

LUCA CIOTTI

**