definita come segue:

$$\left(\frac{\delta Log\, L_r}{\delta Log\, r}\right)_{M_r} = W(M_r) \tag{1.2.18}$$

$$W = 4(1-A) + (4-A)\alpha - A\beta \tag{1.2.19}$$

$$A = -\frac{\delta Log\, T_r}{\delta Log\, r} \tag{1.2.20}$$

$$\alpha = \left(\frac{\partial Log\ <k>}{\partial Log\, \rho}\right)_T \quad \beta = \left(\frac{\partial Log\ <k>}{\partial Log\, T}\right)_\rho \tag{1.2.21}$$

dove $\delta Log\, L_r$ è la variazione di luminosità relativa ad una variazione di raggio $\delta Log\, r$ nei modelli. Si trova che la funzione W è molto sensibile al valore dell'opacità attorno al milione di Kelvin, ossia all'opacità dovuta ai metalli (vedi fig.1.7). Nella fase di RG il valore di W è prossimo a zero, cosicchè anche piccole variazioni di luminosità portano a grandi variazioni del raggio. Il fatto che W sia cosìsensibile alla metallicità della stella fa si che proprio questo sia uno dei fattori più importanti nel guidare l'evoluzione dell'astro verso le RG o meno. Si trova che alti valori di Z favoriscano l'ingresso della stella nella fase RG, mentre bassi Z inibiscono questa tendenza, tanto che stelle con Z molto piccoli possono anche non sperimentare la fase di gigante rossa.

Ma anche altri fenomeni possono impedire il fenomeno di RG in una stella: ad esempio una perdita di massa molto elevata può privare la stella dei suoi strati più esterni cosicchè viene a mancare la possibilità stessa di una transizione a RG. In ogni caso la gran parte delle stelle passa dalla fase RG.

Come termina questa fase? Accade che l'opacità sale a valori cosìelevati che alla fine viene ad instaurarsi la convezione nella maggior parte dell'inviluppo stellare.

Ora, è noto che la convezione è un meccanismo di trasporto energetico molto più efficace del trasporto radiativo. Questo fa sı' che finalmente l'eccesso

energetico possa essere dissipato, interrompendo cosìla crescita del raggio stellare.

Nel frattempo la shell di idrogeno che bruciava attorno al nucleo di elio ha continuato ad accumulare materiale sul nucleo stesso. A questo punto due sono le possibilità: la prima è che il nucleo al momento dell'innesco dell'elio si trovi in condizioni di *degenerazione elettronica* (cosa questa che avviene per le stelle più piccole di $\approx 1.1 M_{\odot}$). In questo caso, essendo la pressione indipendente dalla temperatura, si ha che l'accensione dell'elio provoca un aumento di T cui non corrisponde però un aumento della pressione, che porterebbe ad un'espansione del nucleo. Si innesca cosìun meccanismo a catena detto *flash dell'elio*. Questo fenomeno, pur liberando una quantità di energia paragonabile ad una notevole frazione dell'energia di autogravitazione della stella ($\approx 4/5$), in realtà non conduce a niente di catastrofico per la struttura stellare stessa, poichè quasi tutta l'energia liberata viene spesa per rimuovere la degenerazione del nucleo.

Per stelle più massicce, l'accensione dell'elio avviene tranquillamente, e la stella inizia cosìla sua evoluzione verso fasi successive.

Il bruciamento dell'elio avviene secondo il seguente schema:

$$(3\alpha, \gamma) \longleftrightarrow {}^{12}C^{*}(\gamma\gamma)^{12}C(\alpha, \gamma)^{16}O \tag{1.2.22}$$

$$E_{3\alpha} = 6.0 \cdot 10^{17}\, erg\, g^{-1}. \tag{1.2.23}$$

Da questo punto in poi seguiremo la storia evolutiva di una stella massiccia, che è il caso che a noi interessa. Considereremo le fasi finali dell'evoluzione di una stella di circa $20 M_{\odot}$.

Le fasi successive all'innesco dell'elio sono più complesse delle precedenti. Si ripete essenzialmente quanto già detto a proposito dell'idrogeno e dell'elio.

Si innescano cioè reazioni nucleari di elementi sempre più pesanti, cosicchè l'interno stellare assume infine un aspetto a "cipolla", con vari strati in ciascuno dei quali brucia un combustibile diverso. Intanto la stella attraversa fasi di grande instabilità degli strati più esterni, spostandosi in una zona del diagramma H-R chiamata *Braccio Asintotico* (Asymptotic Giant Branch, AGB) molto vicina alla zona delle RG.

Col proseguire delle reazioni si arriva infine ad avere un nucleo centrale di ferro, circondato da uno strato di silicio, a sua volta circondato da uno strato di ossigeno, poi da uno di carbonio, di elio, ed infine dall'atmosfera esterna composta prevalentemente da idrogeno. I tempi di bruciamento dei vari elementi sono uno più breve del precedente di circa un fattore 10.

A questo punto, quando la temperatura interna supera i $5 \cdot 10^9 K$, si verifica un fenomeno totalmente diverso da quelli che fino ad ora hanno accompagnato la stella nella sua evoluzione. Infatti, per valori della temperatura come quello sopra ricordato, i fotoni hanno un'energia sufficiente per fotodisintegrare i nuclei di ferro secondo le reazioni seguenti:

$$\gamma + {}^{54}Fe \rightarrow 13\,{}^4He + 2n \tag{1.2.24}$$

$$\gamma + {}^{56}Fe \rightarrow 13\,{}^4He + 4n. \tag{1.2.25}$$

Queste reazioni sono di tipo * endotermico, ossia sono reazioni che tolgono alle zone centrali della stella la possibilità di sostenere il peso della sua struttura più esterna. La stella inizia quindi a collassare su stessa, e questo fa si che

---

* Il ferro è l'elemento chimico con la maggior energia di legame per nucleone, cosicchè ogni reazione nucleare che porti ad un aumento o diminuzione del numero atomico, richiede un assorbimento di energia

l'energia gravitazionale liberata amplifichi ancor più il fenomeno di collasso. La temperatura continua a salire, finchè anche le particelle α vengono fotodisintegrate: questo porta come conseguenza che il nucleo si trova formato da un gas di neutroni, protoni ed elettroni.

Continuando il collasso, in breve tempo inizia il processo $\beta - inverso$

$$\beta(p, \nu)n, \tag{1.2.26}$$

che porta alla neutronizzazione del materiale del nucleo.

La sparizione degli elettroni fa si che venga a mancare anche il loro contributo alla pressione, cosicchè il processo di collasso accelera ulteriormente. Il collasso cessa soltanto quando entrano in gioco le forze nucleari di repulsione fra i neutroni: la densità centrale è ora quella di un nucleo atomico, e il nucleo di ferro è ora diventato per la maggior parte una *stella di neutroni*.

Tutto il collasso avviene in qualche decina di minuti. Però gli strati esterni stanno ancora "cadendo" sul nucleo: quando il materiale in caduta raggiunge la rigidissima superficie della sfera neutronica centrale, si genera un'onda d'urto, che si propaga verso la superficie con velocità di diverse migliaia di kilometri al secondo. In realtà l'onda d'urto avrebbe ben poche possibilità di raggiungere la superficie stellare, in quanto gran parte della sua energia viene spesa durante il percorso (per uscire dallo strato di ferro che circonda la stella di neutroni) nello spezzare i nuclei atomici degli elementi più pesanti. L'onda d'urto riesce comunque ad erompere in superficie e ad originare una supernova (di tipo II), in quanto vengono in aiuto i neutrini, prodotti in straordinaria quantità nel nucleo al momento della neutronizzazione del materiale. I neutrini hanno in condizioni ordinarie una sezione d'urto estremamente piccola ($\approx 10^{-44}\, cm^{-2}$),

ma nelle condizioni in cui si trova il materiale dopo la neutronizzazione essa non è più trascurabile.

Il loro effetto diventa allora importante, tanto che soltanto per la loro presenza il fronte d'urto riesce a raggiungere la superficie stellare.

Diamo una tabella con i possibili precursori delle SNII e dei possibili meccanismi esplosivi.

1.2.1.SNII

Meccanismo fisico: *collasso del "nucleo" ed espulsione dell'inviluppo.*

Collasso: *perdite energetiche nel nucleo favoriscono ulteriori perdite.*

a) $M_{\text{nucleo}} < 3M_{\odot}$ $(M^{*}_{\text{in.}} \approx 10M_{\odot})$

nucleo di O, Ne, Mg **degenere**

Catture elettroniche:

$$^{24}Mg(e^{-},\nu)^{24}Na(e^{-},\nu)^{24}Ne \tag{1.2.27}$$

$$^{20}Ne(e^{-},\nu)^{20}F(e^{-},\nu)^{20}O. \tag{1.2.28}$$

La sparizione degli elettroni porta ad una diminuzione della pressione, che, favorendo un'ulteriore contrazione aumenta ancora il numero delle catture elettroniche.

b) $M_{\text{nucleo}} \geq 3.5M_{\odot}$ $(M^{*}_{\text{in.}} \geq 13M_{\odot})$

nucleo di Fe **non degenere**

Fotodisintegrazione di Fe:

$$\gamma + ^{54}Fe \rightarrow 13^{4}He + 2n \tag{1.2.29}$$

$$\gamma + ^{56}Fe \rightarrow 13^{4}He + 4n. \tag{1.2.30}$$

La descrizione successiva è quella riportata nel paragrafo.

c) $M_{\text{nucleo}} \geq 20M_{\odot}$ $(M^{*}_{\text{in.}} \geq 60M_{\odot})$

nucleo di Fe **non degenere**

Fotodissociazione del Fe + Annichilazione coppie:

$$e^{+} + e^{-} \rightarrow \nu\nu. \qquad (1.2.31)$$

1.2.2.SNI

Per completezza diamo ora anche qualche cenno sui possibili meccanismi di esplosione di una SNI.

Queste supernovae, come abbiamo già avuto modo di dire, sono associate a stelle "vecchie". Un meccanismo che potrebbe spiegare le caratteristiche osservative, in particolare la sorprendente sovrapponibilità delle curve di luce delle SNI è il seguente: un sistema binario (sembra che circa 70 stelle su 100 facciano parte di sistemi binari) composto da una nana bianca, con massa prossima alla *massa di * Chandrasehkar*), e da una stella meno evoluta, che inizia a trasferire massa sulla nana. Appena viene raggiunta la massa limite, la pressione degli elettroni degeneri non è più sufficiente a sostenere la massa della stella, che inizia a collassare. Il seguente aumento della temperatura porta all'innesco del carbonio in condizioni di elevata degenerazione, e questo, con un meccanismo simile a quello descritto per il flash dell'elio, porta alla *deflagrazione* del carbonio.

---

* *Si dice massa di Chandrasehkar la massa limite che una stella che ha finito il combustibile può sostenere per pressione da elettroni degeneri. Tale massa dipende naturalmente dal rapporto fra elettroni e nucleoni. Per stelle di piccola massa, dove la fusione si ferma al carbonio, tale valore è di circa* $1.44M_{\odot}$.

Si ritiene che questo sia, molto sommariamente quanto precede l'esplosione di una SNI: la quasi identità delle curve di luce sarebbe allora facilmente comprensibile, alla luce del fatto che l'esplosione avverrebbe, per tutte le SNI, praticamente da progenitori con la stessa massa, ossia la massa di Chandrasehkar.

§ 1.3.Venti stellari

Nel descrivere per sommi capi l'evoluzione di una stella, abbiamo soltanto accennato ad eventuali perdite di massa. Vedremo adesso che tali perdite non solo sono presenti ma sono in reltà fenomeni molto importanti, addirittura fondamentali, nel guidare l'evoluzione di una stella.

Perdite di massa notevoli possono avvenire in varie fasi e con varie modalità. Non entreremo nella discussione di questo vasto e complesso problema, ma ci limiteremo a prendere in considerazione i fenomeni relativi all'argomento di questa tesi, ossia alle perdite di massa di una stella di circa $20M_{\odot}$.

Descriveremo quindi soltanto le perdite di massa di una gigante blu (BG, classe spettrale O o B) e di una supergigante rossa (RSG, classe spettrale M).

1.3.1.Vento nelle giganti blu

L'evidenza osservativa che le stelle blu perdano massa in modo pressochè uniforme e che ci fa parlare di *vento stellare* è data dal cosiddetto *profilo P Cygni*. Questo consiste nella presenza di una riga di assorbimento sul lato *violetto* di una riga di emissione.

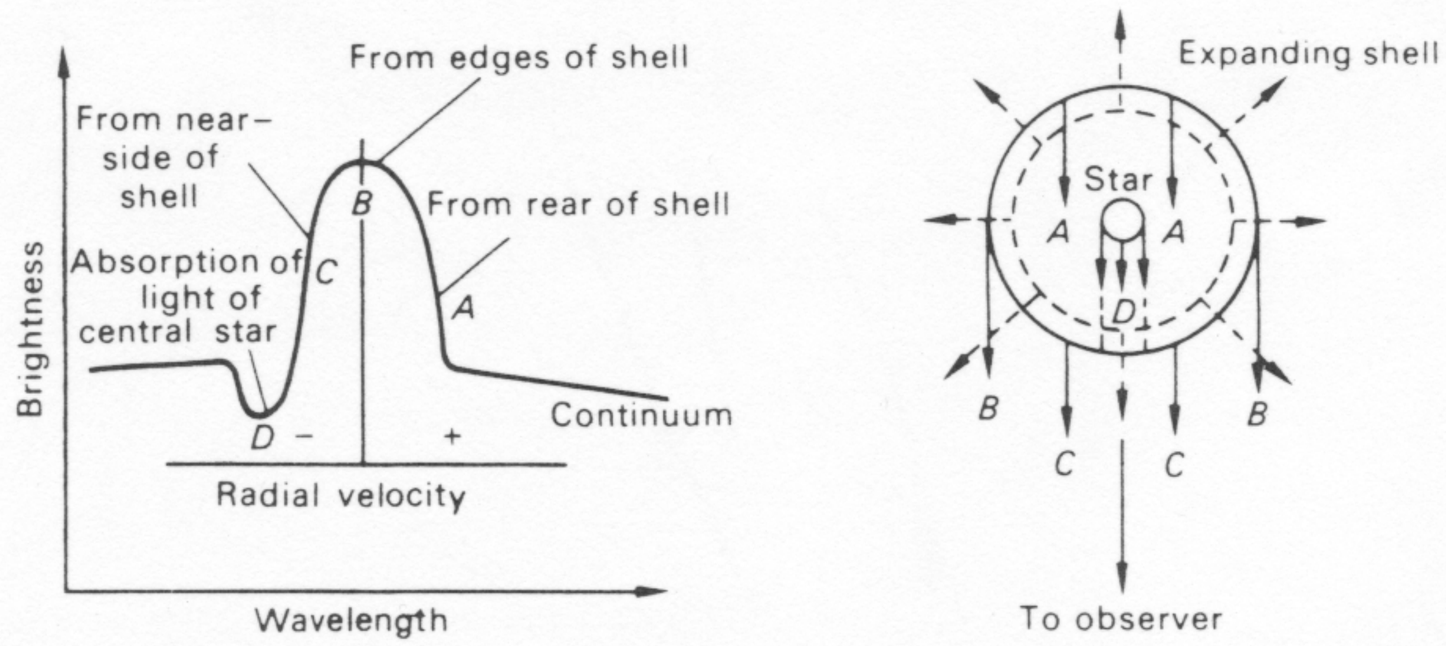


fig.1.10-Profilo P Cyg

Supponendo l'esistenza intorno alla stella di materia in espansione, la spiegazione è immediata. Dalla figura 1.10 risulta chiaro che la presenza della riga di emissione è dovuta alle zone tratteggiate, che rispetto all'osservatore hanno una velocità radiale praticamente nulla, mentre il materiale che si muove verso l'osservatore,vede la luce della stella spostata verso il rosso. Allora, le lunghezze d'onda assorbite dal materiale in espansione sono per l'osservatore, che è in quiete rispetto alla stella, spostate verso il blu.

È evidente quindi che da misure spettrali si può risalire alla velocità del materiale espulso. Le misure effettuate danno velocità dell'ordine di

$$V_B^w \approx 1500 \div 2000\, km\, s^{-1}, \tag{1.3.1}$$

ben superiori quindi alla velocità di fuga di queste stelle, che può essere stimata molto semplicemente. Detta $V_\odot^{fuga}$ la velocità di fuga alla superficie solare

$$V_\odot^{fuga} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_\odot}} \approx 6.6 \cdot 10^2\, km\, s^{-1}, \tag{1.3.2}$$

per una stella qualunque, usando la (1.2.9) e la (1.3.2) si ottiene:

$$V_*^{fuga} = V_\odot^{fuga} \left(\frac{T_*}{T_\odot}\right) \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{L_\odot}{L_*}\right)^{1/4}. \tag{1.3.3}$$

Per una stella di $20M_\odot$, assumendo

$$L_*/L_\odot \approx 4 \cdot 10^4 \tag{1.3.4}$$

$$T_*/T_\odot \approx 5.45 \tag{1.3.5}$$

si ha:

$$V\,(sup.)_*^{fuga} \approx 1100 \div 1200\, km\, s^{-1}, \tag{1.3.6}$$

dove con $V(sup.)$ intendiamo la velocità di fuga alla superficie della stella. Essendo le velocità misurate superiori a quella calcolata si può senz'altro dire che le stelle O e B perdono massa.

Le perdite di massa per le stelle blu sono dell'ordine di

$$\dot{M}_B^w \approx 10^{-5} \div 10^{-7}\, M_\odot\, anno^{-1}. \qquad (1.3.7)$$

Molti sono i modelli teorici volti a spiegare il fenomeno del vento nello stelle blu. Un modello accreditato è quello di Lucy e Solomon (1970): nella loro teoria assumono che la causa del vento stellare sia la pressione di radiazione. In base a questo modello il materiale fotosferico viene accelerato per la pressione di radiazione esercitata sugli elementi di cui sono composti gli strati più esterni della stella. Fisicamente l'interazione dei fotoni con gli atomi avviene tramite le righe di assorbimento di questi ultimi.

Il gradiente di velocitá che viene ad instaurarsi nel materiale induce di conseguenza un gradiente nello spostamento Doppler della radiazione emessa dalla stella, e questo assicura la *non saturazione* della riga interessata. Così il materiale piú vicino alla fotosfera non oscura la radiazione utile per gli strati successivi che possono cosìessere ulteriormente accelerati. Questa teoria è stata successivamente migliorata da Castor ed altri (1975), che hanno preso in considerazione anche gli elementi meno abbondanti.

Ci sono anche altre teorie sulle perdite di massa nelle stelle calde, come quella dovuta ad Andriesse (Teoria delle fluttuazioni termodinamiche, 1979) o quella di Lamers e Rogerson (Teoria dei venti caldi coronali, 1978).

1.3.2. Vento nelle giganti e supergiganti rosse

La caratteristica più notevole di questi venti è che la loro velocitá è circa 100 volte piú bassa dei venti di stelle calde, ossia:

$$V_R^w \approx 10 \div 20\, km\, s^{-1}. \tag{1.3.8}$$

Il primo problema che si presenta è quello di determinare se realmente le giganti e supergiganti rosse perdano massa. Infatti, considerando la (37) e assumendo i valori seguenti per luminosità e temperatura:

$$L_*/L_\odot \approx 1.6 \cdot 10^5 \tag{1.3.9}$$

$$T_*/T_\odot \approx 0.86 \tag{1.3.10}$$

si ottiene

$$V(sup.)_*^{fuga} \approx 120\, km\, s^{-1}. \tag{1.3.11}$$

Dal momento che questa velocità è nettamente superiore alle velocità misurate per il vento il problema di determinare se le giganti rosse perdano effettivamente materia è molto più complesso che nel caso precedente.

Si è avuta la certezza di un'effettiva perdita di massa da parte di RG e RSG quando sono state osservate le righe di assorbimento del materiale espulso dalla gigante αHer nello spettro della sua compagna. La gigante $\alpha\, Her$ è infatti la componente pricipale di un sistema composto da due stelle (sistema binario) orbitanti attorno al comune centro di massa. La secondaria è posta ad una distanza tale dalla gigante che la velocitá di fuga di questa nelle sue vicinanze è inferiore ai $20 Km\, s^{-1}$.

La massa perduta per unità di tempo delle RG e delle RSG è maggiore di quella perduta dalle BG. Si ha infatti:

$$\dot{M}_R^w \approx 10^{-4} \div 10^{-5}\, M_\odot\, anno^{-1}. \tag{1.3.12}$$

Tutti i modelli volti a spiegare il vento nelle giganti e supergiganti rosse possono essere raggruppati in quattro classi:

i) Venti sostenuti da pressione di radiazione su polveri presenti nell'atmosfera

ii) Venti sostenuti da pressione di gas caldi

iii) Venti di tipo coronale, sostenuti da onde di densità

iv) Venti sostenuti da onde di shock.

Poichè la fisica su cui si basano questi modelli di vento è molto complessa, nei calcoli pratici si usano solitamente delle approssimazioni semi-empiriche per $\dot{M}$. Una formula empirica dovuta a Reimers (1975) è la seguente:

$$\dot{M} = \eta_{\mathcal{R}} 4 \cdot 10^{-13} \frac{R_*(L_*/L_\odot)}{g_*/g_\odot} \tag{1.3.13}$$

$$g_* = \frac{GM_*}{R_*^2} \tag{1.3.14}$$

$$0.3 \leq \eta_R \leq 3 \; . \tag{1.3.15}$$

Un'altra parametrizzazione del vento delle RG e RSG è dovuta a Fusi Pecci e Renzini (1975), che hanno proposto come meccanismo la dissipazione di energia acustica dovuta alle turbolenze presenti negli strati esterni che sono convettivi. Gli autori trovano:

$$\dot{M} = \eta_{FR} \frac{R_*(L_*^{acust}/L_\odot)}{g_*/g_\odot} \tag{1.3.16}$$

$$\eta_{FR} \approx 8 \cdot 10^{-4}, \tag{1.3.17}$$

dove L_*^{acust} è la *luminosità acustica* della stella.

Per una trattazione più dettagliata ed esauriente dei venti stellari e delle loro possibili parametrizzazioni si può vedere, ad esempio, l'articolo di Chiosi e Maeder (1980).

2-IL BUBBLE

Abbiamo parlato nel paragrafo precedente dei venti stellari. Vediamo adesso più in dettaglio quali sono le modificazioni che un vento stellare, in particolare il vento di una gigante blu, produce sul mezzo interstellare. Supporremo per il momento che il mezzo interstellare sia omogeneo.

Successivamente discuteremo anche il caso in cui la distribuzione di materia attorno alla stella sia disomogena e vedremo che anche in questa situazione (più complessa ma certamente più vicina alla realtà della precedente) si ha un risultato simile al caso omogeneo.

Il problema dell'interazione tra un vento *veloce* ($\approx 2000\, km\, s^{-1}$) emesso da una gigante blu ed il materiale interstellare circostante è stato preso in considerazione da diversi autori (ad es. Castor, McCray e Weaver, 1975 e 1977; Falle, 1975).

In questo paragrafo verranno esposti i risultati dei precedenti autori e saranno confrontati con quelli da noi ottenuti in questo lavoro avendo così una conferma della validità del programma usato.

I modelli numerici si basano sulle seguenti ipotesi, (che saranno successivamente discusse):

§ 2.1.Le ipotesi di lavoro

a) La stella è in quiete rispetto al mezzo circumstellare.

b) I valori della velocità del vento V^w e del tasso di perdita di massa $\dot{M}^w$ sono costanti. Inoltre, la perdita di massa avviene isotropicamente.

c) Il mezzo circumstellare ha densità uniforme $\rho_0 = 1.67 \cdot 10^{-24}\, g\, cm^{-3}$,

una temperatura $T_0 = 10^4\,K$ ed è totalmente ionizzato.

d) La legge di raffreddamento usata è quella di Kafatos (1973).

e) La legge di conduzione termica è quella di Spitzer (1962).

§ 2.2.Discussione delle ipotesi di lavoro

Diamo adesso una giustificazione delle ipotesi precedentemente enunciate.

a′) L'ipotesi **a** implica che la stella sia in moto col materiale circostante. Assumiamo questa ipotesi con buona approssimazione, in quanto si può certamente pensare che la stella non possa avere più di una piccola velocità relativa rispetto alla nube da cui si è formata.

b′) La seconda ipotesi viene introdotta per due motivi. Il primo è che allo stato attuale non è ben nota la dinamica delle perdite di massa da parte delle stelle, e quindi per semplicità si può suppore che tanto la velocità quanto il tasso di perdita di massa sia costante nel tempo. Il secondo motivo, per quanto riguarda l'isotropia di $\dot{M}^w$, è dettato dal fatto che, oltre a non sapere effettivamente quale sia la dipendenza angolare di $\dot{M}^w$, solo così è possibile affrontare il problema in simmetria sferica, ossia con un programma unidimensionale come è il nostro.

c′) Per il momento supponiamo che il mezzo circumstellare sia di densità uniforme ρ_0. Successivamente sarà discusso anche il caso disomogeneo, e sarà fatto vedere che anche un mezzo circumstellare disomogeneo può comportarsi, nei confronti di un vento di BG, come un mezzo omogeneo, di densità pari alla sua densità media (indicheremo con n_m e n_i rispettivamente il numero *medio* di particelle ed il numero di particelle "i" per unità di * volume).

---

* Se il mezzo è formato da alcuni elementi di massa atomica A_i, si ha $\rho = m_{\rm H} \sum_i A_i n_i$ e si definisce il *peso atomico medio* come $(\mu n_m) m_{\rm H} \equiv \rho$, ovvero

Noi supponiamo che il valore della densità sia pari ad un atomo di idrogeno per centimetro cubo, ossia

$$n_{\mathrm{H}} = 1\,cm^{-3} \qquad ; m_{\mathrm{H}} = 1.67 \cdot 10^{-24}\,g \qquad ; \rho_0 = 1.67 \cdot 10^{-24}\,g\,cm^{-3}. \quad (2.2.1)$$

Per quanto riguarda la ionizzazione, si deve far notare che l'alta temperatura superficiale di una stella di $20M_\odot$ fa sì che il numero di fotoni della riga UV Lyman-α (L_α) sia tanto elevato da poter ionizzare completamente la materia circumstellare, fino ad un raggio detto *raggio di Strömgren* (R_{St}): al di lá di tale raggio la materia è praticamente neutra. Si trova che la zona di transizione fra la materia ionizzata e quella neutra è molto sottile (l'energia luminosa si distribuisce con una intensità $\propto r^{-2}$, oltre naturalmente ad essere indebolita dai numerosi assorbimenti) rispetto alle dimensioni della zona ionizzata: per questo si parla di "raggio". Il suo valore, che risulta evidentemente determinato dall'intensità luminosa della stella e dalla sua temperatura superficiale, si trova essere uguale a (McKee, Van Buren e Lazareff, 1984):

$$R_{St} = 66.9(S_{49}/n_m^2)^{1/3}.\,pc \quad (2.2.2)$$

Nella formula (2.2.2) S_{49} è il numero di fotoni L_α emessi per unità di tempo dalla stella, misurato in unità di $10^{49}\,s^{-1}$.

Le stime di S_{49} non sono facili. Noi supporremo che per una stella di $20M_\odot$ si abbia $S_{49} \approx 0.25$ (vedi Wickramasinghe, Kahn e Mezger, 1972).

Considerando che con le nostre ipotesi n_m è dell'ordine dell'unità, si trova che

$$R_{St} \approx 42\,pc \quad (2.2.3)$$

$\mu = (\sum_i A_i n_i)/n_m$.

e quindi il materiale espulso dalla stella si muoverà dentro un mezzo completamente ionizzato (in effetti la ionizzazione non è istantanea, ma in ogni caso le velocità del fronte di ionizzazione sono ben più elevate della velocità del vento).

Per quanto riguarda la temperatura del materiale ionizzato si deve far notare che questa, così come quella della superficie stellare è molto più bassa della temperatura necessaria per ionizzare l'atomo di idrogeno ($T_i = 157760\,K$). Come si spiega allora questa apparente contradizione? Il fatto è che la stella, comportandosi quasi come un corpo nero, ha una *coda* nella distribuzione energetica dello spettro (vedi figura 2.1) che, per temperature effettive abbastanza alte, può contenere una notevole quantità di energia nella regione ultravioletta. La curva che descrive il rapporto fra la lunghezza d'onda e l'energia emessa da un corpo nero per una data temperatura si dice *planckiana*.

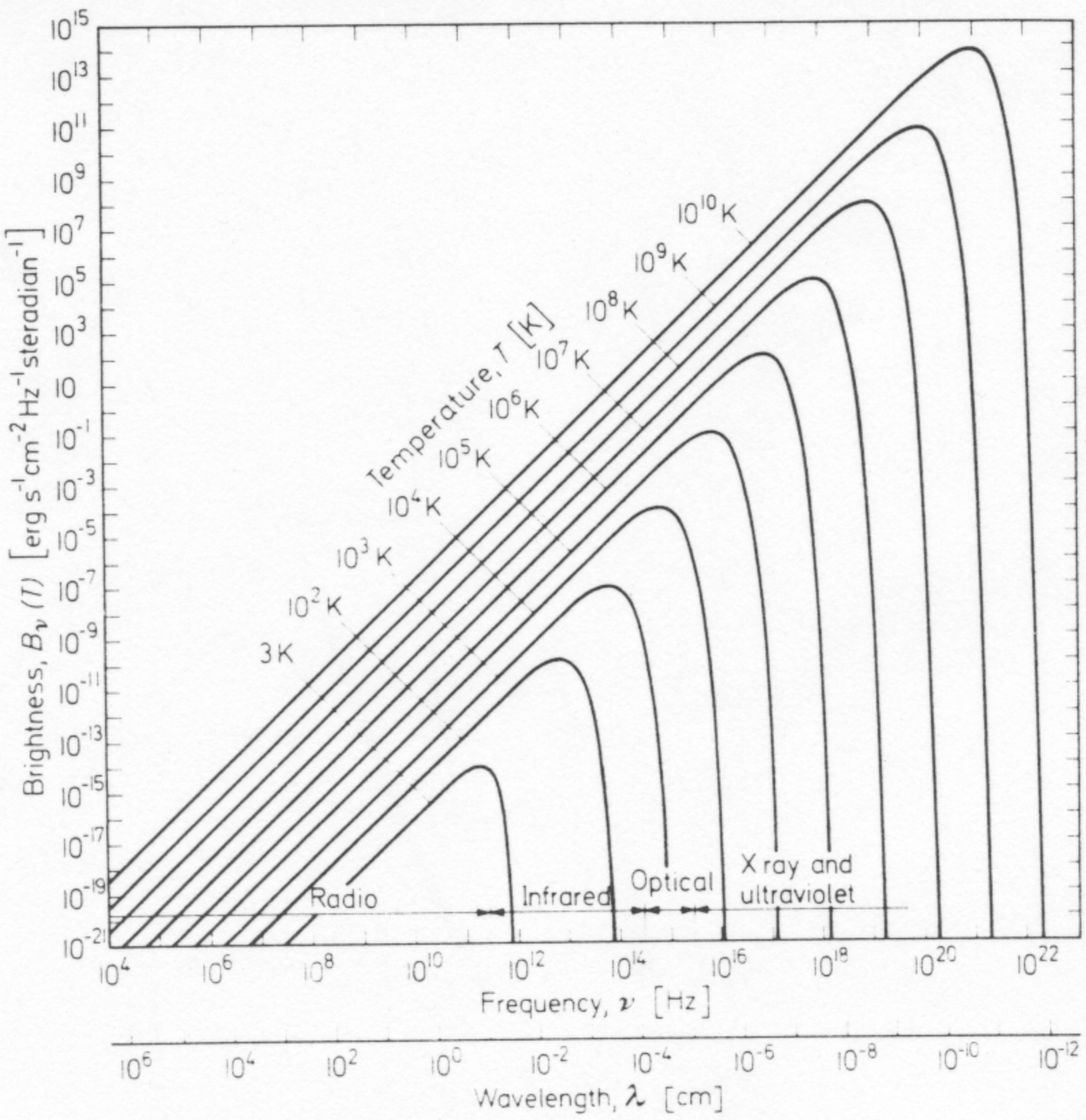


fig.2.1-La planckiana

Resta da spiegare la temperatura relativamente *bassa* ($T_0 = 10^4\,K$) del materiale ionizzato rispetto a T_i: si può dimostrare che questo fatto è dovuto essenzialmente ad un equilibrio termodinamico non raggiunto.

Possiamo adesso anche scrivere l'*equazione di stato* che occorre per poter risolvere il problema. Data la bassa densità e l'alta temperatura, noi assumeremo sempre di essere in presenza di un *gas perfetto monoatomico*, per cui si ha:

$$p = \frac{\mathrm{k}\rho}{\mu m_{\mathrm{H}}} T, \tag{2.2.4}$$

dove μ è il peso molecolare medio in unità di massa atomica $m_{\mathrm{H}} = 1.67 \cdot 10^{-24}\,g$ è la massa dell'atomo di idrogeno e $\mathrm{k} = 1.38 \cdot 10^{-16}\,erg\,K^{-1}$ è la costante di Boltzman.

L'energia interna per unità di volume si scrive allora come

$$E = C_V \rho T \qquad C_p/C_V \equiv \gamma = 5/3 \tag{2.2.5}$$

da cui

$$p = E(\gamma - 1). \tag{2.2.6}$$

d′) Per quanto riguarda le perdite radiative, noi usiamo la legge di Kafatos (vedi figura 2.2)

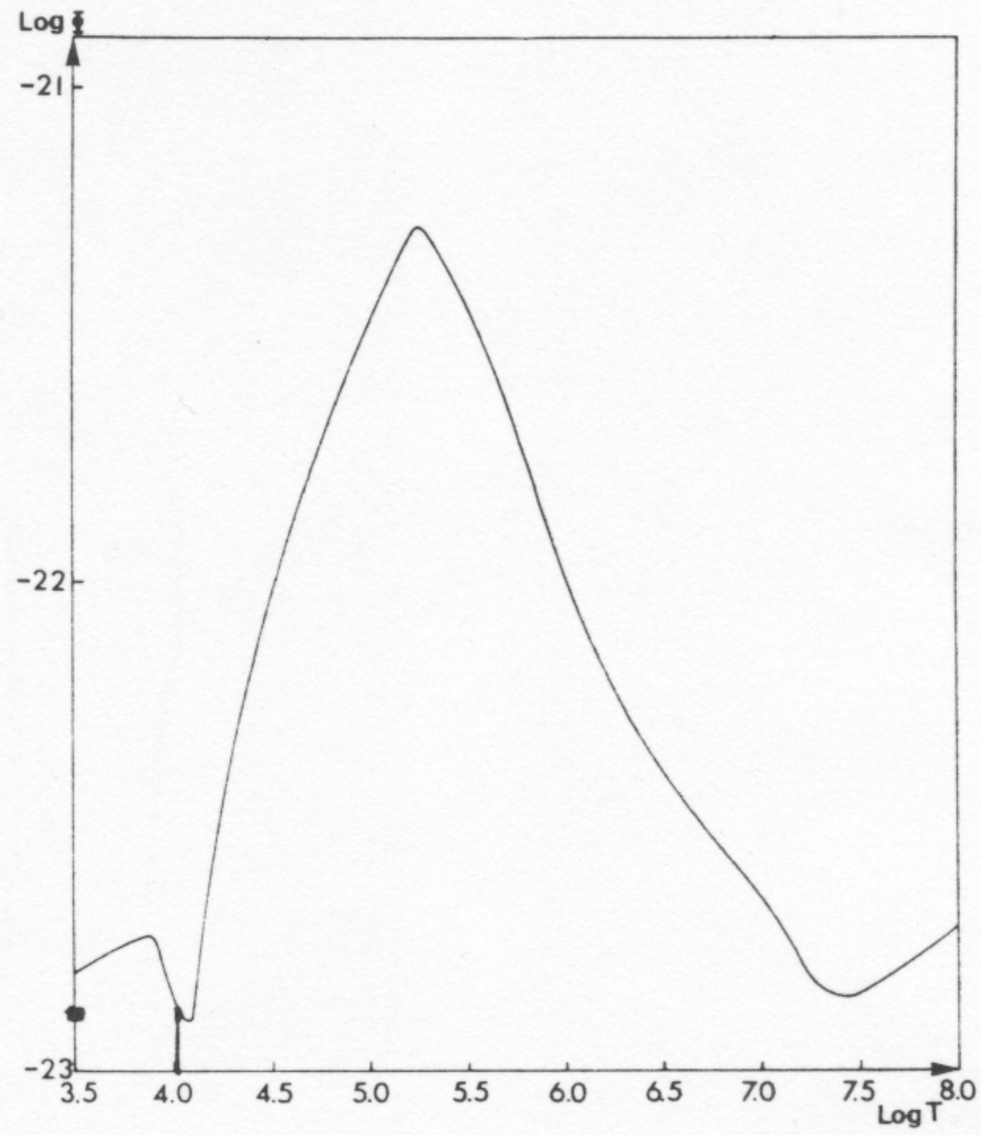


fig.2.2-La curva di raffreddamento

Tale legge, che è stata calcolata da Kafatos considerando le abbondanze chimiche solari (Aller, 1961) e tenendo conto anche degli effetti dovuti alla mancanza di equilibrio di ionizzazione che si verificano per temperature attorno ai $10^6\,K$, afferma che l'energia perduta nell' unità di volume e di tempo per perdite radiative è data da:

$$L_{rad} = n_{\mathrm{H}} n_e \Phi(T), \tag{2.2.7}$$

dove n_{H} e n_e sono rispettivamente il numero di atomi di idrogeno ed il numero di elettroni liberi per unità di volume.

Nel nostro caso però il mezzo circostante viene mantenuto alla temperatura

uniforme T_0 dalla radiazione stellare, e quindi la sua temperatura non può scendere sotto tale valore. L'equazione (2.2.7) diventa allora:

$$L_{rad} = n_{\rm H} n_e [\Phi(T) - \Phi(T_0)]. \qquad (2.2.8)$$

Facciamo infine notare che la legge (2.2.7)-(2.2.8) è valida in situazioni di bassa opacità, che è proprio il nostro caso, considerate la piccola densità e l'alta temperatura in gioco.

e′) Il flusso di calore **q** trasportato per conduzione è dato da Spitzer (1962) come segue:

$$\mathbf{q} = -k(T)\mathbf{grad}T, \qquad (2.2.9)$$

dove

$$k(T) = 1.84 \cdot 10^{-5} T^{5/2} / ln\Lambda \quad erg\, s^{-1}\, K^{-1}\, cm^{-1}. \qquad (2.2.10)$$

Il logaritmo di Coulomb è dato da

$$ln\Lambda = 29.7 + ln[n^{-1/2}(T_e/10^6 K)]. \qquad (2.2.11)$$

Per gradienti di temperatura molto elevati, l'equazione (2.2.6) può predire dei flussi di calore ben più grandi di quelli effettivamente trasportabili dagli elettroni. Il massimo flusso termico trasportabile dagli elettroni (**flusso saturato**) è (Cowie e McKee, 1977)

$$q_s = \beta \epsilon_e v_T, \qquad (2.2.12)$$

dove q_s è il modulo di un vettore che ha come versore la direzione del gradiente di temperatura, ed

$$\epsilon_e = n_e {\rm k} T \qquad v_T = \frac{3{\rm k}T_e}{m_e} \qquad \beta \approx 0.12\,. \qquad (2.2.13)$$

Allora, la corretta forma del termine di conduzione in situazioni dove sia possibile avere un flusso * saturato è la seguente:

$$\mathbf{q} = -\frac{k(T)\mathbf{grad}T}{1 + k(T)\|\mathbf{grad}T\|/q_s} \tag{2.2.14}$$

(indichiamo con $\|\mathbf{x}\| = x$ la norma di un qualsiasi vettore).

È immediato osservare che nei due casi limite si hanno le relazioni volute:

$$\mathbf{q} = \begin{cases} -k(T)\mathbf{grad}T & \text{per } \|\mathbf{grad}T\| \to 0 \\ -q_s\mathbf{grad}T/\|\mathbf{grad}T\| & \text{per } \|\mathbf{grad}T\| \to \infty. \end{cases}$$

In seguito i problemi connessi alla conduzione saranno discussi estesamente.

§ 2.3.Le equazioni

Siamo ora in grado di scrivere per esteso le equazioni del nostro problema (vedi **6-APPENDICE A**):

$$div_r(\cdot) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\cdot)}{\partial r}. \tag{2.3.1}$$

Conservazione della massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div_r(m_r) = 0, \tag{2.3.2}$$

dove m_r è la componente radiale dell'impulso per unità di volume:

$$m_r = \rho v_r. \tag{2.3.3}$$

---

* osserviamo che il *flusso limite* non è altro che il calore trasportato nell'unità di tempo da un gas di elettroni alla temperatura T che si espande nel vuoto con la velocità termica v_T. Il fattore β, di difficile stima, rappresenta il frenamento dovuto alle turbolenze elettromagnetiche che si sviluppano nel gas. Si veda, ad es. Cowie e McKee, 1977.

Conservazione dell'impulso

$$\frac{\partial m_r}{\partial t} + div_r(m_r v_r) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \tag{2.3.4}$$

Conservazione dell'energia

$$\frac{\partial E}{\partial t} + div_r(E v_r) + p \cdot div_r(v_r) + div_r(q_r) + L = 0. \tag{2.3.5}$$

Si deve fare un'osservazione molto importante circa l'uso di queste equazioni Esse infatti sono dedotte sotto ipotesi ben precise (vedi **6-APPENDICE A**, tra le quali vi è la **collisionalità** tra le particelle che compongono il fluido. Nel problema da noi trattato la situazione è invece totalmente diversa, in quanto si tratta di una situazione tipicamente non collisionale. È stato però dimostrato che sotto opportune ipotesi anche un problema non collisionale può essere affrontato con l'aiuto delle equazioni (2.3.1)-(2.3.5).

§ 2.4.I risultati in letteratura

L'evoluzione della struttura che si genera per l'interazione tra un vento veloce ed il mezzo interstellare può essere suddivisa temporalmente in quattro fasi principali:

i) Una prima fase, di breve durata, durante la quale il vento si muove praticamente in **espansione libera**,

ii) Una fase **adiabatica**, durante la quale le perdite di energia sono trascurabili,

iii) Una fase **isoterma**, durante la quale dominano le perdite radiative da una zona relativamente sottile (in raggio) della struttura che si sta formando,

iv) Una fase finale **stazionaria**, in cui si raggiunge un equilibrio di tutta la struttura con la dispersione della regione di alta densità nel mezzo interstellare.

In figura 2.3 è rappresentata una sezione di un bubble.

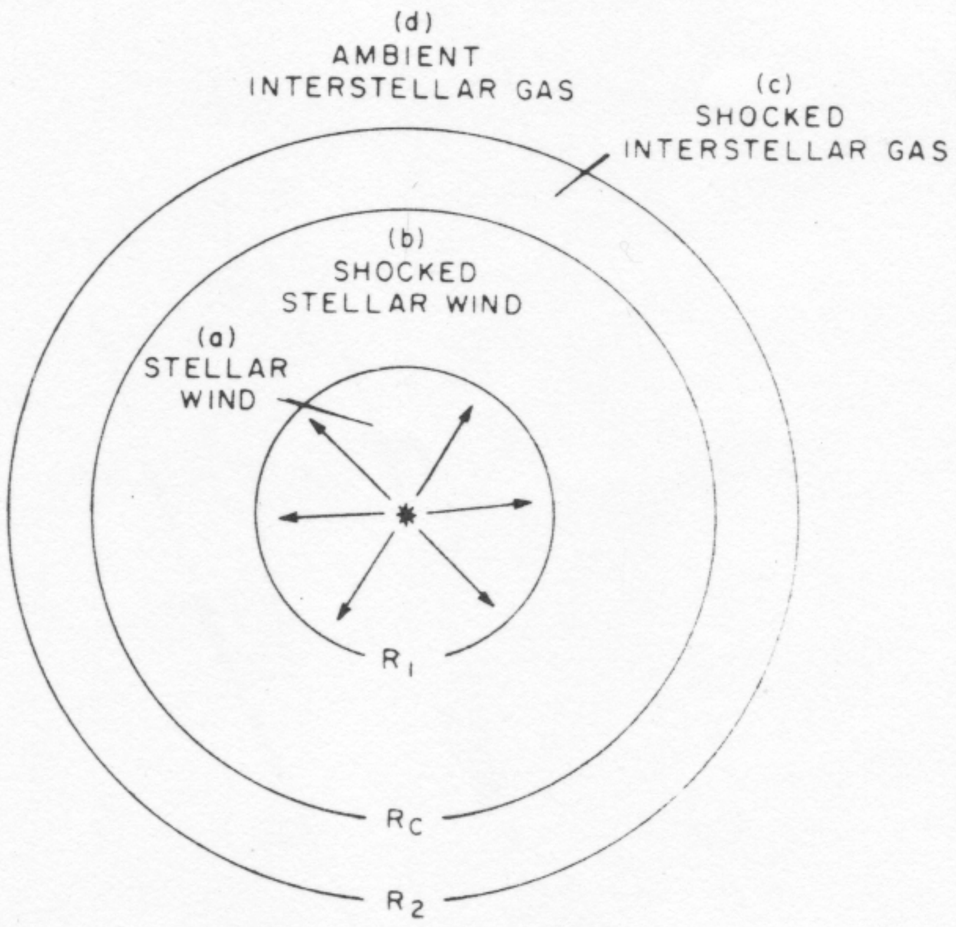


fig.2.3-Il bubble

Come si vede, vi sono 4 zone distinte:

j) La zona 1, di raggio R_1 (raggio dello *shock interno*), che contiene vento stellare imperturbato

jj) La zona 2, compresa fra R_1 ed R_c (raggio del *contatto* fra il vento e la materia interstellare), contenente vento stellare che ha subito uno shock

jjj) La zona 3, compresa fra R_c ed R_2 (raggio dello *shock esterno*) che contiene la materia circumstellare (attraversata da un'onda d'urto) "spazzata" in avanti dal vento

jv) La zona 4, contenente il gas interstellare imperturbato.

Descriviamo ora le più importanti caratteristiche del bubble nelle sue varie fasi evolutive.

2.4.1.La fase di espansione libera

In questa prima fase possiamo considerare il gas espulso dalla stella in espansione libera. Infatti, dato un gas perfetto monoatomico ($\gamma = 5/3$) alla temperatura T, la velocità del suono adiabatica v_S^{ad} è data da ($p \propto \rho^\gamma$):

$$v_S^{ad} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma \mathrm{k} T}{\mu m_\mathrm{H}}}. \tag{2.4.1}$$

Con i valori del nostro problema si trova

$$v_S^{ad} \approx 1.2 \cdot 10^4 \sqrt{T_0} \approx 10^6 \, cm \, s^{-1}, \tag{2.4.2}$$

da cui

$$V^w / v_S^{ad} \approx 167 \gg 1. \tag{2.4.3}$$

Questo vuol dire che la pressione esterna è realmente trascurabile. La durata della fase di espansione libera sarà allora determinata dal tempo necessario perchè la pressione (e quindi la temperatura) nella zona 2 del bubble salga fino a far diventare il valore di v_S^{ad} una frazione significativa di quello di V^w.

Calcoli numerici (Falle, 1975) mostrano che questo tempo è dell'ordine di 10^2 anni ($t^{e.l.} = 3.15 \cdot 10^9 \, s$).

L'aumento di temperatura, che è responsabile della fine della prima fase porta ad una fase detta **adiabatica**, in quanto la temperatura raggiunta dal materiale che si trova nella zona fra le due onde d'urto cade nel minimo destro della curva di Kafatos: è evidente allora che le perdite energetiche saranno trascurabili rispetto all'energia portata dal vento (vedi figura 2.2).

Facciamo notare esplicitamente che la regione 1 del bubble, è in espansione libera in **tutte** le fasi evolutive del bubble, in quanto il vento non *sa* dell'esistenza dell'onda d'urto 1 finchè non vi arriva.

Per un gas in espansione libera emesso ad un tasso costante si può trovare una semplice espressione per la densità: è sufficiente integrare l'equazione di continuità con la condizione di stazionarietà per V^w ed imporre la conservazione della massa per ottenere

$$\rho_w = \frac{\dot{M}^w}{4\pi r^2 V^w} = 2.77 \frac{\dot{M}^{w(6)}}{V^w_{2000}(r_{pc})^2} 10^{-27}\, g\, cm^{-3}, \qquad (2.4.4)$$

dove $\dot{M}^{w(6)}$ è la quantità di materia perduta come vento espressa in unità di milionesimi di massa solare per anno ($\dot{M}^w = \dot{M}^{w(6)} 6.3 \cdot 10^{19}\, g\, s^{-1}$), V^w_{2000} è la velocità del vento espressa in unità di 2000 kilometri al secondo ($V^w = V^w_{2000} 2 \cdot 10^8\, cm\, s^{-1}$) ed r_{pc} è il raggio espresso in parsec.

Alla fine della fase di espansione libera, avremo un raggio dell'ordine di

$$R^{e.l.}_{fin} = V^w t^{e.l.} = 0.21 V^w_{2000} t^{e.l.}_{100}\, pc, \qquad (2.4.5)$$

dove $t^{e.l.}_{100}$ è il tempo espresso in unità di 100 anni ($t^{e.l.} = t^{e.l.}_{100} 3.15 \cdot 10^9\, s$).

Possiamo dunque stimare il valore di ρ_w al bordo di contatto col mezzo circumstellare alla fine della fase di espansione libera:

$$\rho^{e.l.}_w = 6.3 \frac{\dot{M}^{w(6)}}{(V^w_{2000})^3 (t^{e.l.}_{100})^2} 10^{-26} \quad g\, cm^{-3}. \qquad (2.4.6)$$

È immediato osservare che la densità al contatto fra il materiale espulso dalla stella e il mezzo circostante imperturbato nella fase finale dell'espansione libera è $\approx 10^{-2}\rho_0$.

2.4.2.La fase adiabatica

Diamo adesso delle relazioni generali che legano le velocità di R_1, R_c ed R_2 nella fase adiabatica. Falle (1975) riporta le seguenti formule per due gas

di densità ρ_w e ρ_0 che collidono secondo un piano con velocità relativa V (nel nostro caso V^w, valendo la **a**):

$$V_c = \frac{V^w}{1+\alpha} \tag{2.4.7}$$

$$V_1^S = \frac{2+\alpha(1-\gamma)}{2} V_c \tag{2.4.8}$$

$$V_2^S = \frac{\gamma+1}{2} V_c \tag{2.4.9}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_w}}, \tag{2.4.10}$$

dove γ è il rapporto tra i calori specifici del gas. La pressione fra R_1 ed R_2 è data da:

$$p = \frac{2\rho_0 V_2^2}{\gamma+1} \qquad R_1 \leq R \leq R_2, \tag{2.4.11}$$

mentre la velocità del gas è data da

$$V = V_c \qquad R_1 \leq R \leq R_2. \tag{2.4.12}$$

Per quanto riguarda le densità, dalle equazioni di Rankine- Hugoniot (vedi **6-APPENDICE A**) si ha

$$\rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_w \qquad R_1 \leq R \leq R_c, \tag{2.4.13}$$

$$\rho_3 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0 \qquad R_c \leq R \leq R_2. \tag{2.4.14}$$

Le precedenti formule (2.4.7)-(2.4.14) valgono rigorosamente soltanto nel caso di **urto piano** tra i due gas. Possiamo comunque usarle, in quanto le dimensioni in gioco sono piccole rispetto alla distanza fra R_1 ed R_2 (vedi § **2.5.Struttura degli shock**) cosicchè, localmente, la condizione di planarità è praticamente soddisfatta.

Nel nostro caso possiamo determinare il valore di α usando la (2.4.4) e la (2.4.10). Si ottiene cosı‘:

$$\alpha = 24.6\sqrt{\frac{V_{2000}^{w}(\rho_0/m_{\rm H})}{\dot{M}^{w(6)}}}R_c = 24.6R_c, \qquad (2.4.15)$$

dove R_c è il raggio del contatto fra i due gas.

Poichè α è grande risulta che la velocità del gas (2.4.12) è molto più piccola della velocità dl vento. Questo significa che il vento urta una distribuzione di materia praticamente ferma, e quindi tutta l'energia cinetica da esso trasportata si trasforma in energia termica nella zona 2, facendone così salire notevolmente la temperatura a $T_2 = 10^6$ (vedremo poi che in realtà *non tutta* l'energia cinetica trasportata dal vento nella zona 2 porta ad un innalzamento della temperatura in questa zona).

Il fatto che nella zona 2 la temperatura è tanto alta comporta che in questa regione il valore della velocità del suono è sufficientemente elevato che questa ridistribuisce eventuali fluttuazioni della pressione in modo uniforme in tempi scala molto piccoli (Falle (1975) deduce da questo che la geometria risultante della zona 2 deve essere sferica anche se la perdita di massa non lo è).

La durata della fase adiabatica è determinata essenzialmente dal tempo necessario perchè la zona 3 si raffreddi (adiabaticamente) fino ad una temperatura per cui la curva di Kafatos (1973) ha il massimo e quindi le perdite di energia non sono più trascurabili: il sistema si sta avviando ad una situazione in cui

$$\frac{L_w}{L_{\rm rad}} \approx 1, \qquad (2.4.16)$$

dove

$$L_w \equiv \frac{1}{2}\dot{M}^w(V^w)^2 = 1.27\dot{M}^{w(6)}(V_{2000}^{w})^2 10^{36}\, erg\, s^{-1} \qquad (2.4.17)$$

si dice *luminosità meccanica*.

In tal modo termina la fase adiabatica. Falle (1975) trova tempi tipici per parametri uguali a quelli del nostro problema dell'ordine di 2000 anni.

Diamo adesso una descrizione delle varie zone del bubble durante la fase adiabatica.

Regione 1. È di semplice descrizione: si tratta di un profilo di densità determinato dall'equazione (2.4.4) formato dal vento in espansione libera alla velocità $V^w = 2000\, km\, s^{-1}$, e temperatura $T_0 = 10^4\, K$.

Regione 2. Si può ottenere un'espressione analitica per le varie grandezze fisiche in questa regione facendo l'ipotesi che la pressione in questa zona sia uniforme. Questo è praticamente vero, come è stato spiegato sopra. Si può cosìconsiderare che la pressione dipenda soltanto dal tempo, e sia uguale a

$$p(r,t) \approx p(t) = p(R_c) \qquad R_1 \leq r \leq R_c. \tag{2.4.18}$$

La densità in questa zona è dell'ordine di $n_{\rm H} \sim 10^{-2}\, cm^{-3}$.

La conduzione vicino ad R_1 verso la zona 2 sottrae calore nelle vicinanze delle shock, cosicchè alla diminuzione della temperatura si accompagna un proporzionale aumento della densità che mantiene costante il valore della pressione: il salto di densità attraverso l'urto è cosìben più grande del valore 4 (vedi **6-APPENDICE A**) previsto dalle equazioni di Rankine-Hugoniot.

Regione 3. Ha una struttura più complessa della regione 1. Osserviamo che con i parametri L_w, ρ_0, t ed r si può ottenere una sola combinazione *adimensionale*:

$$\xi \equiv r/R_2(t), \tag{2.4.19}$$

$$R_2(t) \equiv \alpha \left(\frac{L_w t^3}{\rho_0} \right)^{1/5} \propto t^{3/5}, \tag{2.4.20}$$

dove α è una costante dell'ordine dell'unità il cui valore può essere determinato soltanto col calcolo numerico.

La possibilità di scrivere un'unica grandezza adimensionale con le grandezze fisiche del problema significa che in questa zona il problema è **autosimile** (per maggiori dettagli sulle soluzioni autosimili vedi **3-LA SUPERNOVA**) ovvero i profili di tutte le grandezze fisiche variano soltanto per un cambiamento di scala, dipendendo queste soltanto da ξ.

Lo spessore della zona $R_c - R_2$ è dato dal rapporto

$$\xi_c = R_c(t)/R_2(t) = 0.86, \tag{2.4.21}$$

ovvero

$$R_2(t) - R_c(t) = 0.14 R_2(t) \tag{2.4.22}$$

da cui si vede che lo spessore della zona 3 è abbastanza piccolo rispetto alle sue dimensioni. In figura 2.4 è riportato l'andamento delle variabili definite come segue:

$$v(r) \equiv V_2 U(\xi) \quad \rho(r) \equiv \rho_0 G(\xi) \quad p(r) \equiv \rho_0 V_2^2 P(\xi) \tag{2.4.23}$$

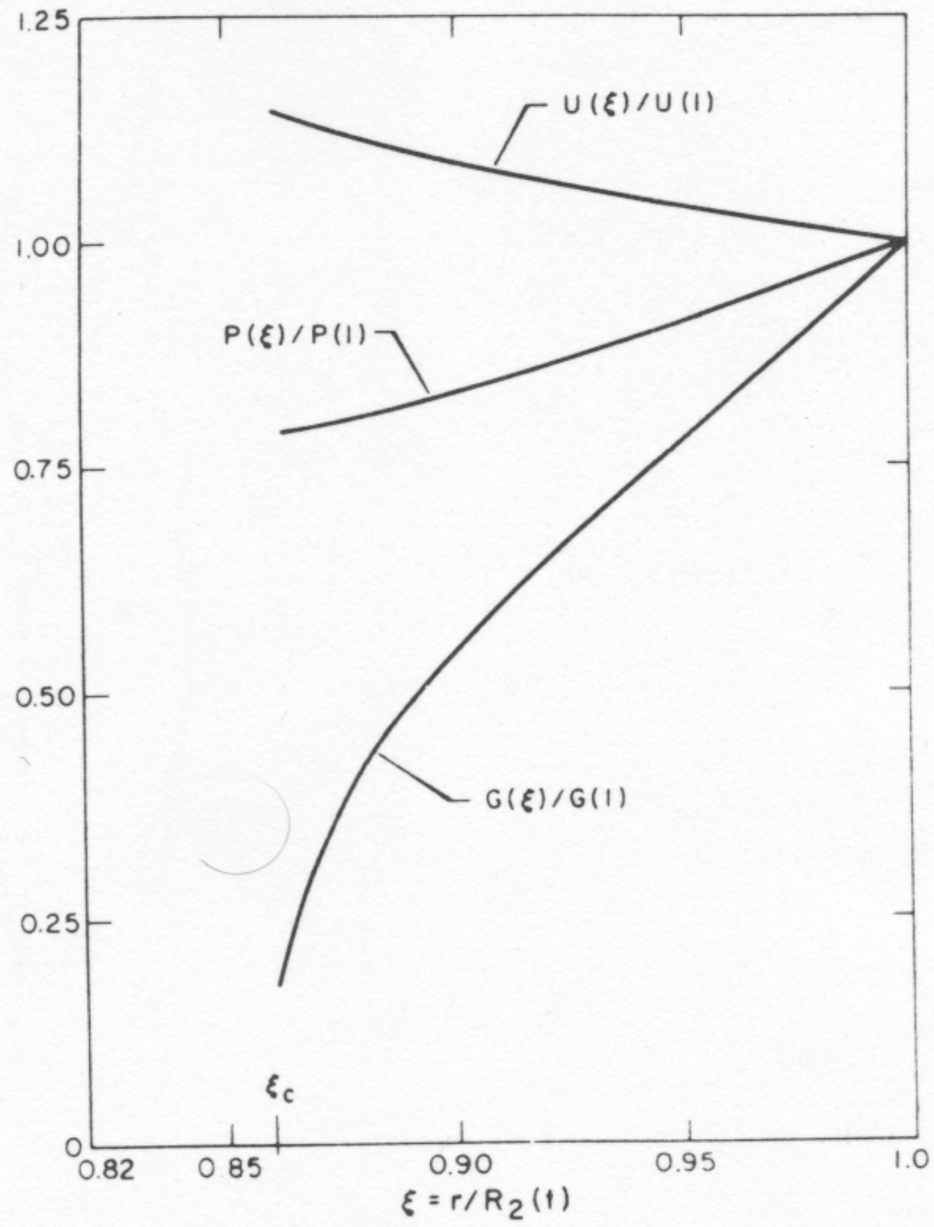


fig.2.4-La zona 3

Imponendo l'autoconsistenza delle soluzioni nella zona 2 e nella zona 3 si determina, oltre al valore di α (risulta essere $\alpha = \alpha^{ad} = 0.88$) anche la quantità di energia in queste due regioni.

Essendo la fase adiabatica si impone che sia $E_2 + E_3 = L_w t$ per $t \leq t^{ad}$. Si trova cosı' (Castor, McCray e Weaver, 1977):

$$E_2 = 1.5\frac{4\pi}{3}(R_c^3 - R_1^3)p(t) \approx 2\pi R_c^3 p(t) = \frac{5}{11}L_w t, \qquad (2.4.24)$$

$$E_3 = \int_0^t 4\pi R_c^2 v(R_c)p(\tau)d\tau = \frac{6}{11}L_w t. \qquad (2.4.25)$$

Come avevamo precedentemente accennato, non **tutta** l'energia portata dal vento si deposita come calore nella zona 2, ma una sua parte (6/11) viene usata

per compiere lavoro sulla zona 3. Calcoli numerici mostrano a loro volta che nella regione 3, il 40.4 per cento dell'energia è cinetica, mentre il restante 56.9 per cento è di tipo termico.

Si dimostra infine che in questa fase la regione 2 non è descrivibile da una soluzione autosimilare, dipendendo il rapporto R_1/R_c dal tempo.

2.4.3.La fase isoterma

Una volta terminata la fase adiabatica, prende inizio la fase più lunga, che arriva fino alla stazionarietà della struttura in un tempo dell'ordine del milione di anni. Tale fase è detta **isoterma** a causa delle grandi perdite radiative che si verificano nella zona più esterna del bubble (regione 3).

Regione 1. Come è già stato detto, la situazione in questa regione è quella di un vento in espansione libera, regolato dalla (2.4.4).

Regione 2. Si può dimostrare che in questa fase la zona 2 può essere descritta da una soluzione autosimile. Castor, McCray e Weaver (1977) introducono la conduzione e successivamente l'irraggiamento. Detta M_2 la massa che evapora dalla zona 3 nella zona 2 per effetto della conduzione, trovano le seguenti soluzioni:

$$T = \propto \left(\frac{\dot{M}_2}{R_2^2}\right)^{2/5} (R_2 - r)^{2/5}, \tag{2.4.26}$$

da cui

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{2}{5}\frac{T}{R_2 - r}. \tag{2.4.27}$$

Regione 3. Come abbiamo già detto, quando il raffreddamento adiabatico porta la temperatura della zona 3 attorno ai $6 \cdot 10^5\, K$, le perdite radiative diventano importanti e si ha un "*collasso*" di questa zona in una *shell* densa di

materiale interstellare spazzato dal vento veloce, a contatto in R_c con un gas alla temperatura di qualche milione di gradi.

È evidente allora che diventa importante la *conduzione* attraverso R_c.

Al flusso conduttivo che trasporta energia termica dalla zona 2 alla zona 3 corrisponde un flusso *meccanico* che si muove in senso opposto: si ha cioè una vera e propria evaporazione della materia *fredda* contenuta nella zona 3 nella zona 2 (in 10^6 anni dalla zona 2 vengono acquisite circa $35M_\odot$). La quantità di materiale così perduta è del tutto insignificante per quanto riguarda la dinamica della zona 3, (che contiene ben più materia, come si può vedere ponendo $R_2 = 40\,pc$ e calcolando $M_3 \approx \frac{4\pi}{3} R_2^3 \rho_0 \approx 2 \cdot 10^3 M_\odot$) ma è la principale sorgente di materia per la zona 2.

In questa fase $R_1 \ll R_2$ e qui, essendo la temperatura molto elevata, la pressione è costante poichè ogni deviazione dall'equilibrio viene immediatamente ristabilita dall'elevata velocità del suono.

Per quanto riguarda in particolare il moto della zona 3, si possono scrivere le equazioni che lo descrivono come * segue:

$$E_2 = \frac{3}{2}\frac{4\pi}{3} R_2^3 p \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3} R_2^3 \rho_0 \dot{R}_2\right) = 4\pi R_2^2 p, \tag{2.4.28}$$

$$\dot{E}_2 = L_w - 4\pi R_2^2 p \dot{R}_2. \tag{2.4.29}$$

Le soluzioni delle equazioni (2.4.28)-(2.4.29) sono le seguenti:

$$E_2 = \frac{5}{11} L_w t, \tag{2.4.30}$$

$$R_2 = \left(\frac{250}{308\pi}\right)^{1/5} L_w^{1/5} \rho_0^{-1/5} t^{3/5} \propto t^{3/5}, \tag{2.4.31}$$

---

* in questa fase la distanza fra R_c ed R_2 diventa molto piccola (ossia $(R_2 - R_c)/R_2 \ll 1$), cosicchè d'ora in poi useremo R_2 al posto di R_c.

$$p = \frac{7}{(3850\pi)^{2/5}} L_w^{2/5} \rho_0^{3/5} t^{-4/5} \propto t^{-4/5}. \tag{2.4.32}$$

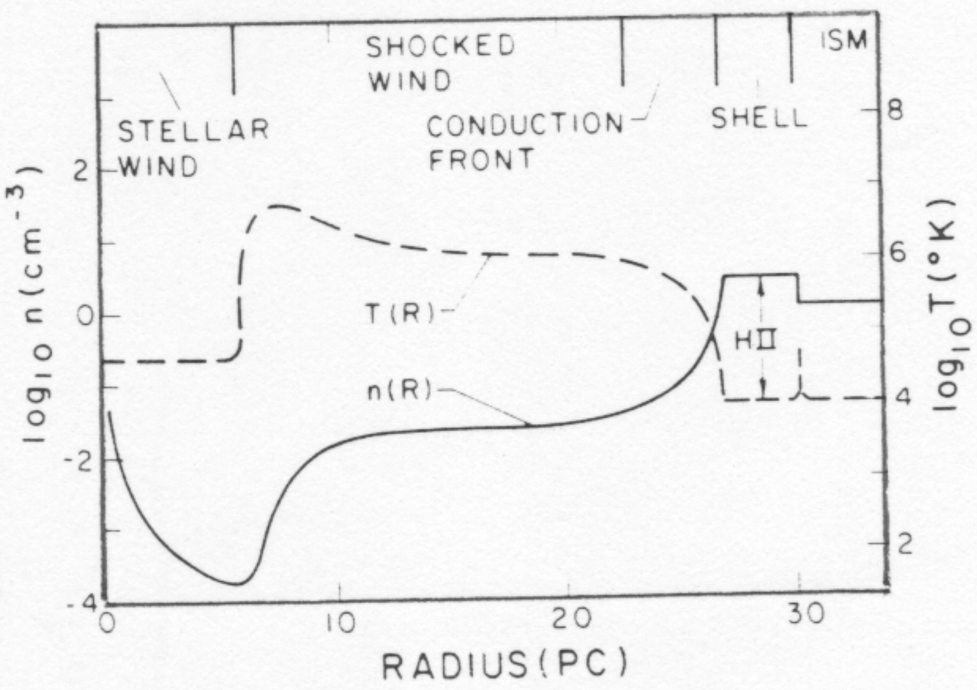
Osserviamo che, pur essendo rimasta l'equazione (2.4.31) formalmente identica alla (2.4.20), il coefficiente numerico è diventato più piccolo, ossia:

$$\alpha^{ad} = 0.88 \rightarrow \alpha^{isot} = 0.76\,. \tag{2.4.33}$$

Tale diminuzione è dovuta alle perdite radiative che ora si verificano nella zona 3.

Questo tra l'altro significa che per tempi lunghi la velocità della zona 3 tende a rallentare di un fattore $\alpha^{is}/\alpha^{ad} = 0.86$ rispetto alla fase adiabatica. Sia infatti t^{ad} l'istante in cui termina la fase adiabatica. Supponendo la transizione dalla fase adiabatica alla fase isoterma trascurabile consideriamo la velocità che R_2 avrebbe al tempo $t_0 + \tau$ in regime adiabatico, e la velocità che invece realmente ha. Facendone il rapporto al tempo di paragone $t_{par} \equiv t^{ad} + \tau$ e considerando $\tau \rightarrow \infty$ si ottiene:

$$\frac{V_{S2}^{ad}(t_{par})}{V_{S2}^{is}(t_{par})} = \frac{\alpha^{ad}}{\alpha^{is}} \left(1 + \frac{t^{ad}}{\tau}\right)^{-2/5} \rightarrow \frac{\alpha^{ad}}{\alpha^{is}} = 0.86\,. \tag{2.4.34}$$



In figura è mostrato l'andamento della densità e della temperatura all'interno di un bubble all'età $t = 10^6$ anni. I parametri numerici che sono stati usati dagli autori per il calcolo della struttura sono $L_w = 1.267 \cdot 10^{36}\, erg\, s^{-1}$ e $\rho_0 = 1.67 \cdot 10^{-24}\, g\, cm^{-3}$. Si noti l'andamento $\propto r^{-2}$ nella prima zona ed il salto di densità molto più grande di 4 ad R_1 (dovuto alla conduzione verso R_c). (Castor, McCray e Weaver, 1977)

fig.2.5-Il bubble a $t = 10^6$ anni

2.4.4.La fase di dispersione

In questa ultima fase la shell densa che si è formata per il raffreddamento radiativo della zona 3 si disperde nel mezzo interstellare, lasciando così una cavità calda compresa fra R_1 ed R_2 riempita di un gas estremamente rarefatto ($n_{\mathrm{H}} \approx 10^{-2}\, cm^{-3}$): è la struttura finale con cui interagirà la supernova.

§ 2.5.Struttura degli shock

Nei calcoli precedenti si è implicitamente supposto che le larghezze dei due shock fossero trascurabili rispetto alle dimensioni del bubble.

Si può ragionevolmente ritenere che lo spessore degli shock non possa essere superiore alla distanza per cui possono viaggiare gli elettroni e gli ioni nelle vicinanze di R_1 e R_2. Dal momento che il *cammino libero medio* in un plasma è dato da:

$$\lambda(cm) \sim 10^4 T^2/n_e, \tag{2.5.1}$$

nel nostro caso si avrebbero cammini liberi medi dell'ordine di 10^{16} cm, valore questo abbastanza piccolo rispetto alle dimensioni delle regioni in cui si forma l'onda d'urto (dopo un tempo di 10^6 anni dall'inizio della fase isoterma si trova che $R_1 = 5.6\,pc \approx 10^{19}\,cm$: dunque lo shock ad R_1 può senz'altro essere supposto sottile. Per quanto riguarda lo shock ad R_2 la situazione è ancora migliore, in quanto la temperatura ad R_2 è minore che ad R_1, ed esattamente il contrario avviene per la densità).

In realtà, l'estrema rarefazione della materia nelle particolari condizioni fisiche del nostro problema non può dar luogo ad onde d'urto di tipo *collisionale*. Gli shock che si sviluppano nel nostro caso sono infatti di tipo $non-collisionale$, ossia non sono dovuti ad urti fisici tra le particelle che compongono il gas ma a *processi collettivi* più complessi ("urti" fra turbolenze * elettromagnetiche).

Si può dimostrare (McKee e Hollenbach, 1980) che lo spessore di shock dovuti a meccanismi del tipo precedente è minore di quello che si avrebbe secondo la (2.5.1).

Un'osservazione importante dev'essere fatta a proposito delle equazioni

---

* qui si vede come, pur avendo trascurato nelle equazioni della fluidodinamica il campo magnetico, un suo effetto deve essere considerato presente per spiegare l'esistenza di shock in un mezzo tipicamente non collisionale come il mezzo circumstellare.

della fluidodinamica: come è già stato anticipato (vedi § **2.3.Le equazioni**) precedentemente, queste equazioni sono dedotte supponendo il fluido collisionale, ipotesi che abbiamo già detto non essere verificata nel nostro problema. Cowie e McKee (1977) hanno comunque dimostrato che, sebbene λ sia più grande delle lunghezze caratteristiche macroscopiche del fluido, la funzione di distribuzione delle particelle è sufficientemente isotropa, e questo permette di poter usare ugualmente le equazioni della fluidodinamica. In più, si può dimostrare che per plasmi non collisionali la distribuzione delle particelle non è molto lontana da una maxwelliana (in cui la dispersione delle velocità rappresenta la temperatura del plasma).

§ 2.6.La conduzione e il campo magnetico

Abbiamo già parlato del problema del flusso saturato. È chiaro che questa non è la situazione al raggio del contatto R_c, in quanto la densità nella zona 3 è sufficientemente elevata da impedire la saturazione del flusso di elettroni. Tutta un'altra situazione si trova immediatamente a destra di R_1. Nella zona 2 infatti le densità medie sono molto basse ($n_m \approx 10^{-2}\, cm^{-3}$), tanto da consentire la possibilità di un flusso saturato.

Per quanto riguarda la presenza o meno di un campo magnetico, dobbiamo intanto far notare come esso non sia trattabile rigorosamente in simmetria sferica, poichè, come è noto, le linee del campo magnetico sono sempre chiuse e quindi in qualche modo si ha sempre una dipendenza angolare di **B**. In ogni caso il campo magnetico potrebbe essere introdotto nei calcoli in modo approssimato considerando una *pressione magnetica media* $\propto B^2$. Falle (1975) ha numericamente dimostrato che per valori "normali" del campo magnetico

($B \approx 10^{-6}\, gauss$), i risultati sono praticamente uguali a quelli ottenuti in sua assenza.

Naturalmente il fatto di imporre $B = 0$ nelle equazioni non vuol dire che sia lecito trascurare eventuali effetti indiretti del campo magnetico: abbiamo infatti già discusso della sua importanza nello spiegare la presenza di onde d'urto in un mezzo non collisionale e nel regolare la conduzione termica ponendo un limite massimo al flusso di calore trasportabile.

§ 2.7.Il caso disomogeneo

I modelli di cui bubble che abbiamo considerato fino ad ora hanno in comune il fatto di considerare il mezzo circumstellare *omogeneo*. In realtà sappiamo che non è così. McKee e Ostriker (1977) hanno introdotto il concetto di **mezzo interstellare multifase** (multiphase interstellar medium, m-ISM). Secondo tale modello il mezzo interstellare si può rappresentare come un m-ISM, che risulta composto da tre *fasi* principali:

1) una fase calda a bassa densità ($T \sim 5 \cdot 10^5\, K$; $n_{\rm H} \sim 0.004\, cm^{-3}$),

2) una fase più fredda a densità più elevata ($T \sim 10^4\, K$; $n_{\rm H} \sim 0.3\, cm^{-3}$),

3) una fase fredda ad alta densità ($T \sim 100\, K$; $n_{\rm H} \sim 40\, cm^{-3}$).

Il caso di una gigante blu circondata da un m-ISM è stato trattato da McKee, Van Buren e Lazareff (1984).

Nel loro lavoro prendono in considerazione gli effetti della radiazione ionizzante (L_α) e del vento di stelle delle prime classi spettrali (O-B0) su un mezzo circumstellare disomogeneo, (rappresentato soltanto da materia nella fase 3, e trascurando la massa presente come fase 2 e 1).

Gli autori iniziano cosiderando una nube di massa m_0 e studiano due effetti

su di essa: l'**effetto-razzo** (o *effetto di Oort- Spitzer*, per cui una nube di gas, riscaldata asimmetricamente da un solo lato, per effetto dell'evaporazione si mette in moto in direzione opposta) e la **fotoevaporazione**. In base a questi due effetti la nube tende ad evaporare e contemporaneamente ad allontanarsi, lasciando al suo posto un mezzo omogeneo (e ionizzato) di densità media n_m: per semplicità di calcolo questi autori suppongono che la zona omogeneizzata sia una sfera di raggio $R_{om}(t)$. Tale raggio dipende evidentemente oltre che dall'epoca cui si riferisce il calcolo, anche dalla classe spettrale della stella, dalla massa della nube, e dalla sua distanza originaria dalla stella.

Gli autori estendono poi il calcolo ad un insieme di nubi distribuite nello spazio in modo uniforme, e con una legge del tipo

$$N(m_0) \propto m_0^{-q} \quad (m_{inf} \leq m_0 \leq m_{sup};\ 1.5 \leq q \leq 2), \tag{2.7.1}$$

dove $N(m_0)$ è il numero medio di nubi per unità di volume e di massa. I limiti sui valori di q sono dovuti a Hausman (1982). Supponendo $m_{sup} \approx 10^4\, m_{inf}$ e $m_{inf} \approx 1 M_\odot$ essi trovano la seguente notevole formula, **indipendente** dal tipo spettrale della stella:

$$R_{om}(t_{MS}) = 56 n_m^{-0.3}\, pc. \tag{2.7.2}$$

Essi considerano a questo punto il vento della stella e studiano il rapporto tra la cavità formatasi per effetto Oort-Spitzer e fotoevaporazione con il raggio raggiunto nello stesso tempo dal raggio R_2 di un bubble. Per operare tale confronto essi fanno ricorso alla luminosità meccanica del vento L_w e ad una luminosità detta *luminosità di Strömgren*, definita come

$$L_{St} = 1.26 \cdot 10^{36} \left(\frac{S_{49}^2}{n_m} \right)^{1/3} erg\, s^{-1}. \tag{2.7.3}$$

per ottenere una luminosità adimensionale

$$L_w^* \equiv L_w / L_{St}. \tag{2.7.4}$$

Le conclusioni, di immediata evidenza, sono le seguenti:

a) Se $L_w^* < 1$ si deduce che gli effetti dovuti alla fotoevaporazione e al meccanismo di Oort-Spitzer predominano su quelli dovuti al vento, ossia il raggio del bubble sarà in ogni momento più piccolo del raggio di omogeneizzazione, per cui il bubble si evolverà con le modalità già descritte per il caso omogeneo.

b) Se $L_w^* \geq 1$ il raggio del bubble si trova su $R_{om}(t)$può avanzare soltanto col raggio di omogeneizzazione. L'evoluzione successiva porta comunque alla formazione di un bubble se la stella ha una vita sufficientemente lunga per cui $R_{om}(t_{MS}) > R_{bub}^{staz}$.

Vediamo adesso come calcolare L_w^* nel nostro caso.

Panagia (1973) e Abbott (1982) danno la seguente relazione per le stelle delle classi spettrali sopra citate:

$$L_w = 1.0 \cdot 10^{36} S_{49}^{3/2}, \tag{2.7.5}$$

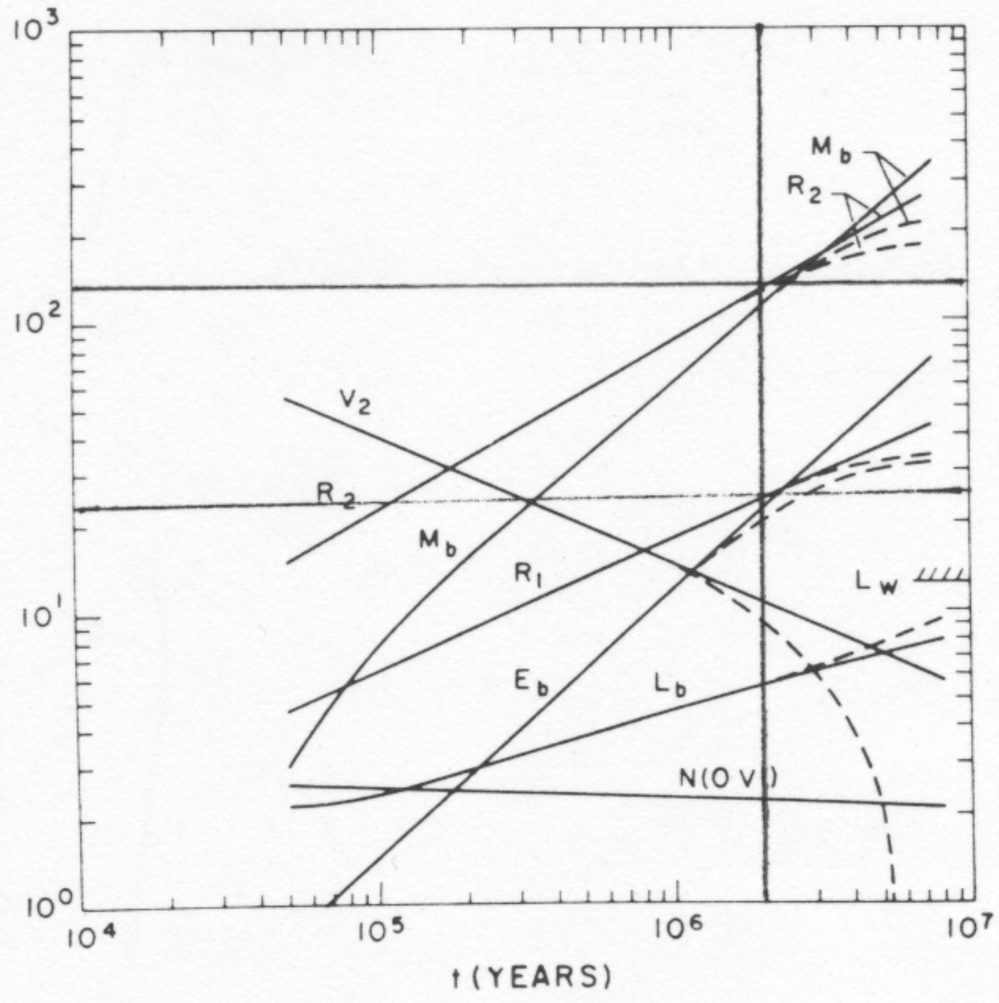
da cui, finalmente, è

$$L_w^* = 0.8\, S_{49}^{5/6} n_m^{1/3}. \tag{2.7.6}$$

Considerando i valori del nostro problema si ottiene

$$L_w^* = 0.26 \tag{2.7.7}$$

Come si vede, il nostro caso appartiene al tipo evolutivo a. Perciò il nostro modello, almeno fino a quando ci si limita a considerare l'interazione supernova-bubble, è una buona schematizzazione anche del caso disomogeneo.



50 p

L'evoluzione dei più importanti parametri di un bubble per $L_w = 1.27 \cdot 10^{36}\, erg\, s^{-1}$ e $\rho_0 = 1.67 \cdot 10^{-24}\, g\, cm^{-3}$. Le linee continue rappresentano i valori calcolati senza considerare la pressione esterna. Le linee tratteggiate rappresentano invece l'andamento dei vari parametri considerando la pressione termica esterna dovuta ad HII. Le unità delle ordinate sono rispettivamente R_1 ed R_2 (10^{18} cm), V_2 (km s^{-1}), M_b (= massa contenuta nella regione 2) (10^{33}), E_b (10^{49} erg), L_b (10^{35} erg s^{-1} (Castor, McCray e Weaver, 1977).

fig.2.6-L'evoluzione di un bubble

Possiamo usare la figura 2.6 per avere una stima dell'efficienza del programma usato per il calcolo della struttura del bubble. A pagina 65 è mostrato un profilo delle variabili fisiche densità, temperatura ed energia interna ottenute con il nostro codice. I valori dei raggi R_1 ed R_2 da noi calcolati sono in buon accordo con quanto mostrato dalla figura sopra mostrata.

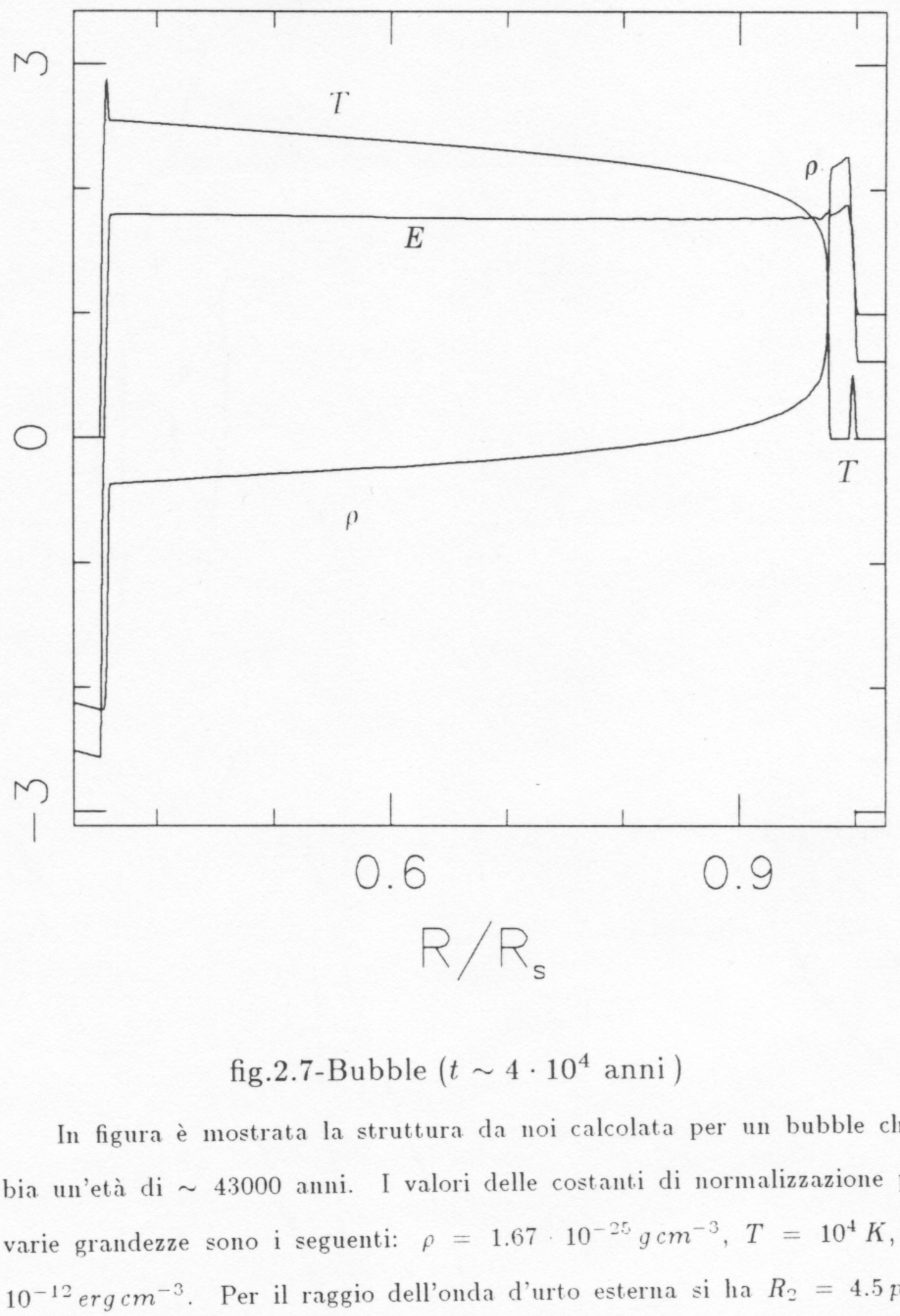


fig.2.7-Bubble ($t \sim 4 \cdot 10^4$ anni)

In figura è mostrata la struttura da noi calcolata per un bubble che abbia un'età di $\sim$ 43000 anni. I valori delle costanti di normalizzazione per le varie grandezze sono i seguenti: $\rho = 1.67 \cdot 10^{-25}\, g\, cm^{-3}$, $T = 10^4\, K$, $E = 10^{-12}\, erg\, cm^{-3}$. Per il raggio dell'onda d'urto esterna si ha $R_2 = 4.5\, pc$. In questa fase le perdite radiative della zona 2 sono ancora trascurabili (vedi anche fig.2.7, L_R).

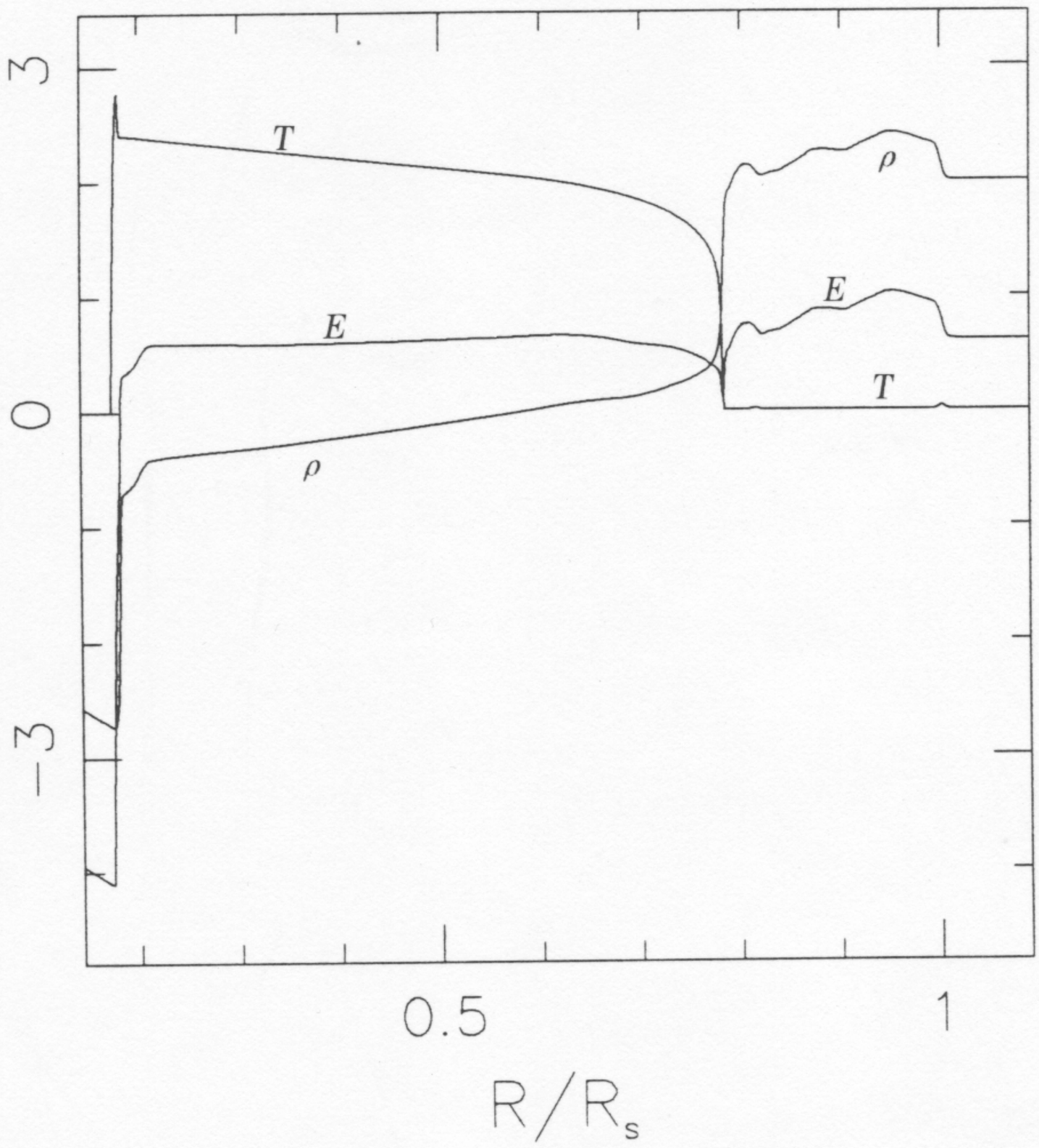


fig.2.8-Bubble ($t \sim 2 \cdot 10^6$ anni)

In figura è mostrata la struttura da noi calcolata per un bubble che abbia un'età di $\sim 2 \cdot 10^6$ anni. I valori delle costanti di normalizzazione per le varie grandezze sono i seguenti: $\rho = 1.67 \cdot 10^{-26}\, g\, cm^{-3}$, $T = 10^4\, K$, $E = 10^{-12}\, erg\, cm^{-3}$. Per il raggio dell'onda d'urto esterna si ha $R_2 = 50\, pc$. In questa fase le perdite radiative della zona 2 non sono più trascurabili (vedi anche fig.2.7, L_{II}).

3-LA SUPERNOVA

Il problema dell'esplosione di una supernova nel mezzo interstellare è stato preso in considerazione da molti autori. Alcuni tra i lavori più importanti sono quelli di Chevalier (1974), Falle (1975), Chevalier (1982).

In questo capitolo saranno presentati e discussi i punti più significativi di questi lavori. Analizzeremo tutti e due i tipi di supernova, perchè, pur occupandoci in questa tesi specificatamente di una SNII, saranno utili per l'interpretazione dei dati ottenuti (vedi **4-I RISULTATI**) anche conoscenze sul comportamento delle SNI.

In questo capitolo prenderemo in considerazione alcuni risultati analitici e numerici ottenuti sull'argomento dagli autori precedentemente citati: tali risultati saranno confrontati con quelli ottenuti dal nostro codice numerico per provarne l'affidabilità.

§ 3.1.Il modello per l'esplosione

I modelli numerici impiegati nello studio dell'evoluzione di un resto di supernova (*Supernova Remnant*, SNR), non usano informazioni sui meccanismi fisici dell'esplosione, ne' sulle modalità dell'esplosione stessa. La computazione del modello inizia infatti nel momento in cui l'onda d'urto, prodottasi nella stella all'istante dell'esplosione, raggiunge la * superficie stellare. I modelli numerici di questo tipo non distinguono quindi fra un'esplosione di una SNI o di

* Nei modelli numerici si considera un'energia pari all'energia cinetica liberata nell'esplosione in una piccola regione di spazio (molto più piccola delle dimensioni della griglia, ma che può essere anche più grande delle effettive dimensioni stellari).

una SNII se non per le differenze nello stato e nella distribuzione del materiale circumstellare. È chiaro che in questa semplificazione i parametri fondamentali che possono guidare l'evoluzione del SNR sono i seguenti:

a) L'energia cinetica dell'esplosione, che indicheremo con E.

b) Il profilo di densità dell'ejecta che individueremo, in coordinate polari sferiche centrate nella stella, come segue:

$$\rho_{ejec} = \rho_{ejec}(r, \vartheta, \varphi). \tag{3.1.1}$$

c) Il profilo di densità del mezzo circumstellare,

$$\rho_{circ} = \rho_{circ}(r, \vartheta, \varphi). \tag{3.1.2}$$

Le nostre ipotesi sono le seguenti:

a') Consideriamo $E = 10^{51}\, erg$.

b') L'esplosione avviene in simmetria sferica, cosicchè si ha:

$$\rho_{ejec} \equiv \rho_{ejec}(r), \tag{3.1.3}$$

in più la stella è ferma rispetto al mezzo circumstellare (essendolo anche il progenitore ed avvenendo l'esplosione in simmetria sferica).

c') La materia circumstellare ha distribuzione isotropa,

$$\rho_{circ} \equiv \rho_{circ}(r). \tag{3.1.4}$$

Come abbiamo già accennato è l'equazione (3.1.4) che stabilisce nel modello la differenza fra l'esplosione di una SNi ed una SNII. Mentre infatti nel caso di una SNI ci possiamo aspettare un mezzo circumstellare a densità media praticamente costante (l'età, la massa e la natura del progenitore di una SNI

escludono la presenza di un mezzo alterato da fenomeni di perdita di massa), nel caso di una SNII, sia che essa esploda nella fase di RG che di BG (vedi **1-INTRODUZIONE**), il profilo di densità del mezzo circumstellare, ha, almeno localmente, un profilo del tipo $\propto r^{-2}$ (vedi **2-IL BUBBLE**).

§ 3.2.L'evoluzione di un SNR

Nel momento dell'esplosione della SN si sviluppa nel mezzo circumstellare una regione perturbata (formata dal materiale espulso dalla stella e dal mezzo circumstellare stesso) che si espande nel mezzo imperturbato ad una velocità dell'ordine di $1 \div 1.5 10^4\, km\, s^{-1}$. La zona perturbata costituisce l'SNR. Un SNR si evolve in 2 fasi:

a) una fase **adiabatica** durante la quale le perdite radiative sono trascurabili, della durata di circa $2 \cdot 10^4$ anni. Tale fase può a sua volta essere divisa in due parti:

a': fase di Chevalier (1982)

a": fase di Sedov (1959)

b) una fase **radiativa**, in cui le perdite energetiche dell'SNR non possono più essere trascurate.

Inizieremo la descrizione parlando della fase adiabatica di Sedov, sia perchè essa è stata individuata e descritta prima della fase di Chevalier, sia perchè la soluzione di Sedov stessa mostrerà l'esigenza di una soluzione più dettagliata a tempi precedenti.

3.2.1.La soluzione di Sedov

Sedov (1959) ha usato gli strumenti propri della teoria dell'autosimilarità

(vedi **6-APPENDICE A**) per affrontare il problema dell'*esplosione forte* in un mezzo a densità variabile.

In tale problema si suppone l'esplosione *puntiforme* e la massa espulsa *nulla*. Si trascurano anche la pressione esterna e le perdite energetiche. La soluzione di Sedov è quindi una soluzione adiabatica.

Nelle ipotesi precedenti, le uniche grandezze che descrivono completamente il problema sono le seguenti: *energia cinetica* dell'esplosione (E) e la *densità del mezzo circumstellare*, che si suppone seguire una legge del tipo:

$$\rho_{circ}(r) = \frac{\rho_0}{r_0^{-s}} r^{-s} \equiv A r^{-s}. \tag{3.2.1}$$

È evidente che in questa approssimazione non ha senso parlare del profilo di densità dell'ejecta.

Si vede immediatamente che il problema dell'esplosione forte ammette una soluzione autosimile. Le uniche grandezze adimensionali che determinano il problema sono infatti:

$$s \quad ; \quad \gamma \quad ; \quad \lambda = \left(\frac{A\alpha}{E}\right)^{1/(5-s)} \frac{r}{t^{2/(5-s)}}. \tag{3.2.2}$$

In particolare, per quanto riguarda la posizione dello shock, si trova la seguente formula:

$$r_s = \lambda_s \left(\frac{E}{A\alpha}\right)^{1/(5-s)} t^{2/(5-s)} \qquad ; \lambda_s, \equiv 1 \tag{3.2.3}$$

$$v_s = \frac{dr_s}{dt} = \frac{2}{5-s}\frac{r_s}{t}. \tag{3.2.4}$$

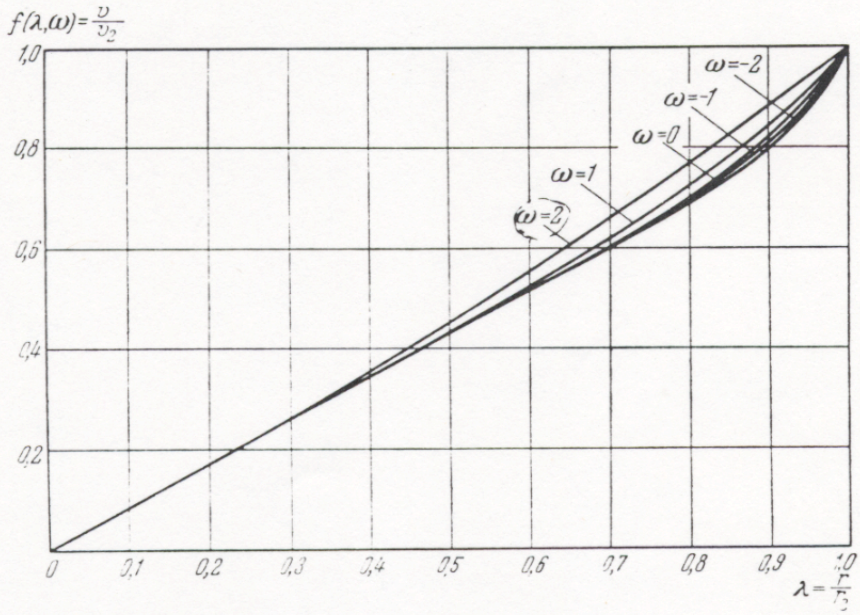
Nel nostro caso particolare s assumerà due valori, compatibilmente con il tipo di supernova di cui vogliamo studiare l'evoluzione.

Come abbiamo precedentemente detto, per le SNI si può assumere che la densità del mezzo circumstellare sia costante ($s_I = 0$), mentre per una SNII

poniamo $s_{II} = 2$ (affronteremo in seguito una discussione più approfondita intorno a questo punto)

$$r_s \propto \begin{cases} t^{2/3}, & \text{se SNII} \\ t^{2/5}, & \text{se SNI.} \end{cases}$$

In figura sono rappresentati gli andamenti della velocità, densità e pressione (normalizzati al valore che assumono all'onda d'urto) ottenuti da Sedov per alcuni valori dell'esponente s (in figura ω).



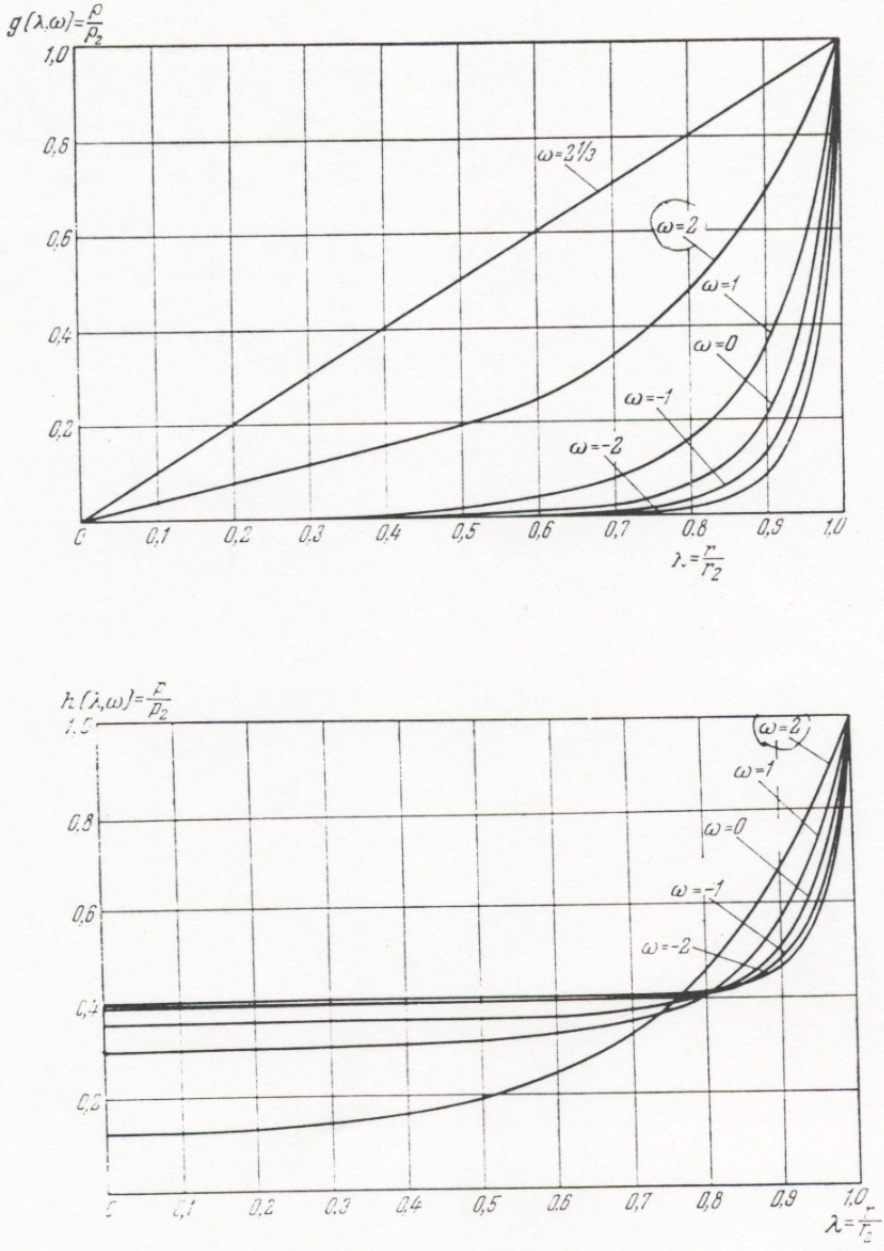


fig.3.1-Soluzioni di Sedov: $\rho \propto r^{-\omega}$

Sicuramente la soluzione di Sedov è un notevole risultato, ma in ogni caso si tratta di un'approssimazione non banale, considerate le strette richieste fatte circa il modello dell'esplosione. Sappiamo infatti che l'esplosione non è assolutamente puntiforme, e questa discrepanza dalle ipotesi di Sedov è tanto più marcata quanto più ci vogliamo spingere con la nostra indagine a tempi prossimi all'esplosione.

Ci possiamo quindi chiedere se esiste o meno un criterio che possa dire quando, o in che condizioni, la soluzione di Sedov valga con un'approssimazione soddisfacente.

Un parametro che può essere usato in modo significativo per dare una simile valutazione è il rapporto fra la massa spazzata dall'onda d'urto e quella espulsa nell'esplosione: quanto maggiore sarà questo rapporto tanto più simile al problema dell'esplosione puntiforme forte sarà il problema da noi trattato. Chiamiamo tale rapporto Ξ. Stime diverse sono state ottenute numericamente per Ξ: Rosenberg e Scheuer (1973) trovano che la soluzione numerica del problema dell'esplosione di una supernova converge alla soluzione di Sedov (per $s = 0$) quando l'onda d'urto ha attraversato una quantità di materiale circa 40 volte maggiore di quella espulsa nell'esplosione stessa, mentre Jones, Smith e Straka (1981) danno per Ξ un valore di 8.

Abbiamo detto inizialmente che questa fase è adiabatica: questo è facilmente comprensibile se consideriamo che la legge di raffreddamento usata è quella di Kafatos (vedi **2-IL BUBBLE**) senza però il termine $\Phi(T_0)$ in quanto ormai manca la stella che riscaldava il mezzo. La formula allora usata è la seguente:

$$L = n_{\mathrm{H}} n_e \Phi(T). \tag{3.2.5}$$

Le temperature raggiunte nel materiale espulso in seguito alla compressione operata dall'onda d'urto sono dell'ordine di $10^8\,K$, e quindi l'irraggiamento previsto dalla (3.2.5) è totalmente trascurabile.

Chevalier (1974) trova numericamente che per i primi $2{\cdot}10^4$ anni l'evoluzione del SNR avviene in modo adiabatico.

3.2.2.La fase radiativa

La fase adiabatica termina con modalità simili a quanto già visto per il bubble. Dopo $4 \cdot 10^4$ anni, il raffreddamemento radiativo nella parte esterna del SNR diventa importante, la temperatura in questa zona diminuisce con un conseguente calo della pressione ed aumento della densità. Dopo circa $4.55 \cdot 10^4$ anni si ha il massimo picco della densità nella zona raffreddata.

Per quanto riguarda un eventuale campo magnetico Chevalier (1974) trova che esso è ininfluente nell'evoluzione del SNR, eccetto che nella shell densa dove, per la contrazione delle linee di forza del campo che rimangono congelate in essa, si ha una contropressione che provoca un minor incremento della densità.

Le temperature raggiunte dal materiale nella zona che ha subito il collasso sono molto basse, dell'ordine di 10 K: ciò vuol dire che in questa zono sono da attendersi grandi emissioni nell'infrarosso ad opera delle polveri.

Questo è per sommi capi lo scenario dell'evoluzione di un resto di supernova. Un semplice calcolo dimostra però che l'esplosione di una supernova dentro un bubble di qualche decina di parsec di diametro non può essere trattata usando l'interazione tra il bubble stesso ed un profilo di densità descritto dalla soluzione di Sedov.

In modo molto grossolano possiamo infatti dare una formula che esprime

il rapporto fra la materia spazzata nel bubble (che ha all'interno una densità praticamente costante, $n_{\rm H} \approx 10^{-2}\, cm^{-3}$) dall'onda d'urto e la materia espulsa nell'esplosione. Si ha:

$$\Xi \equiv \frac{M^{Rac}}{M^{Esp}} = \frac{4\pi (R^{Bub})^3 (n_{\rm H} m_{\rm H})}{3 M_{\odot}^{ejec}} = \frac{9.5 \cdot 10^{-4}}{M_{\odot}^{Esp}} (R_{pc}^{Bub})^3. \qquad (3.2.6)$$

Ponendo $R_{pc}^{Bub} = 40$ si ottiene $\Xi = 61 (M_{\odot}^{Esp})^{-1}$. È evidente che per ogni ragionevole valore da attribuirsi alla massa espulsa (nel nostro problema $10 M_{\odot}$) il valore di Ξ rimane al disotto del limite inferiore di Jones.

Naturalmente in questo ragionamento sono state fatte notevoli semplificazioni: abbiamo ad esempio trascurato la distribuzione di materia con andamento $\propto r^{-2}$ nei 6 parsec prima della distribuzione costante del bubble. D'altra parte la densità in quella zona è ancora più bassa che nella zona calda e cosìpossiamo supporre che gli effetti di tale zona non siano drammatici: in ogni caso, se oltre alla **massa raccolta** anche il **profilo di densità** del materiale attraversato ha una sua importanza, possiamo essere certi che con il bubble certo non interagirà con un profilo di densità come quello di una soluzione di Sedov.

3.2.3.La soluzione di Chevalier

Il ragionamento precedentemente svolto mostra che l'approssimazione data dalla soluzione di Sedov non è accettabile, sia per lo studio analitico dell'esplosione di una supernova nelle prime fasi della sua evoluzione che per lo studio dell'interazione di una SNII con un bubble circostante.

Chevalier (1982) ha dato una soluzione autosimile che tiene conto anche della distribuzione di densità del materiale espulso e che vale quindi per tempi

molto più prossimi all'esplosione di quella di Sedov, proprio per il fatto di non dover suppore l'esplosione puntiforme.

Il profilo di densità dell'ejecta studiato da Chevalier consiste in un materiale distribuito secondo l'equazione (3.2.7)

$$\rho \propto t^{n-3} r^{-n}, \tag{3.2.7}$$

che si espande in un profilo esterno di densità dato dalla (3.2.1), tutto questo in modo adiabatico.

L'interazione origina due onde d'urto che si propagano in direzione opposta rispetto ad una superficie, supposta in quiete, individuata da R_c, (vedi figura 3.2) in cui il materiale della SN ed il materiale circumstellare si trovano a contatto, supposta in quiete.

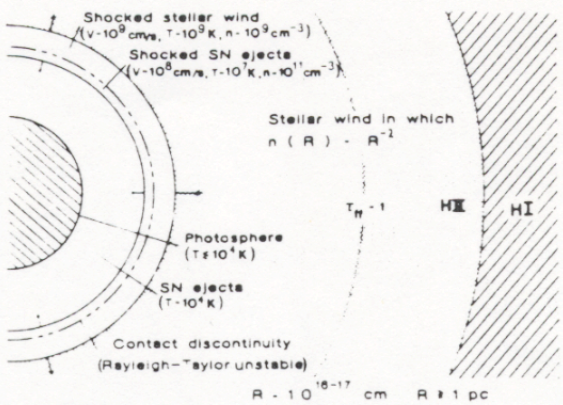


fig. 3.2-Prime fasi di SNII

Chevalier trova che è possibile dare una soluzione autosimilare per la zona compresa fra l'onda d'urto sinistra ed il raggio del contatto. Una soluzione autosimilare per la parte destra era già stata data da Parker (1963).

Intanto, per quanto riguarda il contatto, da considerazioni dimensionali si trova:

$$R_c = \alpha t^{(n-3)/(n-s)}. \tag{3.2.8}$$

Si hanno due limitazioni sugli esponenti: intanto $\mathbf{s \leq 3}$, (altrimenti si avrebbe un'*accelerazione* del materiale al passare del tempo) ed anche $\mathbf{n > 5}$ (per n=5 si ritrova la soluzione di Sedov).

In figura 3.3 sono riportati gli andamenti delle grandezze fisiche per la soluzione di Chevalier nel caso $s = 0$ ($n = 7$; $n = 12$), mentre in figura 3.4 sono riportati i valori relativi ai grafici precedenti (si noti come al contatto la densità tenda a zero).

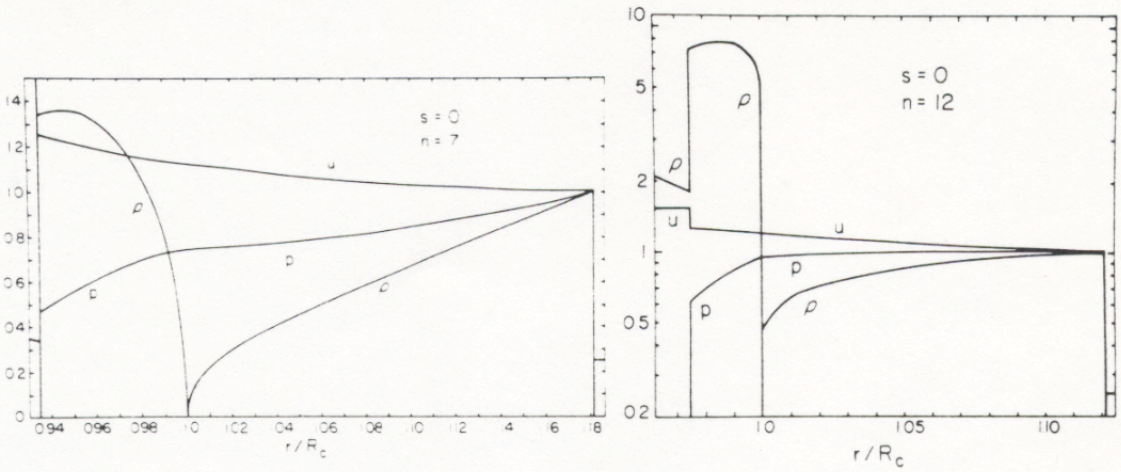


fig.3.3-Soluzione di Chevalier, $s = 0$

SELF-SIMILAR SOLUTION FOR $s = 0$, $n = 7$

r/R_c	ρ/ρ_1	p/p_1	u/u_1
0.935	1.336	0.471	1.253
0.94	1.335	0.504	1.237
0.95	1.357	0.564	1.211
0.96	1.315	0.615	1.189
0.97	1.225	0.660	1.171
0.98	1.075	0.697	1.155
0.99	0.826	0.727	1.141
0.995	0.621	0.738	1.135
1.00	0.00	0.744	1.129
1.01	0.219	0.748	1.117
1.02	0.297	0.755	1.105
1.04	0.411	0.774	1.084
1.06	0.503	0.796	1.065
1.08	0.586	0.821	1.049
1.10	0.667	0.849	1.035
1.12	0.746	0.880	1.023
1.14	0.826	0.915	1.013
1.16	0.909	0.954	1.006
1.18	0.995	0.997	1.000
1.181	1.000	1.000	1.000

SELF-SIMILAR SOLUTION FOR $s = 0$, $n = 12$

r/R_c	ρ/ρ_1	p/p_1	u/u_1
0.974	7.18	0.602	1.255
0.980	7.61	0.701	1.235
0.985	7.77	0.777	1.222
0.990	7.71	0.844	1.210
0.995	7.24	0.904	1.199
0.9975	6.63	0.930	1.194
1.00	0.00	0.951	1.189
1.005	0.583	0.954	1.180
1.01	0.651	0.958	1.170
1.02	0.729	0.966	1.152
1.03	0.781	0.974	1.135
1.04	0.821	0.980	1.119
1.05	0.855	0.986	1.103
1.06	0.883	0.991	1.087
1.07	0.908	0.995	1.072
1.08	0.930	0.998	1.057
1.09	0.950	1.000	1.043
1.10	0.968	1.001	1.029
1.11	0.984	1.001	1.015
1.121	1.000	1.000	1.000

fig.3.4

In figura 3.5 sono riportati gli andamenti delle grandezze fisiche per la soluzione di Chevalier nel caso $s = 2$ ($n = 7$; $n = 12$), mentre in figura 3.6 sono riportati i valori relativi ai grafici precedenti (si noti come al contatto la densità tenda ad infinito).

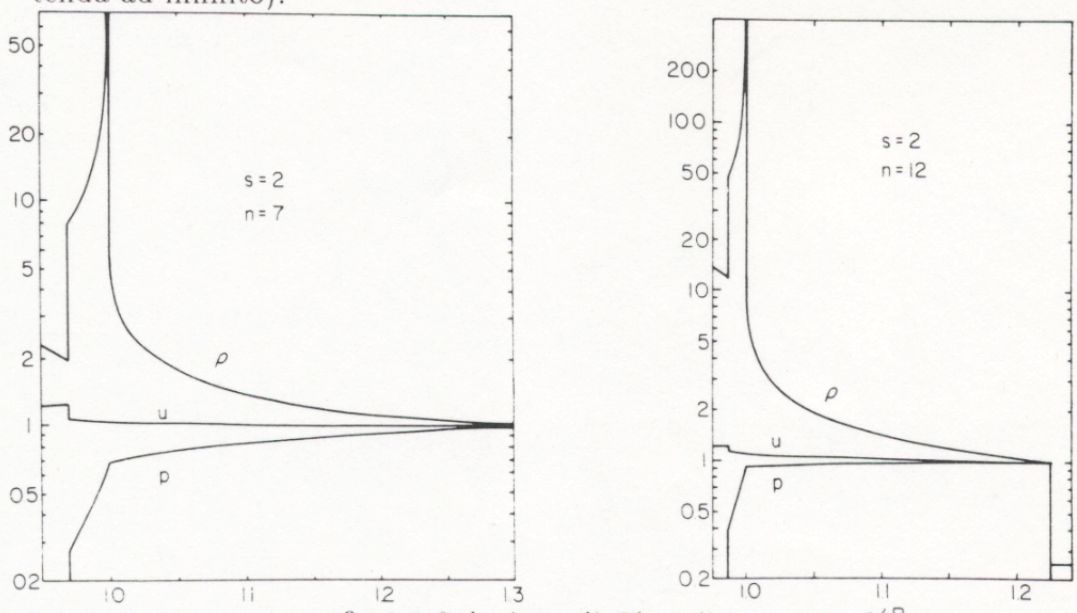


fig.3.5-Soluzione di Chevalier, $s = 2$

SELF-SIMILAR SOLUTION FOR $s = 2$, $n = 7$

r/R_c	ρ/ρ_1	p/p_1	u/u_1
0.970	7.83	0.273	1.058
0.975	9.00	0.319	1.050
0.980	10.4	0.366	1.043
0.985	12.2	0.416	1.038
0.990	14.8	0.474	1.033
0.995	19.9	0.543	1.030
0.9975	26.1	0.588	1.028
1.00	∞	0.670	1.027
1.02	2.31	0.722	1.018
1.04	1.86	0.752	1.010
1.08	1.496	0.799	0.999
1.12	1.319	0.838	0.992
1.16	1.207	0.874	0.989
1.20	1.127	0.909	0.988
1.24	1.066	0.945	0.991
1.28	1.019	0.982	0.997
1.299	1.000	1.000	1.000

SELF-SIMILAR SOLUTION FOR $s = 2$, $n = 12$

r/R_c	ρ/ρ_1	p/p_1	u/u_1
0.987	45.8	0.367	1.104
0.990	54.8	0.437	1.099
0.992	63.5	0.494	1.096
0.994	75.3	0.557	1.094
0.996	93.8	0.629	1.091
0.998	132.	0.719	1.090
0.999	181.	0.781	1.089
1.000	∞	0.904	1.088
1.01	3.66	0.926	1.081
1.02	2.70	0.937	1.074
1.04	2.10	0.951	1.062
1.06	1.78	0.961	1.051
1.08	1.58	0.968	1.042
1.10	1.44	0.973	1.033
1.12	1.33	0.978	1.026
1.14	1.24	0.982	1.019
1.16	1.17	0.986	1.013
1.18	1.11	0.990	1.008
1.20	1.06	0.994	1.004
1.22	1.01	0.999	1.001
1.226	1.00	1.000	1.000

fig.3.6

Un problema presentato dalla soluzione di Chevalier che merita una breve discussione è quello della **conduzione**. Se infatti questa si presenta, il problema perde le caratteristiche di adiabaticità necessarie per l'esistenza di soluzioni di autosimili (per quanto riguarda le perdite energetiche dovute all'irraggiamento, come abbiamo già detto, non ci sono problemi, essendo valido in modo ancora più forte quanto spiegato per l'adiabaticità della soluzione di Sedov).

Come hanno mostrato Bedogni e D'Ercole (1988) è presumibile che la conduzione non intervenga. Anche nel nostro modello è stata perciò trascurata.

Facciamo anche notare come nel caso di un SNR il problema dell'esistenza di un'onda d'urto si ponga in modo ancora più drammatico che nel caso del bubble, poichè , dall'equazione (2.5.1) (vedi **2-IL BUBBLE**) e considerando le

temperature raggiunte nel gas attraversato dallo shock, si avrebbero dei cammini liberi medi dell'ordine o più grandi dell'SNR stesso. Come abbiamo già detto a proposito del bubble, la risposta a questo problema si trova nella possibile esistenza di onde d'urto non collisionali dovute a processi collettivi nel plasma.

§ 3.3.Il nostro programma

Il codice numerico che simula l'esplosione della supernova nel profilo di densità $\propto r^{-2}$ ha come condizioni iniziali il rilascio di $E = 10^{51}\,erg$ in energia cinetica dell'ejecta. L'ejecta ha la distribuzione rappresentata in figura 3.7.

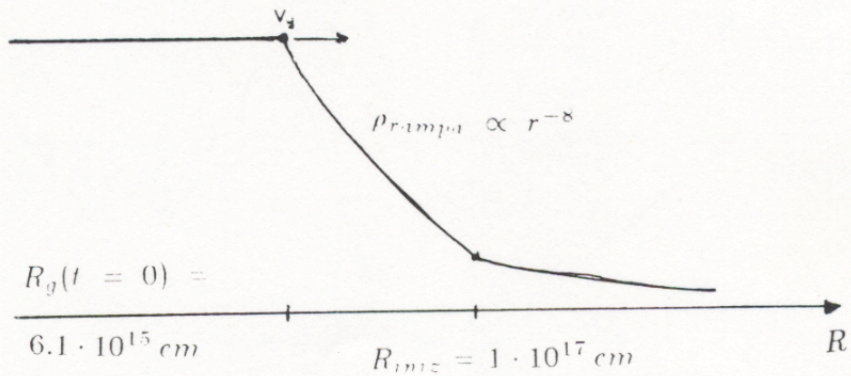


fig.3.7-Il profilo di ρ_{ejec}

Come si vede, la distribuzione è divisa in due parti ben distinte: una prima parte a densità uniforme, detta **piattaforma** e da una seconda parte, in cui la densità è proporzionale a r^{-n}, detta **rampa**. Le due zone sono in contatto ad R_g. Con R_{iniz} indichiamo invece il punto di contatto all'istante dell'esplosione fra la rampa ed il materiale esterno.

Le variabili fisiche nelle due strutture non sono indipendenti, ma sono legate da precise relazioni: detta M_* la massa della stella al momento dell'esplosione, M_r la massa contenuta nella rampa e $M_c \equiv M_* - M_r$, si ha:

$$M_* = M_c + M_r. \tag{3.3.1}$$

Per M_r Dickel e Jones (1985), elaborando le relazioni trovate da Chevalier (1982) danno la seguente formula:

$$M_r = \frac{3M_c}{n-3} \qquad 6 \leq n \leq 14\,. \tag{3.3.2}$$

(Nel nostro caso, avendo considerato $M_{iniz} = 20M_\odot$, $\dot{M}^w = 10^{-6}\, M_\odot\, anno^{-1}$, $t_{MS} \approx 10^7\, anni$, si ha $M_* = 10M_\odot$).

Data l'alta velocità iniziale del materiale espulso ($V_{Esp} \approx 1 \div 1.5 \cdot 10^4\, km\, s^{-1}$), la struttura rampa + piattaforma è evidentemente in espansione libera.

Per quanto riguarda la velocità del *gradino* (g) si ha:

$$v_g = \sqrt{\frac{10(n-5)E}{3(n-3)M_*}} = \sqrt{\frac{10(n-5)E}{3nM_c}}, \tag{3.3.3}$$

dove E è l'energia liberata nell'esplosione.

Si deve tener presente che il programma che simula l'evoluzione della supernova serve essenzialmente per arrivare a studiare l'interazione fra essa ed il bubble precedentemente calcolato. Il nostro programma consiste così in realtà

in due programmi, il primo dei quali (di cui stiamo qui parlando) considera l'esplosione della SN dentro un mezzo che ha un andamento del tipo $\propto r^{-2}$, e "evolve" la soluzione fino all'onda d'urto interna del bubble R_1, (vedi **2-IL BUBBLE**).

Da questo punto in poi il calcolo prosegue col secondo programma (il terzo di tutto il lavoro) che finalmente studia l'interazione.

Per quanto riguarda lo spessore della zona contenuta fra le due onde d'urto (che poi è la zona *interessante* per l'interazione col bubble) si noti che, posto

$$\frac{\Delta_{1,2}^{SN}}{R_2^{SN}} \equiv \frac{R_2^{SN} - R_1^{SN}}{R_2^{SN}}, \tag{3.3.4}$$

si ha

$$0.279_{(n=6)} \leq \frac{\Delta_{1,2}^{SNI}}{R_2^{SNI}} \leq 0.123_{(n=14)}, \tag{3.3.5}$$

$$0.304_{(n=6)} \leq \frac{\Delta_{1,2}^{SNII}}{R_2^{SNII}} \leq 0.187_{(n=14)}. \tag{3.3.6}$$

Dunque, come è logico attendersi, a parità di pendenza della rampa ed a parità di raggio, la zona di interazione delle SNII è più larga della corrispettiva delle SNI, in quanto il decremento di densità permette una maggiore espansione. Naturalmente lo stesso fenomeno, fissato un andamento per la densità esterna, si verifica al variare di n: ad n più elevati (ossia, per rampe più *ripide*), si hanno zone di interazione più strette.

In figura 3.8 sono riportati i valori (normalizzati ad R_c) dei raggi dei due shock, in funzione di s e di n.

PROPERTIES OF THE SELF-SIMILAR SOLUTIONS

s	n	R_1/R_c	R_2/R_c	A	ρ_2/ρ_1	p_2/p_1	u_2/u_1	M_2/M_1
0	6	1.256	0.906	2.4	0.75	0.39	1.203	0.28
0	7	1.181	0.935	1.2	1.3	0.47	1.253	0.50
0	8	1.154	0.950	0.71	2.1	0.52	1.263	0.71
0	9	1.140	0.960	0.47	3.1	0.55	1.263	0.93
0	10	1.131	0.966	0.33	4.3	0.57	1.260	1.1
0	12	1.121	0.974	0.19	7.2	0.60	1.255	1.6
0	14	1.116	0.979	0.12	11	0.62	1.250	2.0
2	6	1.377	0.958	0.62	3.9	0.21	1.006	0.44
2	7	1.299	0.970	0.27	7.8	0.27	1.058	0.82
2	8	1.267	0.976	0.15	13	0.31	1.079	1.2
2	9	1.250	0.981	0.096	19	0.33	1.090	1.6
2	10	1.239	0.984	0.067	27	0.35	1.096	1.9
2	12	1.226	0.987	0.038	46	0.37	1.104	2.7
2	14	1.218	0.990	0.025	70	0.38	1.108	3.4

fig.3.8-I raggi delle onde d'urto normalizzati a R_c

Nel nostro modello abbiamo considerato $n = 8$ ed $s = 2$. Chevalier (1982) per questi valori dei parametri ottiene:

$$\frac{\Delta_{1,2}^{SNII}}{R_2^{SNII}} = 0.230_{(n=8)}. \tag{3.3.7}$$

Prendiamo adesso in considerazione il momento dell'interazione: in quel momento è evidentemente $R_2^{SNII} = R_1^{bub}$. Possiamo così stimare la larghezza della zona fra le due onde d'urto della SN al momento dell'interazione. Ponendo $R_1^{bub} = 6\,pc$ si ottiene

$$\Delta_{1,2}^{SNII} \approx 1.4\,pc. \tag{3.3.8}$$

Noi abbiamo calcolato la SN con 220 punti di griglia (vedi **7-APPENDICE B**), e questo significa che la risoluzione del nostro problema è dell'ordine di $\approx 6.3 \cdot 10^{-3}\,pc\,griglia^{-1}$ al momento dell'interazione. ~~Ora, è evidente che il bubble~~

Ora, è evidente che il bubble si estende su dimensioni molto maggiori ($\approx 40\,pc$) e quindi sono necessarie molte piú griglie per raggiungere una risoluzione paragonabile a quella della SN e non perdere così preziosa informazione. Noi abbiamo usato per il calcolo del bubble una griglia da 800 punti, che equivalgono ad una risoluzione di circa $45.5 \cdot 10^{-3}\,pc\,griglia^{-1}$. Approssimativamente allora abbiamo che al momento dell'interazione una griglia del bubble è più grande di un fattore 7 della griglia della supernova.

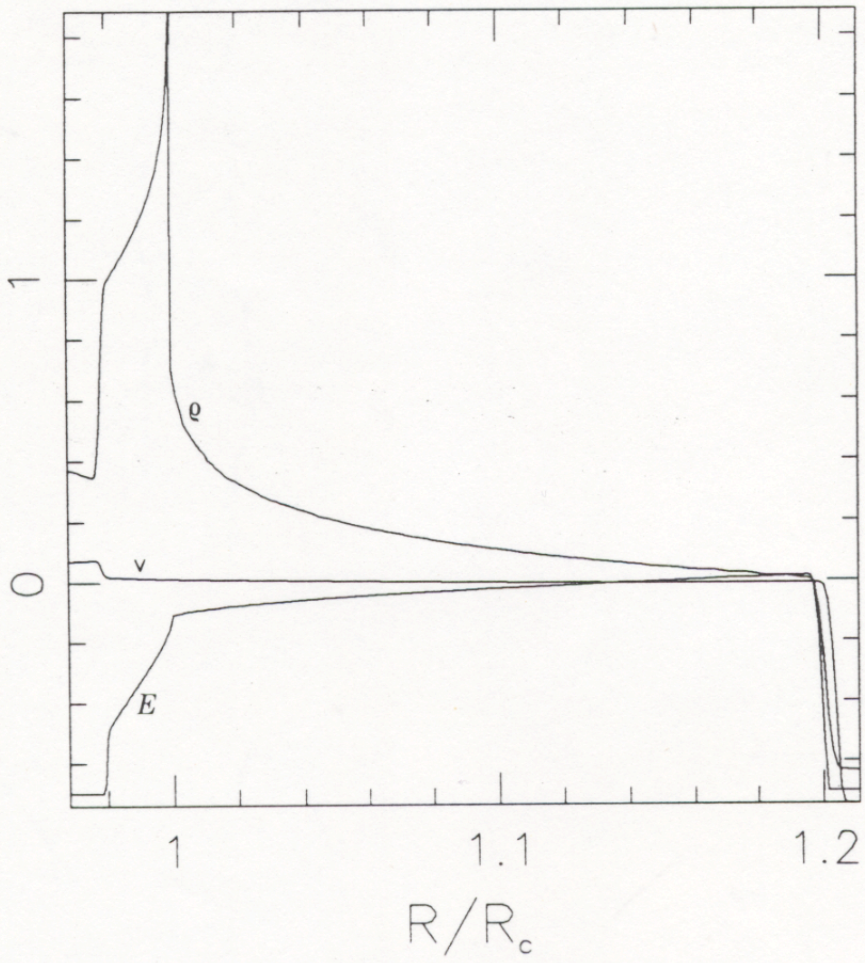


fig.3.9-Soluzione di Chevalier ($t \sim 450 anni$)

In figura è mostrato il risultato del calcolo numerico da noi svolto per simulare la collisione fra l'ejecta della SN ($\rho_{ej} \propto r^{-8}$), e il materiale circumstellare ($\rho_{circ} \propto r^{-2}$). Si è ottenuta la soluzione di Chevalier con $n = 8$ ed $s = 2$. Le varie grandezze fisiche sono normalizzate ai seguenti valori: densità ($1.9 \cdot 10^{-28}\, g\, cm^{-3}$), velocità ($1.1 \cdot 10^{9}\, cm\, s^{-1}$), energia interna ($6.5 \cdot 10^{-11}\, g\, cm^{-3}$).

La struttura è rappresentata ad un'età di ~ 450 anni. $R_c \sim 6.5\, pc$.

4-I RISULTATI

In questo capitolo sono mostrati e discussi i risultati del lavoro svolto, cercando contemporaneamente di dare un'interpretazione morfologica ed evolutiva delle strutture che si sono rivelate più importanti.

In ogni caso, alcuni punti di maggior interesse, qui non sufficientemente approfonditi, potranno essere studiati in lavori successivi.

§ 4.1.Le fasi evolutive

La caratteristica più evidente che abbiamo ottenuto è che l'evoluzione di un SNR che interagisce con un bubble preesistente può essere divisa in tre fasi principali:

1) Una prima fase, molto complessa, della durata di $\approx$ 800 anni, durante la quale si assiste allo sviluppo ed alla frammentazione di un elevato numero di onde d'urto nella zona d'interazione. D'ora in poi ci riferiremo a questo periodo parlando di **fase I**.

2) Una seconda fase, della durata di $\approx$ 14700 anni, in cui la distribuzione del materiale (e delle altre grandezze fisiche) nella zona di interazione tende a rilassarsi su strutture autosimilari. Tale fase sarà detta **fase A**.

3 Una terza ed ultima fase, di quasi stazionarietà, che sarà detta **fase S**, durante la quale si assiste all'urto tra l'SNR e il materiale ad alta densità che si trova ad R_c^{Bub}. La nostra integrazione si è fermata in questa fase, ad un tempo equivalente di $\sim$ 101000 anni.

§ 4.2.La fase I

Questa fase inizia dopo circa 500 anni dall'esplosione della SN, tempo nec-

effetti, osservando la figura 4.5 si nota che al contatto la densità tende a zero, comportamento questo caratteristico delle soluzioni di Chevalier per $s = 0$ (vedi **3-LA SUPERNOVA**).

In realtà assumere che la densità nelle regioni centrali del bubble sia costante è un'approssimazione molto grossolana. Interpolando i risultati numerici da noi ottenuti abbiamo trovato che una buona descrizione della densità del bubble è data da

$$\rho_{Bub} \propto r^{1.23}. \tag{4.3.1}$$

Siamo così portati a pensare che la struttura che si viene sviluppando, più che ad una soluzione di Chevalier per $s = 0$, tenda ad una soluzione con $s \sim -1.2$. Purtroppo in letteratura non è riportato l'andamento di una simile soluzione, per cui il confronto non può essere fatto.

Un' osservazione deve essere fatta a proposito dell'andamento della velocità. Come abbiamo già più volte accennato, il profilo di questa grandezza è continuo, essendo tutta la zona di interazione interessata soltanto da discontinuità di contatto. Abbiamo costruito una grandezza (che chiameremo semplicemente *gradiente* di velocità) definita come il rapporto tra la differenza delle velocità del materiale, rispettivamente a R_{1pert} ed a R_{2pert}, e lo spessore della zona perturbata, ΔR_{pert}. Un fatto degno di nota è il continuo aumento di questa grandezza al passare del tempo.

Si è trovata una formula significativa per interpolazione mediante minimi quadrati dei risultati numerici da noi ottenuti, che descrive molto bene (coefficiente di correlazione =0.97) l'andamento del gradiente per tempi compresi fra t=1300 e t=6000 anni:

$$\Delta v(km\, s^{-1}\, pc^{-1}) = -2.44 \cdot 10^{8} (t/anno)^{-1.71} \tag{4.3.2}$$

Possiamo utilmente applicare questa formula per determinare le modalità di transizione dalla soluzione di Chevalier per $s = 2$ a quella con $s = -1.2$. Sappiamo infatti che le soluzioni di Chevalier ammettono una legge di propagazione del contatto con andamento

$$R_c = \alpha t^{n-3/n-s}, \tag{4.3.3}$$

dove $\rho \propto r^{-s}$ ed n è l'esponente della distribuzione di densità della rampa (vedi **3-LA SUPERNOVA**).

Per le soluzioni di Chevalier allora il rapporto sopra definito vale esattamente

$$\Delta v_{Ch} = -\frac{3}{4}\left(\frac{n-3}{n-s}\right) t^{-1}, \tag{4.3.4}$$

dove il fattore 3/4 * deriva dal fatto che la velocità di un'onda d'urto forte è i 4/3 della velocità del fluido.

Proponiamo adesso un ragionamento un poco più generale di quello che sarà effettivamente qui usato, avvertendo però che è necessaria un'ipotesi che allo stato attuale non è dimostrata (risultati di una precisione migliore potranno essere ottenuti con un lavoro successivo). Supponiamo che del materiale, distribuito secondo la soluzione di Chevalier con $s = s_1$, interagisca con una qualche struttura, descritta da un profilo di densità $\propto r^{-s_2}$.

Non facciamo ipotesi sul modo con cui si passa dalla distribuzione di densità $\propto r^{-s_1}$ a quella $\propto r^{-s_2}$, se non che la transizione si svolga su una distanza trascurabile rispetto alle dimensioni dell'intera struttura.

---

* In realtà la formula contiene anche un termine additivo, $V_{ejec}/(R_{2pert} - R1pert)$, che però è trascurabile, almeno per tempi non molto lunghi, rispetto al primo addendo.

Naturalmente la soluzione iniziale, dopo l'interazione con la zona di transizione, sarà alterata, e questa struttura modificata si propagherà successivamente nella la distribuzione con 's_2'.

Possiamo aspettarci che dopo qualche tempo la nuova soluzione tenda nuovamente alla soluzione di Chevalier per s_2 ? Nel caso del bubble, come abbiamo già detto, numericamente si trova una risposta affermativa.

L'equazione (4.3.2) può essere usata per dare una stima del tempo necessario per il rilassamento. Disegniamo in un grafico l'andamento dei **moduli** dei gradienti di velocità in funzione del tempo. È chiaro che prima dell'interazione e dopo il rilassamento la funzione avrà l'andamento espresso nell'equazione (4.3.4).

Nella zona fra le due soluzioni si trova un andamento del gradiente proporzionale a $t^{-1.71}$ (facciamo questa ipotesi arbitrariamente, non conoscendo allo stato attuale in che misura n, s_1 ed s_2 entrano nella determinazione dell'esponente -1.71, da noi ricavato in modo empirico). Trascuriamo completamente quanto avviene nella fase di transizione (nel caso da noi studiato abbiamo visto che è effettivamente così, in quanto la soluzione inizia a rilassarsi su una soluzione con $s \sim 0$).

Cerchiamo quindi il tempo necessario $(t_2 - t_1)$ perchè la soluzione con s_1 si rilassi su quella con s_2.

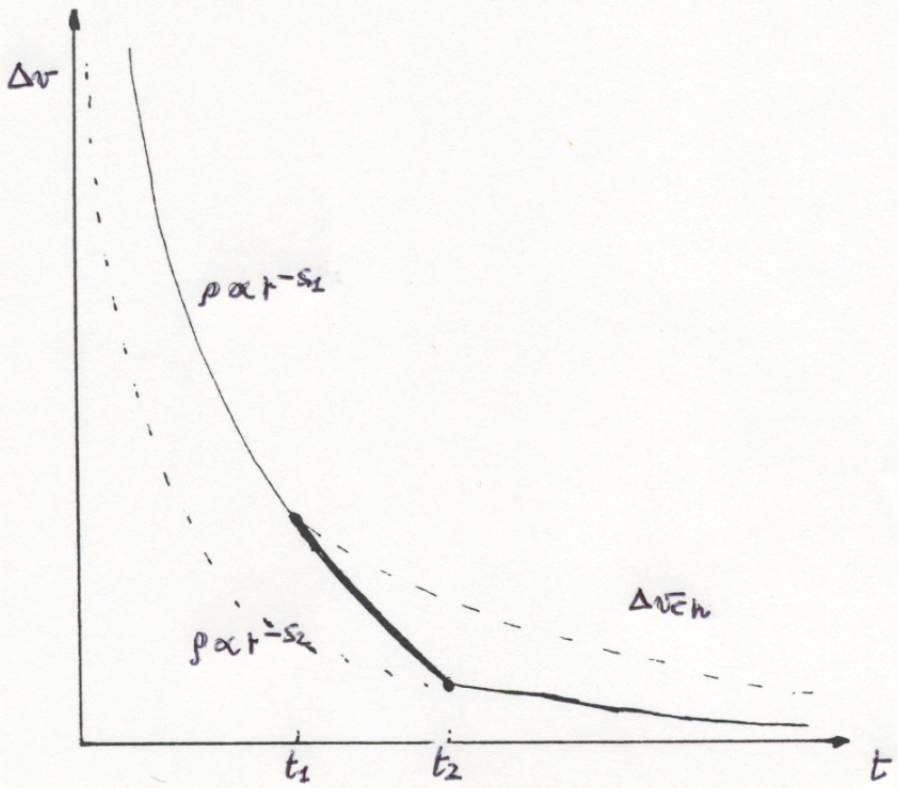


fig.4.1 I gradienti di velocità

Osservando la figura 4.1, con alcuni passaggi algebrici si ottiene facilmente la seguente espressione che mette in relazione il tempo al quale si dovrebbe raggiungere il rilassamento t_2 con il tempo di ingresso nella fase A_{Ch}:

$$t_2 = t_1 \left(\frac{n - s_2}{n - s_1} \right)^{1.41} . \tag{4.3.5}$$

Considerando che $\rho_{Bub} \propto r^{1.23}$, si trova

$$t_2 = 1.84 t_1, \tag{4.3.6}$$

in buon accordo con quanto riportato da Chevalier (1988).

Con i parametri del nostro problema troviamo un tempo dell'ordine di $\sim$ 2500 dopo l'esplosione, tempo per il quale la soluzione si dovrebbe essere rilassata su quella di Chevalier con $s = -1$.

Questa prima parte della fase A termina quando la rampa dell'ejecta (che si muove in espansione libera) raggiunge R_{1pert}.

Si può dare una stima del tempo impiegato perchè questo accada ricordando che la struttura [**piattaforma + rampa**] è in espansione libera, e che la velocità del *ginocchio* è data dall'equazione (3.3.3). Sostituendo i parametri del nostro problema troviamo una velocità dell'ordine di $\sim 3180\, km\, s^{-1}$. All'istante dell'esplosione noi poniamo (vedi figura 3.7) $R_{iniz} = 10^{17}\, cm$. In base alle formule date (vedi **3-LA SUPERNOVA**) si ottiene allora, imponendo la conservazione della massa, $R_g(t = 0) = 6.1 \cdot 10^{15}\, cm$.

Dunque il tempo necessario alla piattaforma per raggiungere la zona perturbata si ottiene semplicemente risolvendo l'equazione seguente:

$$R_g(t_0) + 3.18 \cdot 10^8 (t/sec) = R_{1pert} + < v_{1pert} > \cdot 10^8 (t/sec). \tag{4.3.7}$$

Sostituendo a $< v_{1pert} >$ il valore dato dal grafico in figura 4.4 si ottiene un tempo dell'ordine di 6000 anni, in ottimo accordo con quanto trovato numericamente.

Le temperature anche in questa fase sono cosìelevate ($T \geq 10^8\ K$) che tutto il processo è certamente adiabatico.

Lo spessore della zona perturbata (che è formata soltanto da *contatti*) va da 1.63 parsec all'inizio della fase A_{Ch} a circa 4 parsec nella fase finale.

4.3.2.La fase A_{Se}

Questa fase inizia $\sim$ 6000 anni dopo l'esplosione della SN e ha una durata di $\sim$ 10000, determinata dall'urto fra il materiale a R_{2pert} e quello ad alta densità situato a R_c^{Bub}.

Come abbiamo già avuto modo di dire (vedi **3-LA SUPERNOVA**) il bubble non contiene una quantità di materia sufficiente per far rilassare la soluzione su quella di Sedov, quindi in questa fase non dovremo aspettarci niente di più di una *tendenza*, anche se ben marcata, verso quella soluzione (vedi figura 4.6 e, per confronto, figura 3.1).

È da osservare a questo proposito il fatto che il gradiente delle velocità assume valori sempre maggiori.

Anche il profilo della temperatura viene notevolmente modificato, pur restando in media molto alto ($T \sim 10^7\ K$). Anche in questa fase si possono escludere grandi perdite energetiche, per cui la struttura è ancora essenzialmente adiabatica.

§ 4.4.La fase S

Questa è la fase in cui si assiste all'urto fra l'SNR e la zona esterna del bubble ($n_{\rm H} \geq 1\,cm^{-3}$), che avviene $\approx$ 16000 anni dopo l'esplosione della SN (vedi figura 4.7).

Una prima caratteristica di questa fase è il fatto che un'onda d'urto riflessa si muove verso il centro della struttura, che viene raggiunto prima che siano trascorsi 40000 anni dallo scoppio.

Due sono gli effetti dovuti all'urto: uno è un improvviso aumento di densità ($n_{\rm H} \sim 10\,cm^{-3}$) immediatamente dietro l'onda d'urto esterna (tale aumento di densità genera una *shell* di materia sottile e fredda) e una diminuzione della temperatura fino ad un valore ($T \sim 10^4$), per cui le perdite radiative non sono più trascurabili: dalla regione esterna si osserverà quindi un'emissione di energia.

L'altro effetto significativo è lo *stallo* della zona esterna dell'SNR, con un conseguente innesco di onde d'urto che viaggiano verso il centro e ne vengono riflesse verso l'esterno. In ogni caso si tratta di fenomeni che non alterano eccessivamente la struttura, e che si vanno smorzando al passare del tempo (vedi figura 4.7). Il fenomeno dello *stallo* è di facile comprensione qualora si consideri il fatto che il rapporto fra le densità del materiale che si trova a destra ed ad sinistra di R_c^{Bub} ha un valore prossimo a 100. Poichè la velocità di un'onda d'urto è inversamente proporzionale alla radice quadrata dela densità del mezzo in cui essa si muove, si ha una diminuzione di un fattore 10 nel passare dall'interno all'esterno del bubble.

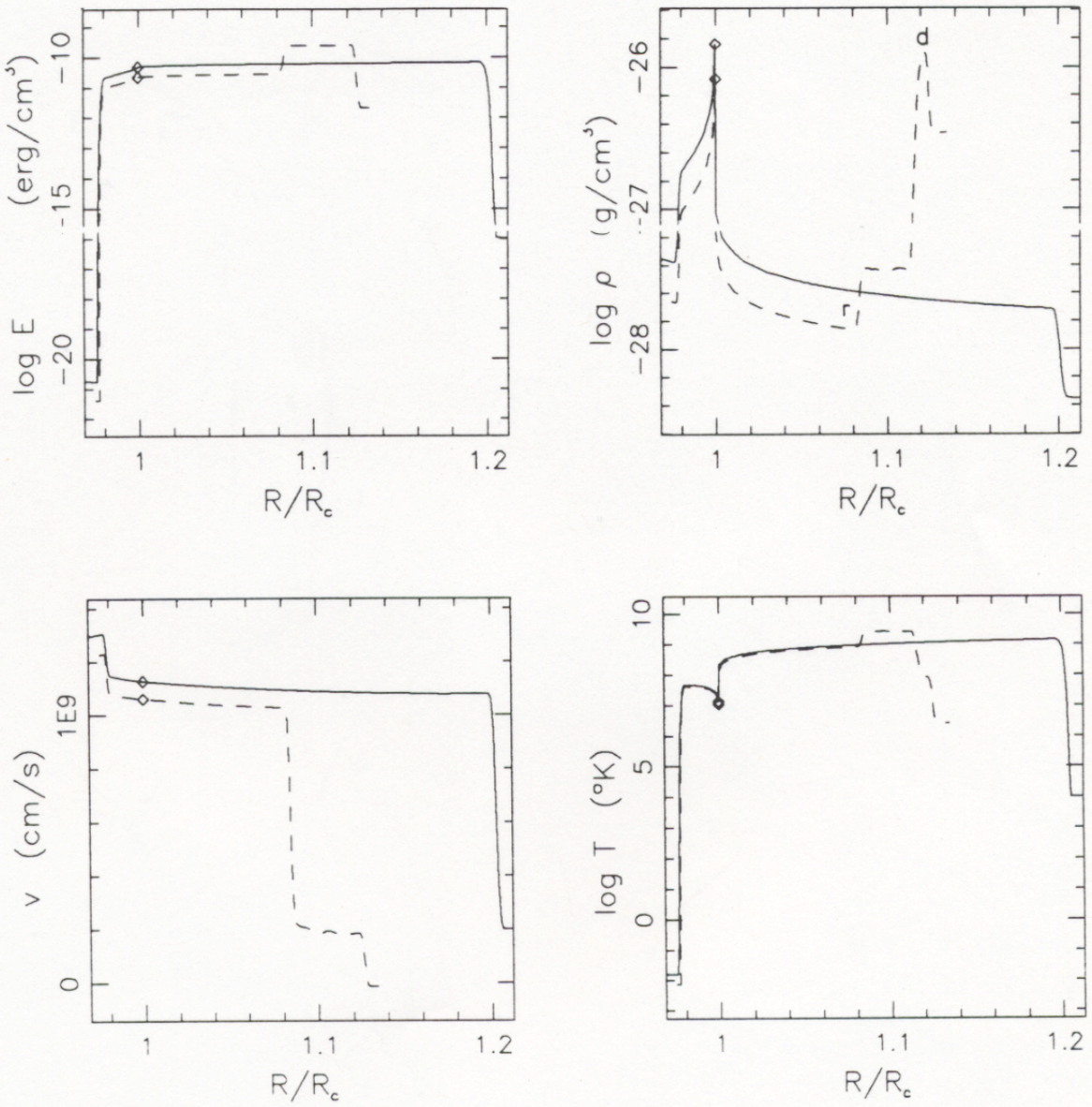


fig.4.2-Fase I

Curve continue: t=465 anni; $R_c = 6.53\,pc$

Curve tratteggiate: t=680 anni; $R_c = 9\,pc$

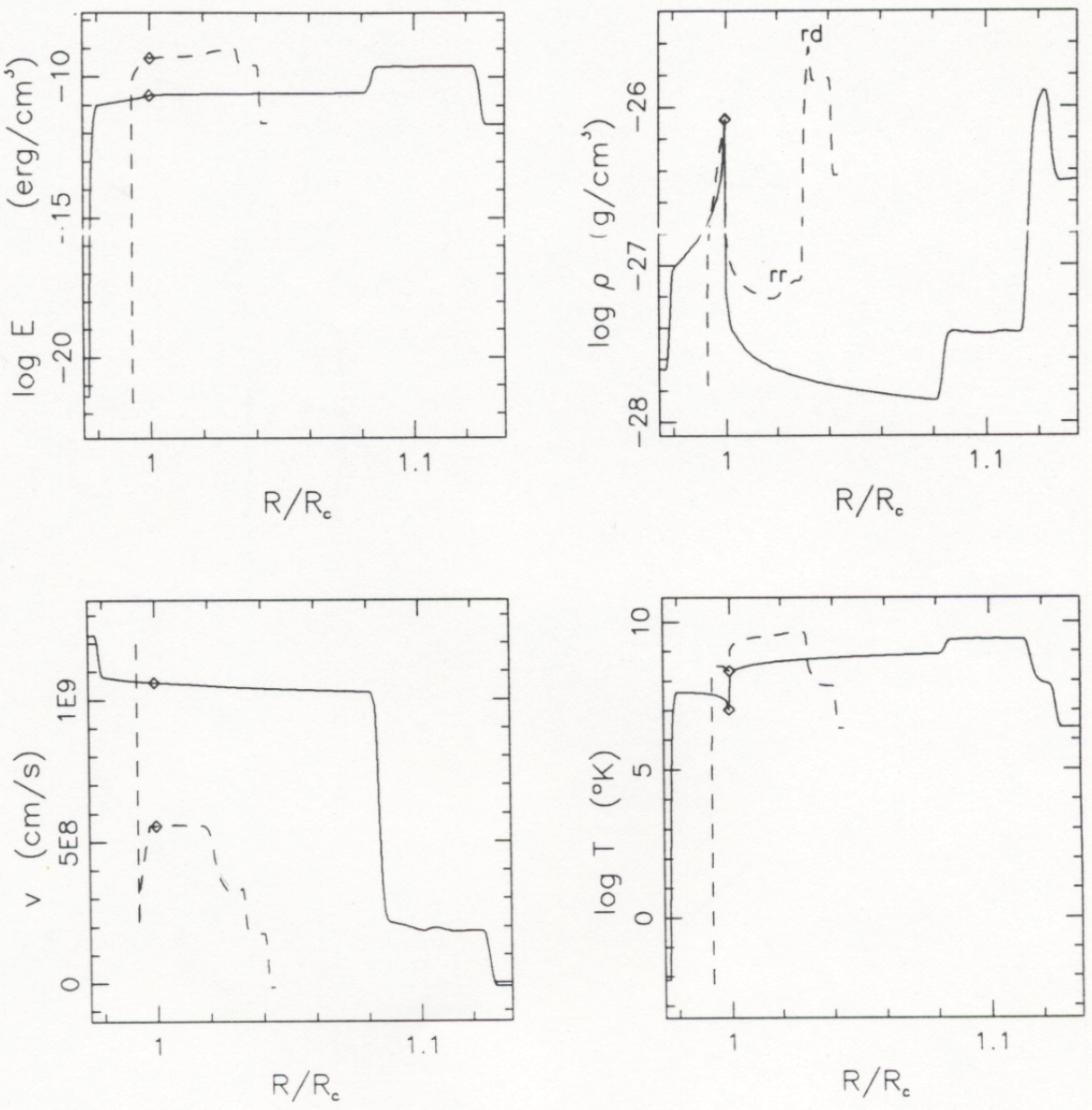


fig.4.3-Fase I

Curve continue: t=680 anni: $R_c = 9\,pc$

Curve tratteggiate: t=786 anni: $R_c = 10\,pc$

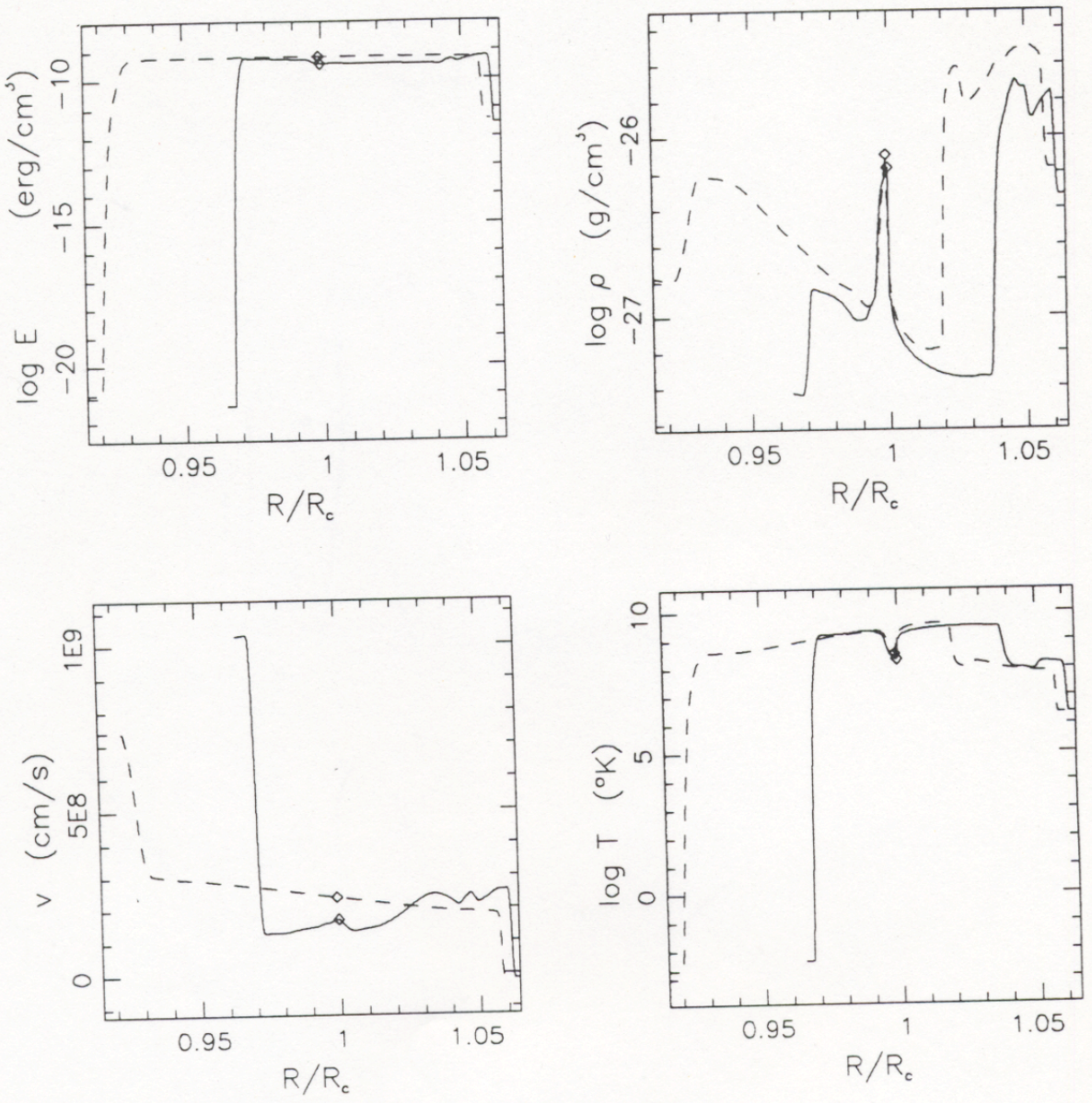


fig.4.4-Fase I

Curve continue: t=910 anni: $R_c = 10.2\,pc$

Curve tratteggiate: t=1334 anni; $R_c = 11.3\,pc$

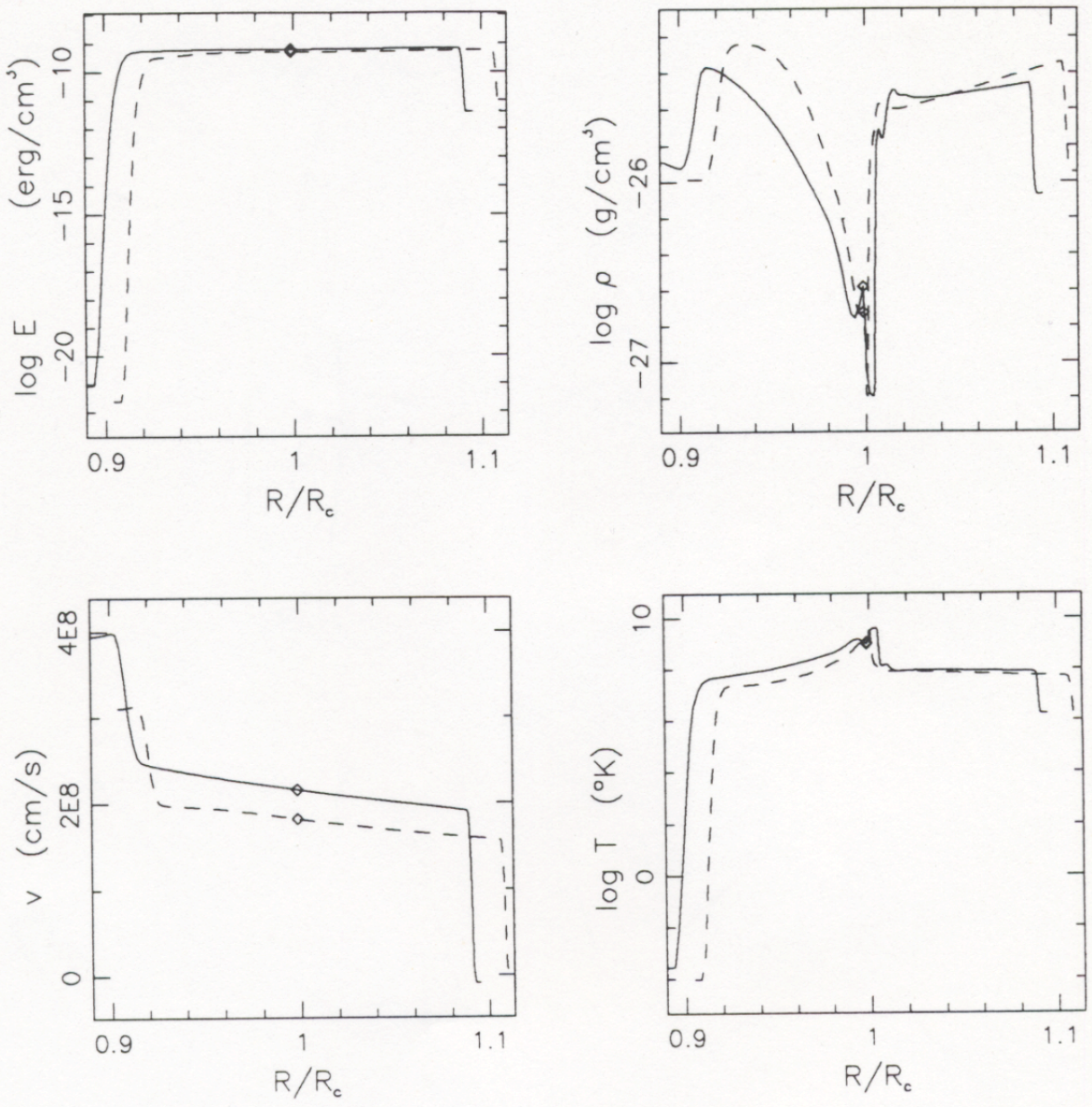


fig.4.5-Fase A_{Ch}

Curve continue: t=3605 anni; $R_c = 16.8\,pc$

Curve tratteggiate: t=6073 anni; $R_c = 22\,pc$

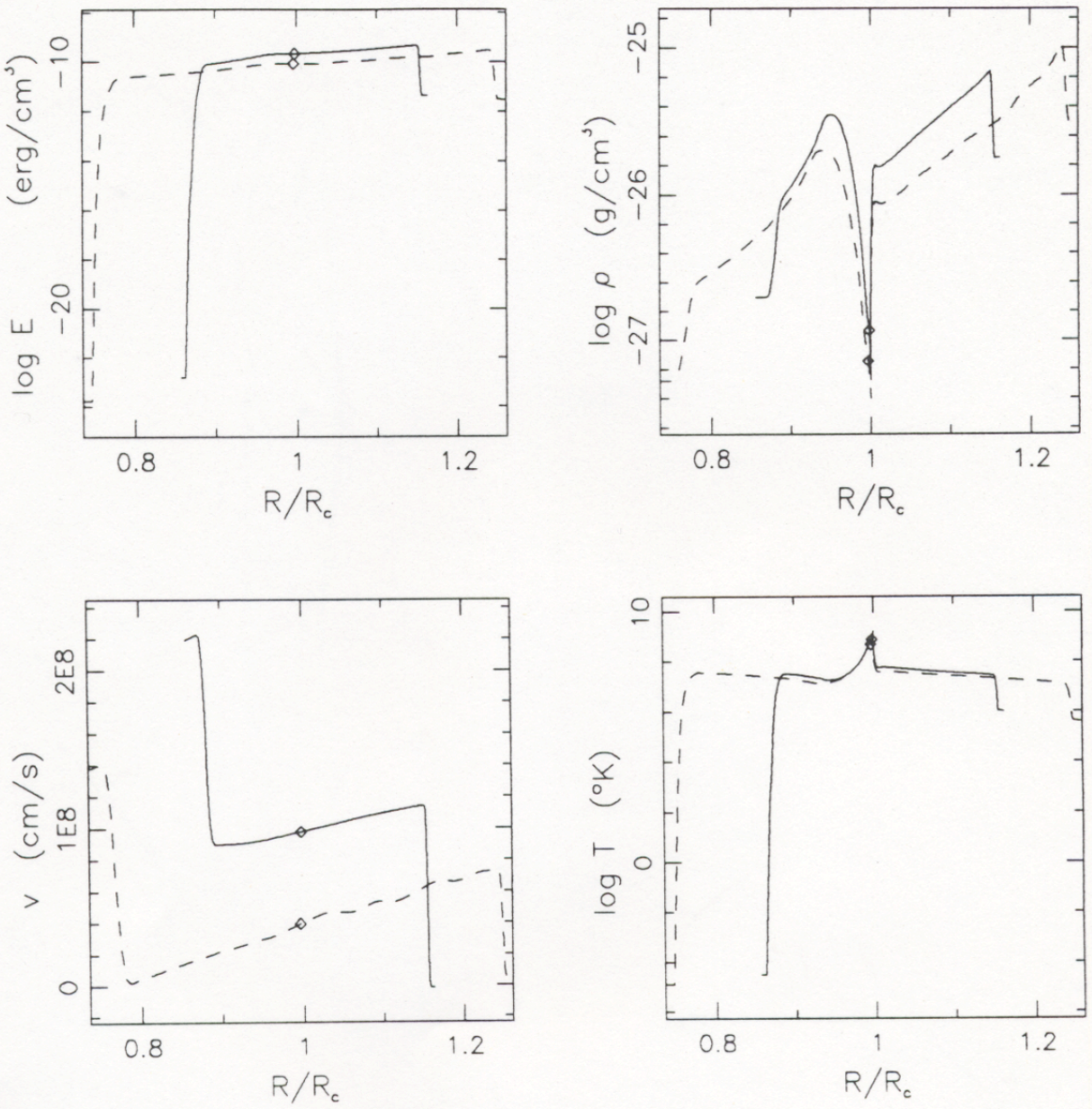


fig.4.6-Fase A_{Se}

Curve continue: t=10507 anni: $R_c = 28.4\,pc$

Curve tratteggiate: t=16409 anni: $R_c = 31.3\,pc$

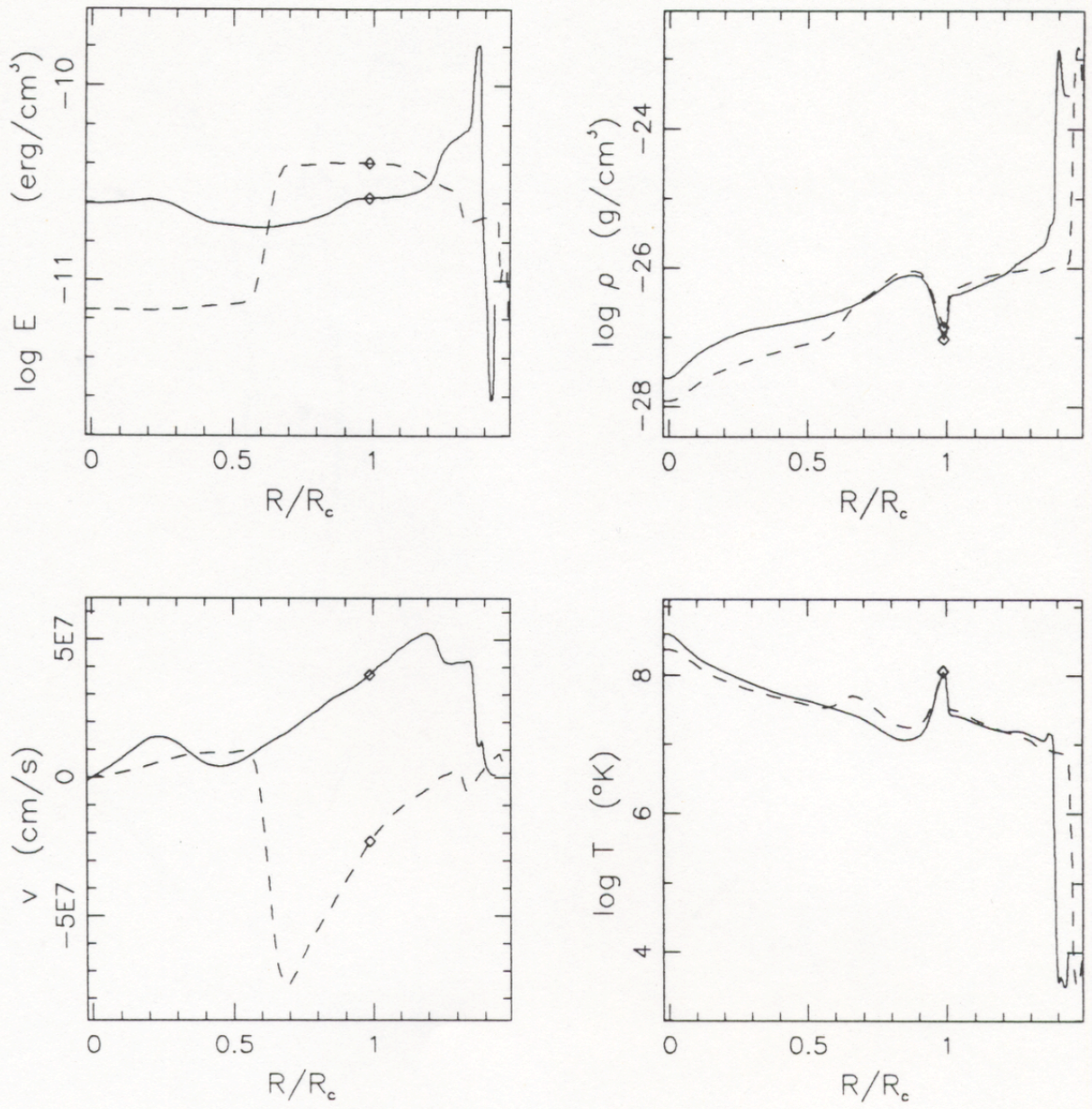


fig.4.7-Fase S

Curve continue: t=76586 anni; R_c = 33.6 pc

Curve tratteggiate: t=101206 anni; R_c = 33 pc

§ 4.5.Una visione d'insieme

Finiamo questo capitolo dando una tabella riassuntiva delle varie fasi con i vari tempi di durata.

1) $t = 0$: esplode la supernova e l'ejecta, distribuito in una struttura rappresentata da una piattaforma che contiene i 5/8 della massa stellare e da una rampa ($\rho_{rampa} \propto r^{-8}$) che ne contiene i rimanenti 3/8, interagisce con il profilo di densità generato dal vento ($\rho_{circ} \propto r^{-2}$) in espansione libera fino ad $R_1^{Bub} \sim 9\,pc$. Tale interazione produce una distribuzione di materia descritta da una soluzione autosimile di Chevalier ($n = 8$, $s = 2$).

2) $t \sim 500$ **anni dall'esplosione**: il profilo di densità precedentemente descritto interagisce con il bubble ad R_1^{Bub}. Si sviluppa una situazione in cui onde d'urto nascono ed interagiscono, riducendosi in ampiezza ed aumentando in numero. La temperatura è tanto alta ($T \geq 10^8\,K$) che tutta la struttura è praticamente adiabatica.

Questa fase ha una durata di ~ 800 anni.

3) $t \sim 1300$ **anni dall'esplosione**: tutta la zona perturbata è ora stabilizzata: le onde d'urto, ormai frammentate, vengono dissipate. L'alta temperatura porta la velocità del suono a valori tali che la pressione viene immediatamente ridistribuita fra le due onde d'urto rimaste. In questa fase il materiale è distribuito spazialmente con una legge che tende alla soluzione autosimile di Chevalier con $n = 8$ ed $s \sim -1.2$ ($\rho_{Bub} \propto r^{1.23}$).

È stata determinata una relazione che descrive il tempo di rilassamento del fenomeno. La massa che in questa fase è contenuta nella zona perturbata (il cui spessore è ora dell'ordine di 3 parsec) è di circa $10^{-2} M_\odot$.

Questa fase, della durata di $\sim$ 4700 anni termina nel momento in cui la struttura perturbata viene raggiunta dalla piattaforma. L'intera struttura è ancora adiabatica.

4) $t \sim$ 6000 **anni dall'esplosione**: la zona perturbata riceve da sinistra un'impulso portato dalla distribuzione costante dell'ejecta.

Si ha una tendenza della distribuzione di materia ad assumere un profilo descritto dalla soluzione autosimile di Sedov (esplosione forte, $s \sim -1.2$).

La condizione di contropressione nulla è praticamente verificata, essendo il salto di pressione fra la zona perturbata e quella esterna dell'ordine di 100.

La soluzione di Sedov non è però raggiunta, in quanto la massa che viene attraversata dall'onda d'urto ($\sim 35 M_{\odot}$) è insufficiente a raggiungere il limite minimo di Jones.

Questa fase, che termina con il raggiungimento della zona esterna del bubble da parte dell'SNR, ha una durata di $\sim$ 10000 anni.

La temperatura, pur essendo diminuita per espansione adiabatica (la zona compresa fra le due onde d'urto ha ora uno spessore di circa 16 parsec e contiene $\sim 29.6 M_{\odot}$) è ancora superiore ai $10^6\ K$.

5) $t \sim$ 16000 **anni dall'esplosione**: si ha l'urto fra l'SNR e la zona esterna del bubble ($R_{\blacksquare}^{Bub} = 40\,pc$). In questa fase, a cui si è arrestato il calcolo ($t \sim 10^5$ anni), si assiste alla formazione di onde d'urto che tornano fino al centro della struttura e che successivamente ritornano verso l'esterno, con velocità che diminuiscono al passare del tempo.

Notiamo infine che in questa fase la zona esterna dell'SNR raggiunge temperature di $\sim 10^4\ K$ ed alte densità ($n_{\rm H} \sim 7\,cm^{-3}$), per cui le perdite radiative

non sono più trascurabili.

5-DISCUSSIONE

Discutiamo adesso due fenomeni molto importanti per quanto riguarda la validità dei risultati ottenuti:

a) un'eventuale fase di RG della stella prima dell'esplosione come SN

b) l'importanza della ricombinazione del materiale costituente il bubble.

§ 5.1.Un'eventuale fase RG

Tutto il lavoro da noi svolto ha senso se la stella considerata non è esplosa (o non ha attraversato una fase di RG) durante la sua vita.

Questa è in effetti un'ipotesi molto forte, in quanto molte stelle attraversano questa fase. È stato d'altra già evidenziato (vedi **1-INTRODUZIONE**) come gli strati esterni della stella, quando questa evolve verso la regione delle RG, siano estremamente instabili - nel senso che la derivata evolutiva (vedi **1-INTRODUZIONE**) - è ~ 0.

Possiamo quindi aspettarci anche situazioni in cui la stella non attraversa la fase di RG. Questo in particolare può essere dovuto a bassi valori della metallicità o ad alte temperature (ossia grandi masse) della stella (Hillebrandt, 1987 , trova che stelle di massa compresa fra 15 e 25 $M_{\odot}$ e $Z = 0.005 \approx Z_{\odot}/4$ non attraversano la fase di RG, vedi figura 5.1).

Il modello da noi considerato non è quindi di impossibile realizzazione in natura, anche se certamente la maggioranza delle stelle che osserviamo passano attraverso la fase di RG. Dobbiamo quindi cercare di capire, in base ai risultati trovati, quali potrebbero essere le maggiori differenze che si riscontrerebbero nell'evoluzione dell'SNR se il progenitore della SN avesse attraversato anche una fase di RG, con $t_{RG} \simeq t_{MS}/10$. Per una stella di $20M_{\odot}$, come quella da

noi considerata, si avrebe allora

$$t_{MS} \sim 10^7\, anni \quad \Longrightarrow \quad t_{RG} \sim 10^6\, anni \tag{5.1.1}$$

La situazione che verrebbe a crearsi nel caso in cui vi fosse l'emissione di un vento di RG per un tempo pari a $t = t_{RG}$ non è di difficile descrizione.

Il bubble sarebbe intanto completamente formato, poichè esso raggiunge l'equilibrio in $\sim 10^6$ anni. Dunque il problema si riduce alla comprensione di cosa accade se un vento rosso ($V^w = 20\, km\, s^{-1}$) si trova a soffiare dentro un bubble stazionario precedentemente formato.

Il primo effetto è che la zona del bubble compresa fra R_1^{Bub} e R_2^{Bub} non è più sostenuta dalla pressione dinamica del vento di BG. Questo infatti, muovendosi alla velocità di $\sim 2000\, km\, s^{-1}$ non impiega più di $(9\text{x}3{\cdot}10^{18})/(2{\cdot}10^8\text{x}3.15{\cdot}10^7) \approx$ 4300 anni per andare dalla stella ad R_1^{Bubb}. Il risultato finale è che il vento *rosso* si trova in presenza di un vero e proprio "buco", in cui, espandendosi, origina una distribuzione di materia che ha un profilo $\propto r^{-2}$, analogo quindi a quello creato dal vento *blu*, ma molto più denso, sia per il valore più elevato di $\dot{M}_R^w$ rispetto a $\dot{M}_B^w$ che per il valore più basso della velocità. D'altra parte ad R_1^{Bub} il materiale, non più sorretto dalla pressione dinamica del vento, si espande indietro, ad una velocità pari a $\sim 3v_s$ ($v_s \sim 10^4\sqrt{T} \sim 10^7\, cm\, s^{-1}$ nel bubble). Con un semplice calcolo si trova che il materiale del bubble interagirà col vento rosso $\sim 2.6{\cdot}10^4$ anni dopo che il vento blu ha cessato di soffiare, ad una distanza dalla stella di $\sim .65\, pc$.

Nello stesso tempo un'onda di rarefazione si muove dentro il bubble, verso R_2^{Bub}, con la velocità del suono: nel tempo necessario per arrivare all'interazione fra il vento rosso e il materiale di ritorno, la rarefazione arriva fino a tre parsec dentro il bubble.

A questo punto soltanto il calcolo numerico è in grado di descrivere l'evoluzione successiva. In ogni caso possiamo però ancora fare 2 considerazioni di tipo qualitativo:

1) Si svilupperà una zona di alta densità al contatto fra il vento rosso e il materiale del bubble, con cui in seguito interagirà l'ejecta della SN.

2) Dopo l'esplosione si svilupperà una situazione estremamente caotica, che d'altra parte possiamo supporre non influenzerà molto il risultato finale, poichè, come abbiamo visto, dopo l'interazione con la zona perturbata, se il materiale ha a disposizione un tempo relativamente lungo in una zona con densità praticamente uniforme, in qualche modo le onde d'urto secondarie svaniscono per fenomeni di frammentazione e dissipazione viscosa.

§ 5.2.La ricombinazione

Un altro fenomeno fisico che ancora non è stato discusso riguarda i tempi caratteristici di ricombinazione. Infatti, come abbiamo visto, l'interazione col bubble si svolge su tempi caratteristici delle decine di migliaia di anni e noi, per i nostri calcoli, abbiamo usato un bubble *congelato*, con una temperatura interna di $\sim 10^6\,K$ ed una temperatura esterna di $\sim 10^4\,K$.

Che accade dopo l'esplosione della SN ? Ci possiamo chiedere se effetti di ricombinazione, dovuti al fatto che la stella centrale (che naturalmente è scomparsa) non riscalda più il mezzo circostante, mantenendolo alla temperatura uniforme $T_0 = 10^4\,K$ alterano l'evoluzione dell'SNR.

Usando la formula seguente (Wickramasinghe et al., 1972)

$$t_{ric}(anni) = 77.43 \frac{T^{0.8}}{n_e(cm^{-3})}\, anni, \qquad (5.2.1)$$

si trovano tempi di ricombinazione per l'interno del bubble ($T \sim 10^6\,K$, $n_e \sim 10^{-2}\,cm^{-3}$) di $\sim 6 \cdot 10^6$ anni, ossia ben più alti del tempo in cui avviene l'interazione con l'SNR.

Piú delicata è invece la situazione per la zona esterna del bubble, poichè in questa regione si hanno tempi caratteristici di ($T = 10^4\,K$, $n_e \sim 1\,cm^{-3}$) $\sim 1.2 \cdot 10^5$ anni.

Questo significa che per tempi superiori ai 10^5 anni la pressione termica nella zona esterna al bubble diminuisce di una frazione significativa: tempi dell'ordine del precedente sono allora il limite superiore di validità del modello da noi calcolato.

In ogni caso, alla diminuzione della pressione nella zona esterna corrisponderà un aumento delle dimensioni di tutta la struttura.

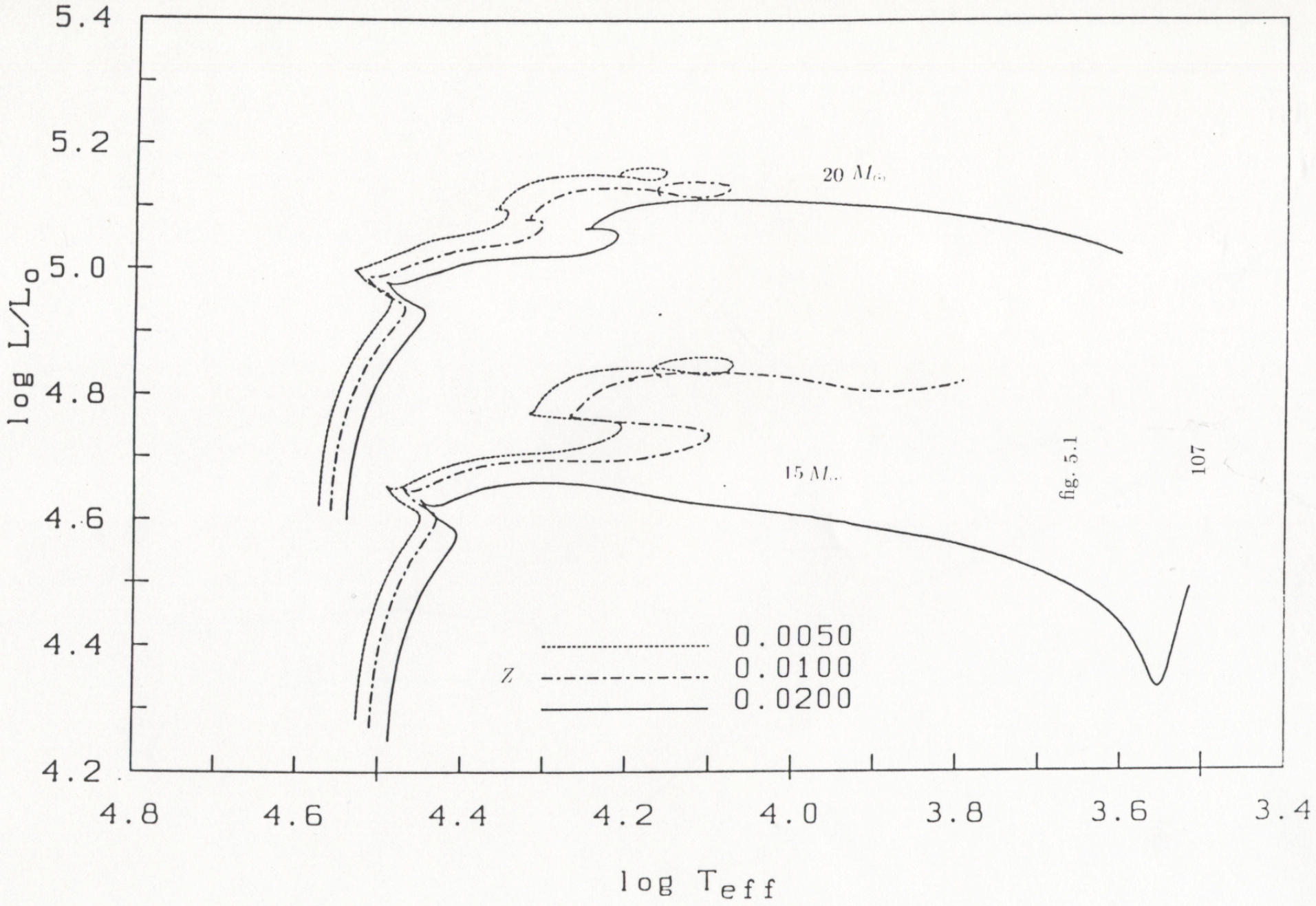

5.4
5.2
5.0
4.8
4.6
4.4
4.2
log L/L$_o$
20 $M_\odot$
15 $M_\odot$
Z
0.0050
0.0100
0.0200
4.8
4.6
4.4
4.2
4.0
3.8
3.6
3.4
log T$_{eff}$

fig. 5.1

6-APPENDICE A

§ 6.1.Le equazioni della fluidodinamica

In questa appendice si descrivono le equazioni della della fluidodinamica (per una trattazione completa e approfondita dell'argomento, vedere ad es. I.G.Currie, 1974): si deve ricordare però che una delle ipotesi fondamentali per la validità di queste equazioni è che il fluido in questione sia *collisionale*, ossia che si possa parlare di una funzione di distribuzione isotropa per le varie grandezze fisiche che caratterizzano il fluido. Questo nel problema da noi trattato si può supporre essere verificato (Cowie e McKee, 1977).

Stabilito ciò, consideriamo un fluido qualsiasi. Sia

$$v_i = v_i(x_j, t) \tag{6.1.1}$$

il campo di velocità ad esso associato. Si dice *derivata materiale* l'operatore cosı' definito:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{6.1.2}$$

Si dice invece *derivata totale* lungo una traiettoria arbitraria $x_i(t)$ l'operatore

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{6.1.3}$$

Se tale traiettoria coincide con quella effettiva dell' elemento di fluido considerato si ha:

$$\frac{dx_i}{dt} \equiv v_i, \tag{6.1.4}$$

e quindi

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt}. \tag{6.1.5}$$

Scriviamo ora le equazioni del moto usando i principi di conservazione della massa, dell'impulso e dell'energia.

Conservazione della massa

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 . \tag{6.1.6}$$

Conservazione dell'impulso

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_i . \tag{6.1.7}$$

dove $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ è il *tensore degli sforzi*, collegato alle *forze di superficie* P_i * come:

$$P_i = \sigma_{ij} n_j , \tag{6.1.8}$$

in cui n_j è la j-ma componente della normale alla superficie su cui si considera agire la forza. f_i è invece la somma delle varie *forze di volume* che agiscono sull'elemento di fluido, considerate per unità di massa.

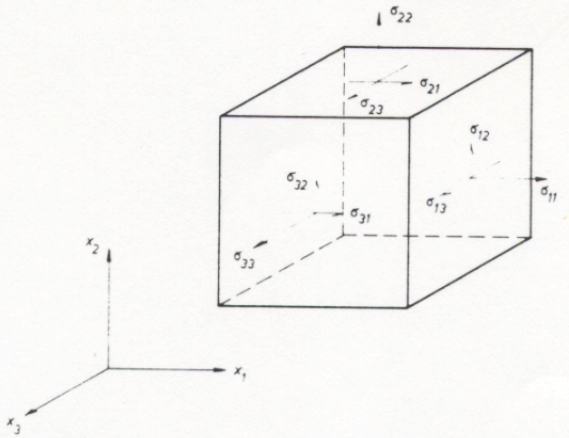


fig.6.1-Il tensore degli sforzi

* Si segue qui la convenzione della somma sugli indici ripetuti.

Conservazione dell'energia

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - L. \tag{6.1.9}$$

In questa equazione e rappresenta l'*energia interna* per unità di massa, q_i la i-ma componente di un vettore che descrive il *flusso conduttivo* per unità di superficie, in modo tale che l'energia perdute per conduzione attraverso la superficie dell'elemento di fluido considerato sono espresse come:

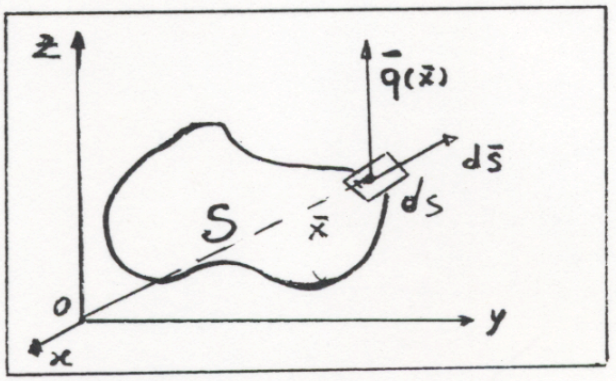


fig.6.2-Perdite conduttive

$$\text{Perdite conduttive} \equiv -\int_S q_i n_i dS, \tag{6.1.10}$$

infine L rappresenta le somma di tutte le perdite di energia non dovute a conduzione. Nel nostro particolare caso si tratterà di un *flusso radiativo*.

Aggiungendo a tale insieme di cinque equazioni le *equazioni di stato*:

$$p = p(\rho, T) \tag{6.1.11}$$

$$e = e(\rho, T), \tag{6.1.12}$$

si ha un sistema di 5 equazioni in 17 incognite (supponendo nota f_i).

Per risolvere il problema sono allora necessarie le cosiddette *equazioni costitutive*, ossia delle relazioni che, sulla base di assunzioni fisiche ben precise, ci danno la possibilità di esprimere le componenti σ_{ij} e q_i come funzioni delle altre variabili fisiche che decidiamo di assumere come fondamentali.

Per far ciò noi assumeremo che il fluido in questione sia Newtoniano, ossia che verifichi le seguenti ipotesi:

i) Quando il fluido è in quiete la pressione è quella termodinamica.

ii) Il tensore degli sforzi σ_{ij} dipende *linearmente* dal *tensore di deformazione* def_{kl}, che si trova essere:

$$(def)_{kl} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = (def)^{rot}_{kl} + (def)^{shear}_{kl}, \tag{6.1.13}$$

dove $(def)^{rot}_{kl}$ è la parte *antisimmetrica* e $(def)^{shear}_{kl}$ è la parte *simmetrica* del tensore di deformazione.

iii) In una rotazione del fluido come un corpo rigido, non devono comparire forze tangenziali.

iv) Il fluido è *isotropo*, ovvero le sue proprietà sono proprietà del punto soltanto.

Applicando queste ipotesi si trova:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2\mu(def)^{shear}_{ij}, \tag{6.1.14}$$

dove μ è la *viscosità dinamica* e λ è il *secondo coefficiente di viscosità*.

Entrambi questi parametri rimangono liberi, nel senso che solo la fisica del particolare problema, affrontato su scala microscopica, può dare informazioni

su di essi. In generale possiamo dire che sono proporzionali al *cammino libero medio* delle particelle.

Scriviamo ora le equazioni precedenti in coordinate sferiche ed imponendo successivamente la simmetria sferica (vedi **2-IL BUBBLE**):

$$x_1 = x = r sin\vartheta cos\varphi \tag{6.1.15}$$

$$x_2 = y = r sin\vartheta sin\varphi \tag{6.1.16}$$

$$x_3 = z = r cos\vartheta \tag{6.1.17}$$

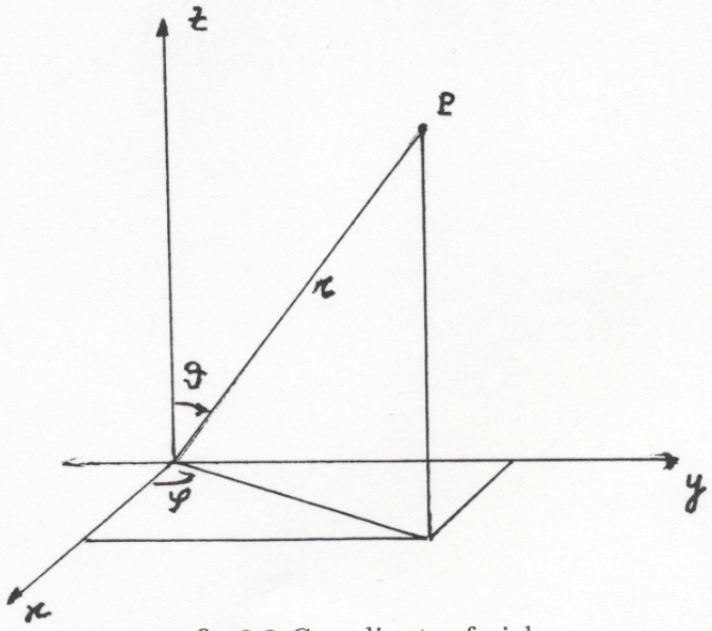


fig.6.3-Coordinate sferiche

con viscosità nulle

$$\mu = 0 \tag{6.1.18}$$

$$\lambda = 0\,, \tag{6.1.19}$$

e con forze di volume nulle, ossia

$$f_i = 0\,. \tag{6.1.20}$$

Imponendo la simmetria sferica le equazioni si semplificano notevolmente: la velocità avrà in questo caso solo la parte radiale v_r e anche negli operatori differenziali rimarranno diverse da zero solo le componenti che non dipendono dalle due coordinate angolari ϑ e φ. Si ha così:

$$div_r(\cdot) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\cdot)}{\partial r}. \tag{6.1.21}$$

Conservazione della massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div_r(m_r) = 0\,, \tag{6.1.22}$$

dove l'impulso per unità di volume è dato da:

$$m_r = \rho v_r. \tag{6.1.23}$$

Conservazione dell'impulso

$$\frac{\partial m_r}{\partial t} + div_r(m_r v_r) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0\,. \tag{6.1.24}$$

Conservazione dell'energia

$$\frac{\partial E}{\partial t} + div_r(E v_r) + p \cdot div_r(v_r) + div_r(q_r) + L = 0\,, \tag{6.1.22}$$

dove E è l'energia interna per unità di volume.

§ 6.2.Relazioni di Rankine-Hugoniot

Le equazioni (6.1.6), (6.1.7) e (6.1.9), mentre nel caso di una perturbazione infinitesima ammettono una soluzione di tipo ondoso, (ad esempio un'onda sonora), nel caso di una perturbazione di ampiezza finita portano come conseguenza l'esistenza di un particolare famiglia di soluzioni, dette **onde d'urto**. Per studiare alcuni effetti di un'onda d'urto, senza essere interessati alla sua struttura interna, può essere comodo usare il fatto che lo spessore dell'onda d'urto è solitamente molto piccolo rispetto alle lunghezze caratteristiche macroscopiche della maggior parte dei problemi, cosicchè l'onda d'urto stessa può essere considerata approssimativamente una *discontinuità* senza spessore (nelle particolari condizioni fisiche del nostro problema questo non è scontato. Vedere a questo proposito **2-IL BUBBLE**).

Con queste ipotesi lo studio risulta molto facilitato, e si possono ottenere agevolmente delle relazioni che collegano le grandezze fisiche a destra ed a sinistra della superficie di discontinuità (l'onda d'urto, appunto).

Queste relazioni sono dette *equazioni di Rankine-Hugoniot*. In figura è rappresentata un'onda d'urto piana, idealizzata come una superficie.

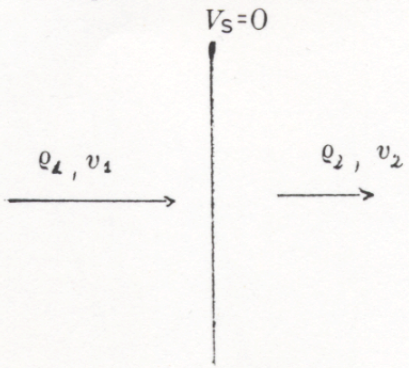


fig.6.4-Onda d'urto piana

I calcoli e le equazioni sono dedotti per un sistema di riferimento comovente

con l'onda d'urto (Landau e Lifshitz, 1959 pag. 362; Currie, 1974 pag. 337; Falle, 1975).

Dalla conservazione della massa, del momento e dell'energia (per un gas perfetto, con trasformazione adiabatica) si ha:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \tag{6.2.1}$$

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_1^2 + p_2, \tag{6.2.2}$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2}. \tag{6.2.3}$$

Risolvendo queste tre equazioni si ottengono le equazioni di Rankine-Hugoniot, che scriviamo in forma compatta come:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + (\gamma + 1)/(\gamma - 1)(p_2/p_1)}{(\gamma + 1)/(\gamma - 1) + p_2/p_1} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{6.2.4}$$

Osserviamo che, nel caso di onde d'urto forti si ha:

$$\frac{p_2}{p_1} \to 0 \Longrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \to \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \tag{6.2.5}$$

Per un gas perfetto monoatomico, essendo $\gamma = 5/3$ è:

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = 1/4\,. \tag{6.2.6}$$

Si deve far presente, per l'interesse che ha nel presente lavoro, anche l'esistenza di un altro tipo di soluzioni discontinue delle equazioni della fluidodinamica: le **discontinuità tangenziali**, o **discontinuità di contatto** o, più semplicemente, **contatti**.

Si ha un contatto in un fluido se esiste una particolare superficie per cui i valori della densità e della temperatura a destra ed a sinistra di questa sono

diversi, mentre la pressione e la velocità sono uguali (è chiara la differenza con le onde d'urto, per cui tutte le grandezze hanno valori diversi a destra ed a sinistra della superficie di discontinuità). Una situazione fisica in cui è presente un contatto è proprio il caso di contatto tra fluidi. È quello che accade ad esempio nel caso della supernova o del vento stellare che si espandono nel mezzo circostante.

§ 6.3.Cenni sulle soluzioni autosimili

In qualunque problema fisico le *funzioni* che ne rappresentano la soluzione sono sempre relazioni fra **grandezze adimensionali**, costruite con i parametri che descrivono il problema. Se cosìnon fosse infatti, il problema verrebbe a dipendere dalle **unità di misura** usate, cosa questa palesemente assurda.

Il metodo di ricerca delle soluzioni di un problema tramite lo studio delle relazioni fra le dimensioni delle grandezze che lo definiscono si chiama **analisi dimensionale**.

In questo metodo si cerca di esprimere l'unità di misura di lunghezza, di massa e di tempo tramite i parametri noti. Se questo riesce, si può esprimere tutto il problema in termini di variabili adimensionali, definite dal rapporto fra r, m e t e le tre unità di misura caratteristiche r_0, m_0 e t_0:

$$\xi \equiv r/r_0 \qquad \mu \equiv m/m_0 \qquad \tau \equiv t/t_0. \tag{6.3.1}$$

In questo modo il problema si svincola completamente dai particolari **valori numerici** delle singole grandezze, e diventa un problema * esclusivamente matematico.

---

* È anche importante notare che le variabili adimensionali hanno valori di solito attorno all'unità, cosa questa che rende l'analisi dimensionale interessante

A volte questo non è però possibile, ossia, in alcuni particolari problemi, dai parametri a disposizione non si può trovare un'unità di misura per le tre grandezze fondamentali. Supponiamo ad esempio di non poter trovare r_0 e t_0 separatamente, ma solo in una qualche combinazione del tipo:

$$[f(A, B, C, ...)] = [r_0^a t_0^b] = L^a T^b, \tag{6.3.2}$$

dove A, B, C sono i parametri che descrivono il problema.

Dall'equazione (6.3.3) è evidente che l'unica grandezza adimensionale costruibile è del tipo

$$\lambda \equiv \alpha f(A, B, C, ...)/(r^a t^b) \tag{6.3.4}$$

dove α è una costante numerica che può essere calcolata solo risolvendo effettivamente il problema.

È chiaro che ogni trasformazione del problema che lascia invariato il denominatore della (6.3.4) lascia del tutto simile il comportamento delle soluzioni del problema, in quanto queste possono dipendere soltanto da λ. Un problema che mostra questo comportamento si dice **autosimile** e le sue soluzioni sono dette **autosimilari**.

Le soluzione autosimili del tipo rappresentato nell'equazione (6.3.4), pur evolvendosi nel tempo, rimangono simili a loro stesse, a parte un cambiamento di scala dato da

$$r = r_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^{b/a}. \tag{6.3.5}$$

Per una trattazione esauriente dell'argomento, si veda, ad es., Sedov (1959).

---

anche da un punto di vista del calcolo numerico, in quanto il calcolatore tratta piccoli numeri con miglior precisione, oltre a non avere problemi di *overflow*.

7-APPENDICE B

Il programma (o meglio, come vedremo poi, i programmi) che noi usiamo in questo lavoro devono eseguire i seguenti compiti:

1) Generare la distribuzione delle varie grandezze fisiche (densità, temperatura, velocità) per il bubble fino a quando non è raggiunta una situazione stazionaria,

2) Calcolare l'evoluzione del resto di supernova nella materia circumstellare in vicinanza della stella fino all'interazione col bubble,

3) Studiare infine l'interazione della struttura precedentemente creatasi (2) col bubble.

Ciascuno dei precedenti problemi ha naturalmente bisogno di un suo specifico programma.

È d'altra parte evidente che le equazioni che regolano questi tre problemi sono in ogni caso quelle della fluidodinamica (per una discussione di questo fatto vedi **2-IL BUBBLE** e **6-APPENDICE A**), e questo porta una certa similitudine fra i tre programmi principali.

Tratteremo la descrizione dei programmi in modo generale, mettendo in evidenza soltanto le differenze significative.

La risoluzione numerica di un problema formulato per mezzo di equazioni differenziali può essere effettuata in più modi diversi.

Noi ci concentreremo in particolare su metodi detti alle **differenze finite**, ossia metodi in cui le derivate che sono contenute nelle equazioni differenziali vengono approssimate come *differenze* fra valori contigui (nello spazio e nel tempo) delle variabili fisiche studiate.

Per risolvere un problema con un metodo alle differenze finite occorrono due strumenti matematici:

i) Uno **schema** alle differenze finite per le equazioni differenziali che descrivono il problema.

ii) Una **griglia**.

§ 7.1.Gli schemi numerici

Come abbiamo detto, si chiama *schema numerico* l'insieme delle procedure seguite per risolvere un dato problema. Gli schemi numerici si dividono in due gruppi:

$$\textbf{SCHEMI} = \begin{cases} \textbf{ESPLICITI} \\ \textbf{IMPLICITI} \end{cases}$$

Uno schema si dice **ESPLICITO** se il metodo di calcolo per una qualunque grandezza, ad un tempo dato, necessita di informazioni sui valori delle grandezze **soltanto a tempi precedenti**.

In caso contrario lo schema si dice **IMPLICITO**.

È allora evidente come nell'ultimo tipo di schema più incognite debbano essere calcolate simultaneamente, rendendo cosìi relativi algoritmi più complessi di quelli validi per un semplice schema esplicito.

Ad uno schema numerico si richiede naturalmente di essere **convergente** ossia, al tendere a zero della larghezza di griglia e dell'intervallo temporale (vedi avanti) la soluzione dell'equazione alle differenze finite deve tendere alla soluzione vera.

Ma anche un'altra caratteristica deve essere soddisfatta, quella della **stabilità**. Uno schema numerico si dice stabile se le inevitabili oscillazioni numeriche che si generano (dovute agli arrotondamenti, allo schema stesso) si

smorzano al passare del tempo.

Proprio per ovviare questo problema si usa introdurre un termine di pressione detto **viscosità artificiale** (diviso a sua volta in una viscosità lineare ed una viscosità quadratica): questo termine agisce nel programma soltanto nelle zone di compressione forte (come nei pressi di un'onda d'urto) e serve per smorzare le oscillazioni che inevitabilmente si producono.

In realtà, uno schema alle differenze finite è sempre dotato anche di una certa **viscosità numerica**, che nasce dalle approssimazioni fatte nello scrivere lo schema alle differenze stesso.

Nel nostro caso si può dimostrare che le viscosità del programma sono superiori alle viscosità fisiche e per questo nelle equazioni da noi usate sono eliminati i termini proporzionali a λ e μ (vedi **6-APPENDICE A**).

Gli schemi impliciti godono indistintamente della proprietà di stabilità. Non cosìquelli espliciti: per questi ultimi occorre allora un **criterio di stabilità**. Successivamente parleremo del criterio usato (condizione di Courant).

I programmi usati in questo lavoro sono tutti basati su uno schema esplicito detto **UPWIND-SCHEME** (schema II di van Leer, 1977).

Questo metodo numerico gode dell'importante proprietà di essere un metodo *trasportivo*. Tale proprietà è cosìchiamata perchè permette di propagare in modo preciso le perturbazioni fisiche in un fluido. Parleremo estesamente di ciò nei prossimi paragrafi.

§ 7.2.La griglia

In questo primo paragrafo descriviamo la *griglia* e la distribuzione delle varie grandezze fisiche su di essa. Consideriamo la stella fissa nella posizione

O, e sia R la variabile fisica che corrisponde, in coordinate polari sferiche, alla distanza dalla stella stessa.

Come abbiamo già detto nei capitoli precedenti, assumiamo simmetria sferica per il problema. L'unica coordinata usata per esprimere la posizione nello spazio è allora R.

Per poter procedere con il calcolo è necessario definire le variabili fisiche che si usano in punti determinati dello spazio: tali punti dello spazio sono individuati allora da punti sul raggio R, ossia da un insieme finito di numeri $(JMAX)$ che rappresentano le varie distanze usate. Evidentemente, ad un più alto numero di punti usati per unità di lunghezza corrisponderà una miglior descrizione delle variabili fisiche: per motivi di tempo di calcolo non possiamo però aumentare tale numero a piacere. In questo lavoro sono stati usati i seguenti valori per $JMAX$:

$$JMAX = \begin{cases} 800, & \text{(bubble);} \\ 220, & \text{(supernova).} \end{cases}$$

I valori discreti di R sono individuati da un indice in basso a destra, ossia

$$R(J) \equiv R_J \qquad (1 \leq J \leq JMAX). \tag{7.2.1}$$

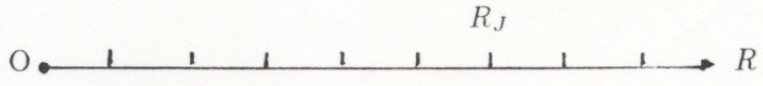


fig.7.1-Definizione di R_J

Un indice in basso a destra, applicato ad una qualunque variabile fisica, individuerà d'ora in poi la sua posizione spaziale. Le grandezze fisiche *indipendenti* sono la *densità*, la *densità di impulso* e l' *energia interna per unità di*

volume:

$$\rho \tag{7.2.2}$$

$$m = \rho v_r \tag{7.2.3}$$

dove v_r è la velocità radiale,

$$E = C_v \rho T, \tag{7.2.4}$$

dove C_v è il *calore specifico a volume costante* e T la *temperatura*. Tali variabili possono essere di due tipi: scalari o vettoriali. Questa divisione si ritrova anche nella loro posizione nello spazio *discreto*. Tra le variabili fisiche usate compare anche una densità definita in un punto di griglia vettoriale: la necessità di questa definizione sarà chiarita successivamente.

I **vettori** si situano nei punti R_J, mentre gli **scalari** si situano nei punti cosìdefiniti:

$$R_{J+1/2} = \frac{(R_{J+1} + R_J)}{2}. \tag{7.2.5}$$

Anche l'avanzamento temporale delle variabili è fatto necessariamente per intervalli discreti. Possiamo considerare una serie di disposizioni spaziali delle variabili fisiche, fatte a tempi successivi, e poste una sopra l'altra come in figura: si ottiene cosìuna *griglia* per il nostro problema (vedi figura 7.2).

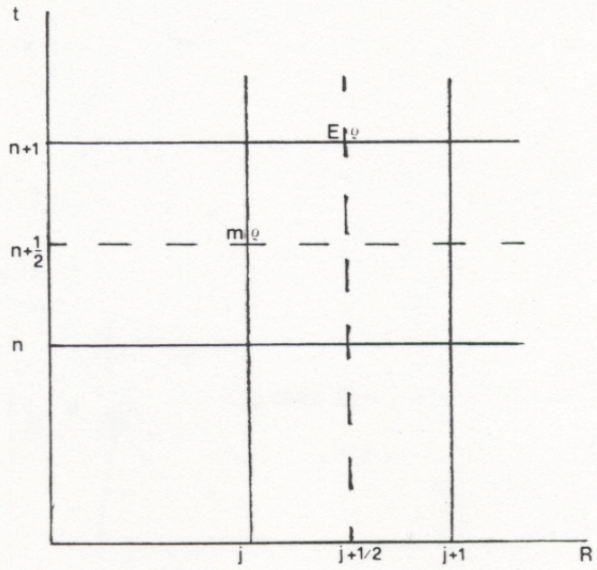


fig.7.2-La griglia e le variabili

Sulla griglia temporale vengono individuati anche punti a metà passo, in analogia con la griglia spaziale: alcune variabili sono situate in tali punti.

La necessità di avere due griglie sfasate (*staggered – mesh*) di mezzo passo (sia temporale che spaziale) nasce dal voler avere una miglior precisione nel calcolo delle derivate. Si ha allora:

vettori

$$m \rightarrow m_J^{n+1/2} \tag{7.2.6}$$

$$\rho \rightarrow \rho_J^{n+1/2} \tag{7.2.7}$$

scalari

$$E \rightarrow E_{J+1/2}^{n+1} \tag{7.2.8}$$

$$\rho \rightarrow \rho_{J+1/2}^{n+1} \tag{7.2.9}$$

In questo lavoro si pone anche il problema di una risoluzione soddisfacente dei profili delle varie grandezze fisiche all'interno del bubble. Per ottenere questo, data la grande estensione spaziale del bubble stesso, non si poteva procedere nel calcolo con una *griglia fissa* senza dover usare vettori di troppo grandi dimensioni. In ogni caso, quello delle dimensioni finali del bubble non sarebbe stato l'unico problema: anche l'inizio del calcolo del bubble avrebbe presentato inconvenienti. Infatti all'inizio del calcolo la zona effettivamente interessata dal vento è molto piccola (qualche decimo di parsec): quindi, oltre ad aver sprecato una grande quantità di griglie, avremmo avuto anche una bassissima risoluzione.

Il programma usato invece, come sarà meglio chiarito in seguito, usa una griglia che *'segue'* effettivamente le due onde d'urto (vedi **2-IL BUBBLE** e **3-LA SUPERNOVA**), cosicché si può avere con un vettore di dimensioni molto minori una risoluzione molto migliore della struttura del bubble (e della supernova).

Il fatto di avere una griglia mobile non può essere evidentemente senza conseguenze per le equazioni della fluidodinamica. In effetti si ha un termine additivo nelle varie equazioni.

Dove per una variabile qualunque f si aveva

$$div_r(fv_r), \tag{7.2.10}$$

(con div_r si intende la parte radiale della divergenza e con v_r la componente radiale della velocità)

$$div_r(\cdot) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\cdot)}{\partial r}, \tag{7.2.11}$$

adesso si ha:

$$v_{GR} = \text{velocità della griglia} \tag{7.2.12}$$

$$v_{REL} = v_r - v_{GR} = \text{velocita' relativa} \tag{7.2.13}$$

$$div_r(fv_r) \longrightarrow div_r(fv_{REL}) + f \cdot div_r(v_{GR}). \tag{7.2.14}$$

Per $v_{GR} = 0$ si ha evidentemente la descrizione *euleriana* del problema, per $v_{GR} = v_r$ quella *lagrangiana* e per $v_r \neq v_{GR} \neq 0$ una descrizione *mista*.

Nel nostro caso sarà praticamente sempre l'ultimo caso a verificarsi.

Se osserviamo l'espressione (7.2.14) della divergenza si possono interpretare fisicamente i due termini: il primo addendo, che sarà detto **termine advettivo**, rappresenta la variazione di f dovuta al trasporto della stessa f fuori e/o dentro la mesh, mentre il secondo addendo rappresenta la variazione di f dovuta al cambiamento di dimensioni della stessa mesh.

§ 7.3.L'advezione

7.3.1.Il Time-Splitting

Le equazioni del moto scritte nella nuova formulazione non sono di facile integrazione se le volessimo risolvere in un unico passo temporale. Scriviamo ad esempio la nuova equazione per la densità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div_r(\rho \cdot v_{REL}) + \rho \cdot div_r(v_{GR}) = 0\,. \tag{7.3.1}$$

Come si può vedere l'operatore di differenziazione rispetto alla coordinata spaziale può essere scomposto nella somma di più (in questo caso 2) addendi. Anche le altre equazioni vengono complicate di conseguenza. Per procedere nell'integrazione ci viene in aiuto un importante teorema di Analisi Numerica, detto *Time Splitting* (Richtmyer e Morton, 1967)

Sia data l'equazione differenziale

$$\partial_t U = A(\partial_r)U, \tag{7.3.2}$$

con A operatore differenziale. Se

$$A(\partial_r) = \sum_{m=1}^{M} A_m(\partial_r), \tag{7.3.3}$$

si può rimpiazzare l'equazione data con una serie di M equazioni successive del tipo

$$U^{n+m/M} = U^{n+(m-1)/M} + \Delta t \cdot A_m(\partial_r) U^{n+(m-1)/M}. \tag{7.3.4}$$

dove $U^{n+(m-1)}$ *è la condizione iniziale per lo step frazionario di ordine m.*
La soluzione ottenuta per integrazione diretta della (7.3.2), considerando l'operatore differenziale come un tutt'unico o, viceversa, applicando il Time-Splitting è un infinitesimo del secondo ordine:

$$O(\Delta t^2). \tag{7.3.5}$$

7.3.2Il termine advettivo

Per quanto affermato dal teorema precedente l'integrazione delle equazioni può essere fatta in passi successivi.

Cominciamo ad illustrare il metodo usato per l'integrazione del termine advettivo nel caso di geometria piana.

In questo caso si ha:

$$div_r \equiv \frac{\partial}{\partial r}. \tag{7.3.6}$$

Vogliamo integrare la densità. Consideriamo tutte le variabili fissate ad un dato tempo e sia:

$$\Delta R^n = R^n_{J+1} - R^n_J. \tag{7.3.7}$$

Definiamo la densità media fra R^n_J e R^n_{J+1} come

$$\rho^n_{J+1/2} \equiv \frac{1}{\Delta R^n} \int_{R^n_J}^{R^n_{J+1}} \rho(R, t^n) dR, \tag{7.3.8}$$

dove $\rho(R, t^n)$ è la distribuzione vera di densità, ed il *flusso* di massa F_J^n attraverso la superficie definita da R_J^n nell'intervallo di tempo Δt è:

$$F_J^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(R_J, t) dt. \tag{7.3.9}$$

Lo schema numerico di risoluzione dell'equazione advettiva è

$$\rho_{J+1/2}^{n+1} = \rho_{J+1/2}^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta R^n} \right) (F_{J+1}^n - F_J^n). \tag{7.3.10}$$

Primo ordine

L'approssimazione dello schema di risoluzione dipende dall'ordine con cui si calcola l'integrale (7.3.8). Facciamo notare esplicitamente come, dalle *definizioni* (7.3.7) e (7.3.8) risulta che la (7.3.9) è esatta.

Nell'approssimazione del primo ordine la densità è considerata costante ed identicamente uguale alla (7.3.7) in ogni zona.

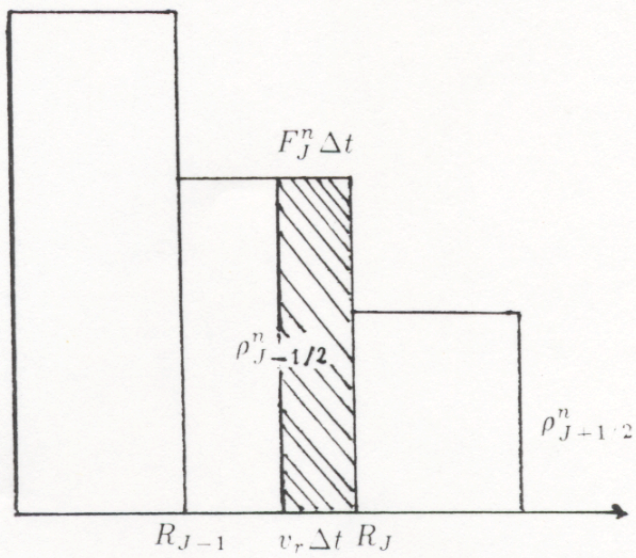


fig.7.3-Primo ordine

Come si vede dalla figura 7.3 si ottiene, considerando v_r=cost.,

$$F_J^n \Delta t = \begin{cases} (v_r \Delta t)\rho^n_{J-1/2}, & \text{se } v_r \geq 0 \\ (v_r \Delta t)\rho^n_{J+1/2}, & \text{se } v_r \leq 0 \end{cases}$$

Con questo sviluppo della densità si ha dunque:

$$\rho^{n+1}_{J+1/2} = \rho^n_{J+1/2} - \sigma(\rho^n_{J+1/2} - \rho^n_{J-1/2}). \tag{7.3.11}$$

L'espressione adimensionale

$$\sigma = \frac{v_r \Delta t}{\Delta R} \tag{7.3.12}$$

si dice *numero di Courant.*

La condizione di Courant, per assicurare la stabilità dello schema numerico, è che $\sigma < 1$, ossia si richiede che nell'intervallo di tempo scelto per far avanzare l'integrazione, il fluido non si possa spostare più di una zona spaziale della griglia. Con questo criterio si può passare a scegliere il passo temporale * da usare. Osserviamo esplicitamente che la stabilità è stata dimostrata soltanto nel caso **lineare**, ossia quando v_r=cost.

Questo non è il nostro caso, e proprio per questo, pur avendo intitolato il paragrafo seguente "Secondo ordine" il nostro schema è soltanto un po'più preciso del primo ordine.

Ritornando alla condizione di Courant, è immediata la sua interpretazione fisica: il fluido che si trova dentro una particolare zona spaziale non deve interagire, in un intervallo di tempo, con del materiale che non appartenga alle due zone adiacenti.

---

* In realtà il passo temporale deve soddisfare anche altre richieste (vedi, ad esempio, **8-APPENDICE C**)

Vedremo poi che la scelta dell'intervallo di tempo nei programmi viene fatta in un modo un po' più complesso, che tiene in considerazione alcuni termini additivi per v_r.

Secondo ordine

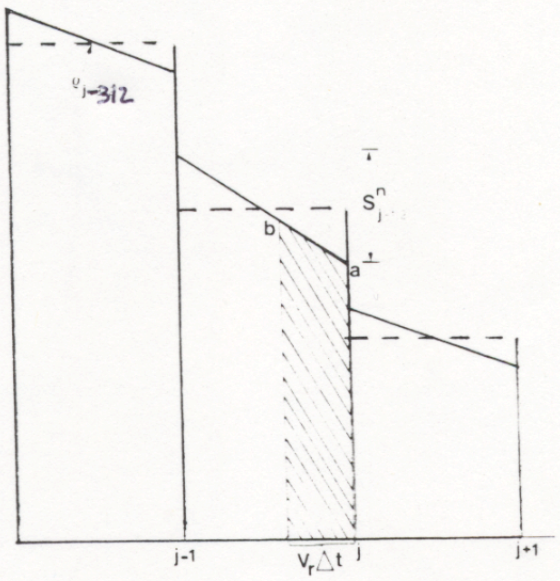


fig.7.4-Secondo ordine

In questo caso la densità viene approssimata in ogni zona della griglia tenendo conto non soltanto del momento di ordine zero della distribuzione vera (ovvero la massa totale in ogni mesh viene conservata), ma si tiene in considerazione anche una tangente per la distribuzione interpolata. Supponiamo per il momento tale tangente nota ed uguale a (vedi figura 7.4):

$$\frac{S^n_{J-1/2}}{(R^n_J - R^n_{J-1})} = \tan(\theta^n_J). \qquad (7.3.13)$$

Daremo poi un criterio per il calcolo di $S^n_{J-1/2}$.

Osserviamo dalla figura 7.4 che il valore assoluto del flusso F è dato dall'area del trapezio tratteggiato. Da questa osservazione si deducono immediatamente

le seguenti relazioni:

$$|F_J^n| = \frac{1}{2} v_{REL} \Delta t (a + b), \tag{7.3.14}$$

$$a = \rho_{J-1/2}^n + \frac{1}{2} S_{J-1/2}^n , \tag{7.3.15}$$

$$b = a - S_{J-1/2}^n \frac{(v_{REL,J}^n \Delta t)}{(R_J^n - R_{J-1}^n)} = a - \sigma_J^n S_{J-1/2}^n . \tag{7.3.16}$$

Si ha allora per quanto riguarda i flussi presi con il loro segno:

$$F_J^n = \begin{cases} v_{REL,J}^n \left[\rho_{J-1/2}^n + \frac{(1-\sigma)}{2} S_{J-1/2}^n \right], & \text{se } v_{REL,J}^n \geq 0 \\ v_{REL,J}^n \left[\rho_{J+1/2}^n - \frac{(1+\sigma)}{2} S_{J+1/2}^n \right], & \text{se } v_{REL,J}^n \leq 0 \end{cases}$$

Finalmente per la densità si ottiene il seguente algoritmo:

$$\rho_{J+1/2}^{n+1} - \rho_{J+1/2}^n = -\sigma(\rho_{J+1/2}^n - \rho_{J-1/2}^n) - \frac{\sigma(1-\sigma)}{2}(S_{J+1/2}^n - S_{J-1/2}^n) . \tag{7.3.17}$$

7.3.3.La tangente

Affrontiamo adesso il problema cui avevamo accennato in precedenza, quello della determinazione della tangente per la distribuzione di densità interpolata.

È naturale richiedere la conservazione della *monotonicità* della distribuzione, cosìcome è previsto dalle equazioni della fluidodinamica (vedi figura 7.4). Una volta posto

$$\Delta_J \rho \equiv \rho_{J+1/2} - \rho_{J-1/2}, \tag{7.3.18}$$

si può dimostrare (van Leer, 1977) che la seguente definizione di S conserva la monoticità:

$$S_{J+1/2} = \begin{cases} \frac{(2\Delta_J \rho \Delta_{J+1})}{(\Delta_J \rho + \Delta_{J+1} \rho)}, & \text{se } sgn\Delta_J \rho = sgn\Delta_{J+1} \rho \\ S_{J+1/2} = 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La definizione sopra data non è altro che la *media armonica* fra $\Delta_J \rho$ e $\Delta_{J+1} \rho$.

Ricordando che $S\Delta R$ è la tangente della distribuzione linearizzata, si dice anche, impropriamente, che S è la *tangente armonica* della distribuzione.

Un'osservazione per finire: per il calcolo di S nell'ultima mesh occorre il valore di Δ_{JMAX}. Tale valore non si ha nel caso del bubble, per cui si pone

$$S_{JMAX+1/2} \equiv 0. \tag{7.3.19}$$

Nel caso della supernova invece tale valore si calcola a partire dai dati precedentemente calcolati del bubble (vedi **8-APPENDICE C**), che fungono da *condizioni al contorno*.

§ 7.4.Il passo temporale

Dobbiamo ora affrontare il problema della scelta del passo temporale. Come abbiamo già detto, l'intervallo Δt da usarsi per l'avanzamento temporale non può essere qualunque, ma deve soddisfare la condizione di Courant. In realtà nel programma dobbiamo considerare anche la velocità del suono c_{Sound} ed un parametro, detto *viscosità quadratica* $q1_{J+1/2}$ che ha le dimensioni di una pressione, e che compare quindi come un termine additivo alla velocità. In conclusione si ottiene:

$$\Delta t = \frac{B\Delta R}{\sqrt{(c_{Sound} + |v_{REL}|)^2 + \frac{16C1q1}{\rho}}}, \tag{7.4.1}$$

dove

$$B < 1 \tag{7.4.2}$$

e $C1$ è un parametro dell'ordine di 0.5 che entra nella definizione della *viscosità quadratica* come segue (Norman e Wilson, 1978)

$$q1_{J+1/2} = -min(0, C1\rho_{J+1/2}|\Delta_J v_{REL}|\Delta_J v_{REL}) \tag{7.4.3}$$

in quanto la viscosità agisce solo durante la compressione, ossia solo quando è

$$\Delta_J v_{REL} < 0\,. \tag{7.4.4}$$

§ 7.5.Il nostro programma

La prima variabile che viene integrata è l'impulso m, la cui equazione differenziale è:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + div_r(m v_{REL}) + m\, div_r(v_{GR}) = -\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{7.5.1}$$

Applicando il metodo del *TimeSplitting* si avranno tre integrazioni successive, e il passo temporale da usarsi, Δt, diverrà

$$\frac{\Delta t}{3}. \tag{7.5.2}$$

Cominciamo quindi col termine advettivo.

$$\frac{\partial m}{\partial t} + div_r(m v_{REL}) = 0\,. \tag{7.5.3}$$

Si ha la seguente catena di uguaglianze

$$div_r(m v_{REL}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 m v_{REL})}{\partial r}. \tag{7.5.4}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore del secondo membro per 4π e ricordando la definizione di F si ottiene

$$\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial (4\pi r^2 m v_{REL})}{\partial r}\,, \tag{7.5.5}$$

ossia

$$[div_r(m v_{REL})]_J = 3\left(\frac{F_{J+1/2} - F_{J-1/2}}{R^3_{J+1/2} - R^3_{J-1/2}}\right), \tag{7.5.6}$$

dove, se ad esempio è

$$0 \leq v_{REL_{J+1/2}} \equiv \frac{v_{REL_{J+1}} + v_{REL_J}}{2}, \tag{7.5.7}$$

allora

$$F_{J+1/2} = \left[m_J + \frac{S_J}{2} \left(1 - \frac{v_{REL_{J+1/2}} \Delta t}{R_{J+1/2} - R_{J-1/2}} \right) \right] v_{REL_{J+1/2}} R^2_{J+1/2}. \tag{7.5.8}$$

Alla prima delle tre integrazioni successive si ha cosi'

$$m_J(t + \Delta t/3) = m_J(t) - [div_r(m v_{REL})]_J \Delta t. \tag{7.5.9}$$

Passiamo ora alla seconda delle tre integrazioni, che deriva dall'equazione

$$\frac{\partial m}{\partial t} + m_J div_r(v_{GR}) = 0, \tag{7.5.10}$$

che può essere scritta come

$$\frac{\partial m}{m_J} = -\Delta t div_r(v_{GRID}). \tag{7.5.11}$$

La soluzione è immediata:

$$m_J(t + 2\Delta t/3) = m_J(t + \Delta t/3) e^{-D_J \Delta t}, \tag{7.5.12}$$

$$D_J = \left(\frac{v_{GR_{J+1/2}} - v_{GR_{J-1/2}}}{R_{J+1/2} - R_{J-1/2}} \right) \tag{7.5.13}$$

Infine rimane l'ultima equazione

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0. \tag{7.5.14}$$

Ricordando il legame fra la pressione e l'energia si ha

$$m_J(t + \Delta t) = m_J(t + 2\Delta t/3) - (\gamma - 1) \left(\frac{E_{J+1/2} - E_{J-1/2}}{R_{J+1/2} - R_{J-1/2}} \right) \Delta t. \tag{7.5.15}$$

Dopo aver integrato l'impulso si integra alla stessa maniera la densità *vettoriale*, necessaria per il calcolo della velocità del fluido. La sua equazione è

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div_r(\rho v_{REL}) + \rho div_r(v_{GR}) = 0. \tag{7.5.16}$$

Una volta risolta la (53) possediamo il valore per $\rho_J^{n+1/2}$. Si può calcolare ora la nuova velocità semplicemente come

$$v_J^{n+1/2} = \frac{m_J^{n+1/2}}{\rho_J^{n+1/2}}. \tag{7.5.17}$$

Si aggiorna ora la posizione della griglia quindi la velocità relativa fra il fluido e la griglia:

$$v_{REL_J}^{n+1/2} = v_J^{n+1/2} - v_{GR_J}^{n+1/2}. \tag{7.5.18}$$

Possiamo ora integrare la densità scalare, usando la nuova griglia. Dopo questa integrazione rimane da affrontare l'ultima equazione, quella dell'energia.

La sua equazione sulla griglia fissa è la seguente:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + div_r(Ev_r) = -pdiv_r v_r - div_r q_r - L, \tag{7.5.19}$$

$$E = C_v \rho T = \frac{p}{(\gamma - 1)} \qquad C_v = cost., \tag{7.5.20}$$

$$q_r = -k(T)\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{7.5.21}$$

Rimanendo nel sistema *fisso* ed usando l'equazione di continuità con semplici passaggi si arriva alla seguente espressione per l'equazione (7.5.19)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r div_r(T) = -(\gamma - 1)T div_r(v_r) + \frac{1}{\rho C_v}\left[div_r\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) - L\right]. \tag{7.5.22}$$

Il primo termine che si risolve è quello dovuto all'irraggiamento: si integra subito su tutto lo step temporale nel modo esplicito

$$T^{`} = T^n - L(T^n)\Delta t \tag{7.5.23}$$

Con T^* intendiamo una temperatura che evidentemente non è ancora T^{n+1} ma è solo *parzialmente* avanzata nel tempo.

Da questa temperatura partiamo per l'integrazione del termine successivo, che è quello dovuto alla *conduzione*. Dopo lunghi e tediosi passaggi algebrici si trova che il termine conduttivo può essere scritto ed integrato iterativamente con uno schema tridiagonale con condizioni al contorno fissate (la temperatura pre-shock e quella del mezzo circumstellare, entrambe costanti ed uguali a $10^4 K$).

$$D_J \equiv \frac{1}{\rho C_v} div_r \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \tag{7.5.24}$$

$$D_J = \frac{3(F_{J+1} - F_J)}{\rho_J (R_{J+1}^3 - R_J^3)} \tag{7.5.25}$$

$$F_J = R_J^2 \frac{(k_J^{med} - k_{J-1}^{med})}{2} (T_J - T_{J-1}) \left(\frac{R_{J+1} - R_{J-1}}{2} \right)^{-1}. \tag{7.5.26}$$

Alla prima iterazione

$$K_J^{med} \equiv \frac{k(T_J^*) + k(T_J^n)}{2}. \tag{7.5.27}$$

Evidentemente anche k_J^{med} è funzione dello step di iterazione.

Lo schema è il seguente

$$D_J = A_J B_J T_{J+1} - A_J (B_J + C_J) T_J + A_J C_J T_{J-1} \tag{7.5.28}$$

$$A_J = \frac{3}{C_v \rho_J (R_{J+1}^3 - R_J^3)} \tag{7.5.29}$$

$$B_J = R_{J+1}^2 \left(\frac{k_{J+1}^{med} + k_J^{med}}{R_{J+2} - R_J} \right) \tag{7.5.30}$$

$$C_J = B_{J-1}. \tag{7.5.31}$$

Essendo note D_J e le condizioni al contorno per la temperatura, si risolve questo schema,come già detto, per ricorsività. Si ricalcolano ora nuovamente tutti i D_J

e si prosegue cosi'. Si considera risolta la temperatura al livello della conduzione quando, per due iterazioni successive si ha:

$$\frac{|T^{p+1} - T^p|}{T^p} < 10^{-4} \tag{7.5.32}$$

A questo punto, ottenuto il nuovo valore per T, si rimoltiplica per la densità e il calore specifico, e finalmente si può risolvere nel modo consueto i termini restanti dell'equazione differenziale per l'energia, relativi alla sua parte meccanica.

Il valore finale di T si ottiene a questo punto semplicemente come

$$T^{n+1}_{J+1/2} = \frac{E^{n+1}_{J+1/2}}{C_v \rho^{n+1}_{J+1/2}}. \tag{7.5.33}$$

A pagina seguente diamo uno schema generale del procedimento usato per l'integrazione.

SCHEMA RIASSUNTIVO

Integrazione dell'impulso

$$\frac{\partial m}{\partial t} + div_r(m v_{REL}) + m\, div_r(v_{GR}) = -\frac{\partial p}{\partial r}.$$

Integrazione della densità "vettoriale"

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div_r(\rho v_{REL}) + \rho div_r(v_{GR}) = 0.$$

Calcolo della velocità del fluido

$$v_J^{n+1/2} = \frac{m_J^{n+1/2}}{\rho_J^{n+1/2}}.$$

Si aggiorna la velocità di griglia

Nuova velocità relativa

$$v_{REL_r}^{n+1/2} = v_J^{n+1/2} - v_{GR_r}^{n+1/2}.$$

Integrazione densità "scalare"

Integrazione dell'energia

$$\frac{\partial E}{\partial t} + div_r(E v_r) = -p div_r v_r - div_r q_r - L.$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r div_r(T) = -(\gamma - 1) T div_r(v_r) + \frac{1}{\rho C_v}\left[div_r\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial r}\right) - L\right].$$

§ 7.6.Lo SLIC

Con il termine SLIC (Simple Lagrangean Interface Calculation) si intende un algoritmo sviluppato da Noh et al. (Noh, 1966; Noh e Woodward, 1977) che permette di trattare le *discontinuita' di contatto* (vedi **6-APPENDICE A**).

Tale procedimento viene da noi usato solo nel programma per la supernova, in quanto in questo caso ci interessa sapere non solo il profilo finale delle varie grandezze per la supernova, ma anche la zona di separazione fra il materiale espulso dalla supernova nell'esplosione e il bubble preesistente.

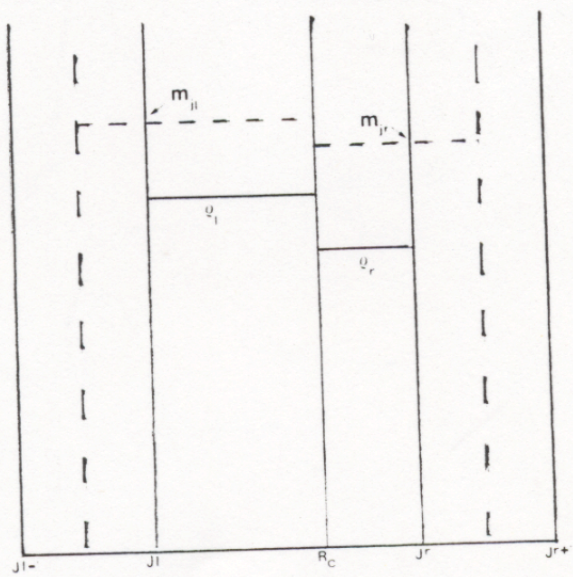


fig.7.5-Il contatto

Sia R_c il raggio a cui è situata la discontinuità, R_{Jl} il raggio immediatamente precedente e R_{Jr} quello immediatamente seguente la discontinuità, ossia

$$R_{Jl} \leq R_c \leq R_{Jr}. \tag{7.6.1}$$

Ora attraverso il contatto per *definizione* non può esservi flusso (da questa considerazione segue che la velocità del contatto è uguale alla velocità del fluido).

Consideriamo ad esempio la parte a destra del contatto. Il flusso e la divergenza per ρ_r (vedi figura 7.5) si scrivono allora come:

$$F_{Jr} = \rho_r v_{rJr} R_{Jr}^2 \tag{7.6.2}$$

$$div_r(\rho_r v_r) = \frac{3F_{Jr}}{R_{Jr}^3 - R_c^3} \tag{7.6.3}$$

Il resto del calcolo procede analogamente a quanto visto fino ad ora, considerando R_c come un vero e proprio raggio (oltre ai soliti R_J ed $R_{J+1/2}$) nella divisione della griglia.

Nasce però un problema, determinato dal fatto che il contatto può avvicinarsi troppo ad una delle due pareti che lo contengono: questo farebbe tendere a zero il numero di Courant (7.3.12). Il nostro codice, usando una griglia mobile, può aggirare il problema, semplicemente imponendo che la griglia abbia una velocità tale che il contatto non si allontani troppo dal centro della zona che lo contiene.

8-APPENDICE C

§ 1.-La subroutine 'DESTRA'

Lo schema di calcolo seguito in questo lavoro consiste di tre parti fondamentali: una **prima parte**, in cui si segue l'evoluzione del bubble fino a che esso non raggiunge una configurazione stazionaria; una **seconda parte**, in cui si studia la propagazione del materiale espulso dalla supernova in un profilo di densità proporzionale a r^{-2} (fino a quando non inizia l'urto con il bubble) ed infine una **terza parte** in cui si segue l'interazione fra il materiale espulso dalla supernova ed il bubble stesso.

Le ultime due parti non sono *concettualmente* diverse fra loro per quanto riguarda il problema fisico, trattandosi per entrambe dell'interazione fra il materiale espulso dalla supernova ed una distribuzione *esterna* di grandezze fisiche, che svolgono la funzione di **condizioni al contorno**.

L'interazione col bubble presenta però alcune difficoltà tecniche che non si pongono nel caso dell'interazione col vento. Nel caso del 'vento' infatti possediamo la legge *analitica* del profilo di densità, cosa che invece non abbiamo nel caso del bubble.

Allora, mentre nel caso dell'interazione con il vento non abbiamo problemi ad assegnare il valore della densità (temperatura e velocità) all'ultimo raggio scalare della griglia per la supernova ($R_{JMAX+1/2}$), semplicemente ponendo (vedi **1-INTRODUZIONE**):

$$\rho_{JMAX} = \frac{\dot{M}_w}{4\pi (R_{JMAX+1/2})^2 V_w} \tag{8.1.1}$$

$$T_{JMAX+1/2} = 10^4\ K \tag{8.1.2}$$

$$V_{JMAX} = 2000\, km\, s^{-1} \qquad (8.1.3)$$

nel caso dell bubble questo non è fattibile con altrettanta semplicità.

Il profilo di densità (e delle altre variabili) del bubble, essendo il risultato di un precedente calcolo numerico, è infatti assegnato *per punti* e comunque la sua complessità non rende possibile trovare una funzione interpolatrice semplice e precisa, tale che, per una grandezza qualunque del bubble si abbia:

$$X_{JMAX} = F^{\mathrm{INTERP}}(R_{JMAX+1/2}) \qquad (8.1.4)$$

Oltre a questo dobbiamo far notare che la griglia della supernova e la griglia del bubble hanno larghezze diverse, e che non possiamo sapere quale configurazione di sovrapposizione assumano, una rispetto all'altra, durante l'interazione.

Possiamo però dire che la griglia della supernova è molto più stretta della griglia del bubble, poichè, mentre questo si estende su molti parsec (≈ 40), la zona interessante della supernova è molto più stretta (vedi **3-LA SUPERNOVA**). Anche avendo usato una griglia per il bubble con 800 punti e con soli 220 per la supernova, le dimensioni di una zona della griglia del bubble sono maggiori delle dimensioni di una zona della griglia.

In figura 8.1 sono riportati i due possibili casi di sovrapposizione.

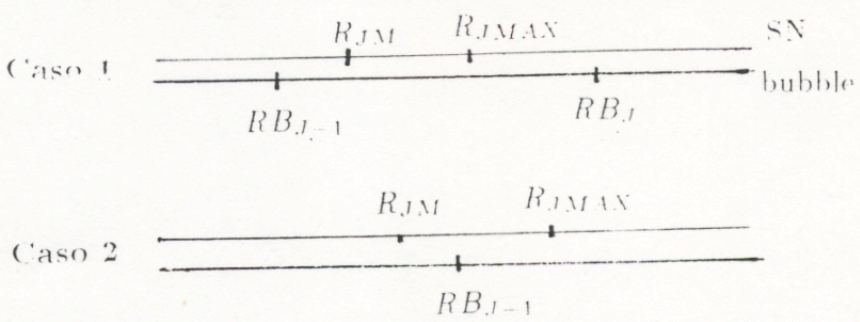


fig.8.1-Le possibili sovrapposizioni SN-bubble

Prima di passare a descrivere in dettaglio la tecnica seguita per la sovrapposizione dobbiamo notare che un altro problema si può porre durante il calcolo.

Sia

$$\Delta t_{prg} \tag{8.1.5}$$

l'intervallo di tempo per l'avanzamento temporale che il programma ha calcolato prima della chiamata di questa subroutine (vedi **7-APPENDICE B**). Può accadere che un tale intervallo di tempo sia però abbastanza grande da far sì che l'ultima griglia della supernova superi più di una griglia del bubble, perdendo cosìinformazione. Si è risolto questo problema introducendo un nuovo intervallo di tempo, Δt_{JMAX}, definito come il rapporto fra la distanza di R_{JMAX} dalla zona piú vicina del bubble e la velocità della griglia in R_{JMAX}

$$\Delta t^{JMAX} \equiv \left(\frac{R_{Bubble} - R_{JMAX}}{v^{grid}_{JMAX}} \right) \tag{8.1.6}$$

A questo punto si sceglie il minimo fra i due intervalli di tempo necessari per l'avanzamento temporale dello schema numerico ($time - step$):

$$\Delta t_{step} = min(\Delta t^{JMAX}; \Delta t_{prg}) \tag{8.1.7}$$

È evidente che con la definizione (8.1.7) per la griglia della supernova è impossibile avanzare di più di una zona della spaziale del bubble.

Veniamo adesso alla descrizione della subroutine preposta alla sovrapposizione delle due griglie per la definizione delle condizioni al contorno a destra.

È stato usato un metodo dovuto a van Leer (1977), opportunamente modificato per gli usi nel nostro programma.

Definiamo come XB_{J-1} il valor medio della grandezza fisica, che indicheremo genericamente con XB, nella zona del bubble compresa fra RB_{J-1} e RB_J:

$$XB_{J-1} = \frac{\int_{RB_{J-1}}^{RB_J} X_{Bub} dR}{RB_J - RB_{J-1}} \tag{8.1.8}$$

È immediata l'interpretazione geometrica di questo integrale: XB_{J-1} non è altro che l'altezza di un rettangolo la cui base sia pari a

$$RB_J - RB_{J-1} \tag{8.1.9}$$

e la cui superficie sia equivalente alla superficie racchiusa dalla distribuzione della variabile fisica in questione nel bubble.

Sempre per il bubble è definita la grandezza TG_{J-1}, ossia il valore della tangente della retta che approssima la distribuzione vera di XB nel bubble.

Infine poniamo la larghezza dell'ultima zona della griglia della supernova uguale a DR (vedi figura 8.2):

$$DR = R_{JMAX} - R_{JM} \tag{8.1.10}$$

$$RS = \frac{R_{JMAX} + R_{JM}}{2} \tag{8.1.11}$$

Il nostro scopo è quello di determinare il valore di X e di S per la grandezza fisica della supernova, a partire dai dati del bubble e dalla modalità della sovrapposizione.

Per quanto detto prima si possono dare solo due casi di sovrapposizione:

Caso 1) l'ultima zona della griglia della supernova è tutta contenuta in una zona della griglia del bubble,

Caso 2) l'ultima zona della griglia della supernova è tagliata da un raggio della griglia del bubble.

Caso 1

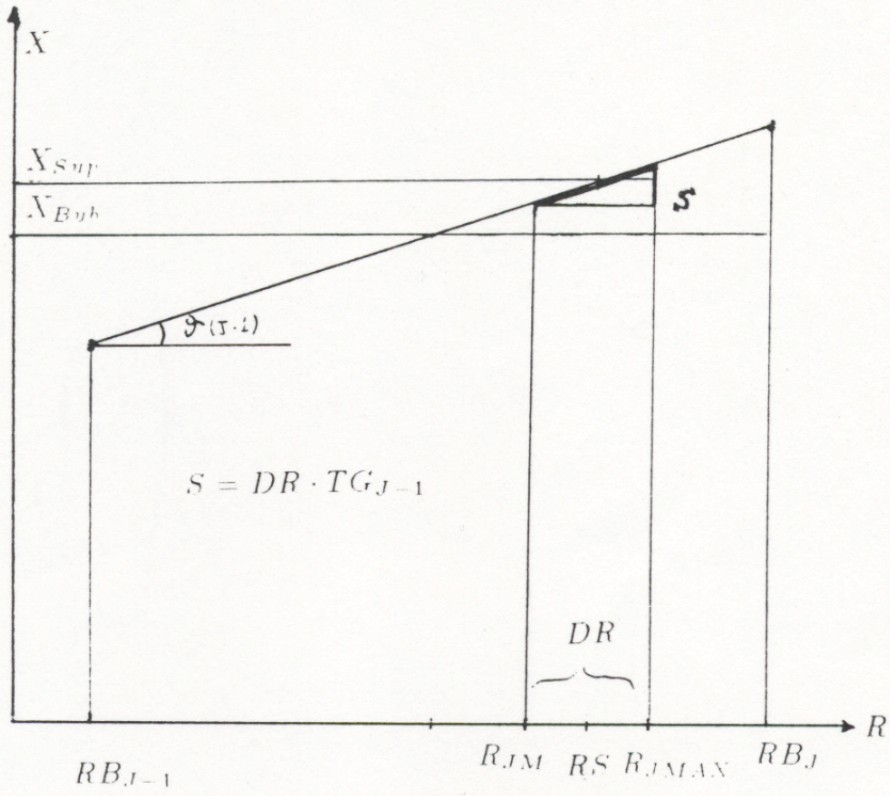


fig.8.2-Caso 1

Come risulta subito dalla figura 8.2, si ha per X ed S:

$$X = XB_{J-1} + TG_{J-1} \cdot \left[RS - \left(\frac{RB_{J-1} + RB_J}{2} \right) \right] \qquad (8.1.12)$$

$$S = DR \cdot TG_{J-1} \qquad (8.1.13)$$

Caso 2

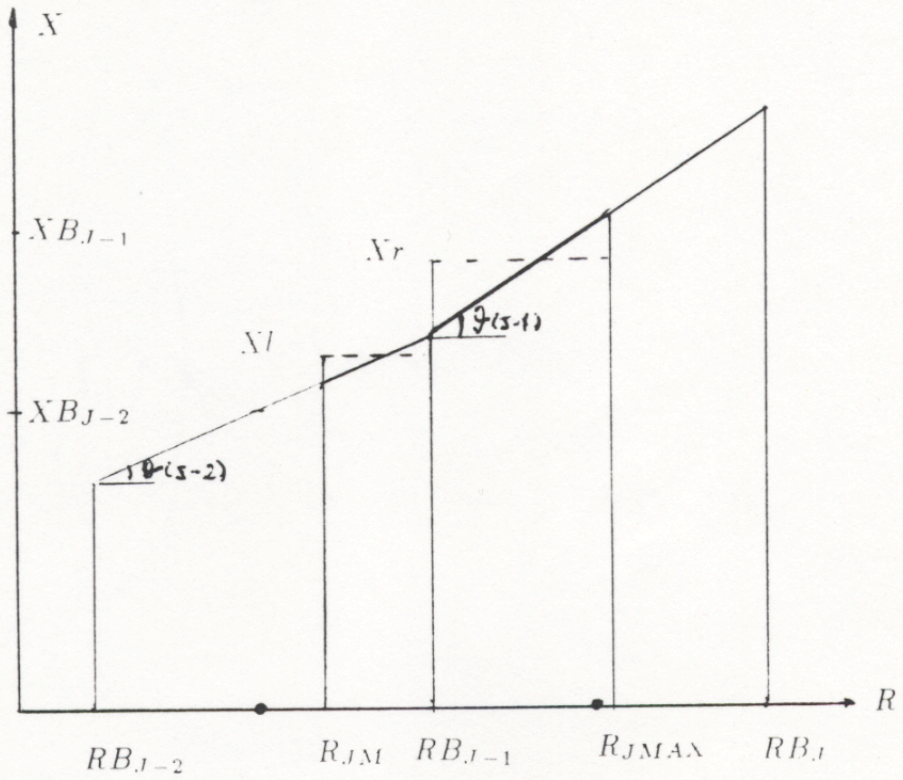


fig.8.3-Caso 2

Questo caso è piú complesso.

L'ultima zona della griglia della supernova si trova tagliata da un raggio della griglia del bubble. Mentre il calcolo di X è relativamente semplice, piú complesso è il calcolo di S.

Trattiamo prima il problema del calcolo di X, valor medio della grandezza fisica che si sta calcolando per la supernova.

Siano Xl e Xr i valori medi della distribuzione del bubble, compresa rispettivamente fra (R_{JM}, RB_{J-1}) e (RB_{J-1}, R_{JMAX}). Calcoliamo X come media pesata di Xl ed Xr.

Come fattore di normalizzazione per la funzione peso usiamo la larghezza

della griglia della supernova, DR.

$$X = \frac{\int_{R_{JM}}^{R_{JMAX}} X_{Sup} dR}{DR} = \frac{\int_{R_{JM}}^{R_{JMAX}} X_{Bub} dR}{DR} \tag{8.1.14}$$

D'altra parte l'espressione a secondo membro è facilmente calcolabile se usiamo i valori medi del bubble, Xl ed Xr. Si ha:

$$X = \frac{Xl \cdot (RB_{J-1} - R_{JM}) + Xr \cdot (R_{JMAX} - RB_{J-1})}{DR} \tag{8.1.15}$$

$$Xl = XB_{J-2} + TG_{J-2} \cdot \frac{(R_{JM} - RB_{J-2})}{2} \tag{8.1.16}$$

$$Xr = XB_{J-1} + TG_{J-1} \cdot \frac{(R_{JMAX} - RB_{J})}{2} \tag{8.1.17}$$

Per trovare il valore di S, imponiamo una tangente per la distribuzione della variabile fisica nella griglia della supernova che conservi il "centro di massa" della distribuzione del bubble compresa fra gli estremi dell'ultima griglia suddetta (vedi figura 8.3).

$$S = TG_{Sup} \cdot DR \tag{8.1.18}$$

$$X_{Sup} = X + TG_{Sup} \cdot (R - RS) \tag{8.1.19}$$

Per quanto abbiamo detto dovrà essere:

$$\int_{R_{JM}}^{R_{JMAX}} X_{Sup} \cdot (R - RS) dR = \int_{R_{JM}}^{R_{JMAX}} X_{Bub} \cdot (R - RS) dR \tag{8.1.20}$$

L'integrale a primo membro della (8.1.20) risulta uguale a

$$\int_{R_{JM}}^{R_{JMAX}} X_{Sup} \cdot (R - RS) dR = S \cdot \left(\frac{DR^2}{12} \right) \tag{8.1.21}$$

Spezzando l'integrale a secondo membro della (8.1.20) in due parti si ha:

$$\int_{R_{JM}}^{R_{JMAX}} X_{Bub} \cdot (R - RS) dR = Al + Ar \tag{8.1.22}$$

dove la **parte sinistra** *'left'* è:

$$Al = \frac{1}{2} \cdot Al1 \cdot Al2 + \frac{1}{3} \cdot TG_{J-2} \cdot Al3 \tag{8.1.23}$$

$$Al1 = Xl - TG_{J-2} \cdot \left(\frac{RB_{J-1} + R_{JM}}{2} - RS \right) \tag{8.1.24}$$

$$Al2 = (RB_{J-1} - RS)^2 - (R_{JM} - RS)^2 \tag{8.1.25}$$

$$Al3 = (RB_{J-1} - RS)^3 - (R_{JM} - RS)^3 \tag{8.1.26}$$

e, per la **parte destra** *'right'*

$$Ar = \frac{1}{2} \cdot Ar1 \cdot Ar2 + \frac{1}{3} \cdot TG_{J-1} \cdot Ar3 \tag{8.1.27}$$

$$Ar1 = Xr - TG_{J-1} \cdot \left(\frac{RB_{J-1} + R_{JMAX}}{2} - RS \right) \tag{8.1.28}$$

$$Ar2 = (R_{JMAX} - RS)^2 - (RB_{J-1} - RS)^2 \tag{8.1.29}$$

$$Ar3 = (R_{JMAX} - RS)^3 - (RB_{J-1} - RS)^3 \tag{8.1.30}$$

Confrontando la (8.1.18) e la (8.1.19) si ottiene finalmente l'espressione cercata per S

$$S = 12 \cdot \frac{(Al + Ar)}{DR^2} \tag{8.1.31}$$

8-BIBLIOGRAFIA

Abbott, D. C.: 1982, *Astrophys. J.* **259**, 282

Aller, L. H.: 1961, *The Abundances of the Elements*,

(New York: Interscience)

Andriesse, C. D.: 1979, *Astrophys. Space Sci.* **61**, 205

Bedogni, R., D'Ercole, A.: 1988, *Astron. Astrophys.* **190**, 320

Castor, J. I., Abbott, D. C., Klein, R. I.: 1975, *Astrophys. J.* **195**, 157

Castor, J., McCray, R., and Weaver, R.: 1975, *Astrophys. J. Letters* **200**, L107

Castor, J., McCray, R., and Weaver, R.: 1977, *Astrophys. J.* **218**, 377

Chevalier, R. A.: 1974, *Astrophys. J.* **188**, 501

Chevalier, R. A.: 1982, *Astrophys. J.* **258**, 790

Chiosi, C., Maeder, A.: 1986, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*

Cowie, L. L.: 1977, *Astrophys. J.* **215**, 226

Cowie, L. L., McKee, C. F.: 1977, *Astrophys. J.* **211**, 135

Currie, I. G.:1974, *Fundamental Mechanics of Fluids*

(New York: McGraw-Hill Book Company)

Dickel, J. R., Jones, E. M.: 1985, *Astrophys. J.* **288**, 707

Falle, S. A. E. G.: 1975, *R. Astr. Soc.* **172**, 55

Falle, S. A. E. G.: 1975, *Astron. Astrophys.* **43**, 323

Fusi-Pecci, F., Renzini, A.: 1975, *Astron. Astrophys.* **73**, 190

Hausman, M. A.: 1982, *Astrophys. J.* **261**, 532

Jones, E. M., Smith, B. W., Straka, W. C.: 1981, *Astrophys. J.* **249**, 185

Kafatos, M.: 1973, *Astrophys. J.* **182**, 433

Lamers, H. J. G. L. M., Rogerson, J. B. Jr.: 1978, *Astron. Astrophys.* **10**, 97

Landau, L. D., Lifshitz, E. M.: 1959, *Fluid Mechanics*,

(Londra: Pergamon)

Lucy, L. B., Solomon, P.M.: 1970, *Astrophys. J.* **159**, 879

McKee, C. F., Ostriker, J. P.: 1977, *Astrophys. J.* **218**, 148

McKee, C. F., Hollenbach, D. J.: 1980, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **18**, 219

McKee, C. F., Van Buren, D., Lazareff, B.: 1984, *Astrophys. J. Letters* **278**, L115

Noh, W. F.: 1966, in *Numerical Solutions of Non-Linear Differential Equations*, (ed. D. Greenspan, New York: John Wiley and Son)

Noh, W. F., Woodward, P. R.:1977, in *"Lecture Notes in Physics No. 59"*, (Berlino: Springer-Verlag)

Norman, M. L., Wilson, J. R.: 1978, *Astrophys. J.* **224**, 497

Panagia, N.: 1973, *Astron. J.* **78**, 929

Parker, E. N.: 1963, *Interplanetary Dynamical Processes*, (New York: Interscience)

Renzini, A.: 1984, *Observational Tests of Stellar Evolution Theory,*, (ed. A. Maeder e A. Renzini Dordrecht: Reidel)

Richtmyer, R. D., Morton, K. W.: 1967, *Difference Methods for Initial-Value Problems*,(New York:Interscience)

Rosenberg, I., Scheuer, P. A. G.: 1973, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **161**, 27

Sedov, L. I.:1959, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, (New York: Academic Press)

Spitzer, L. Jr.: 1962, *Physics of Fully Ionized Gases*, (New York: Interscience).

van Leer, B.: 1977, *J. Computational Physics* **27**, 276

Wickramasinghe, N. C., Kahn, F. D., Mezger, P. G.: 1972, *Interstellar Matter* (Saas-Fee)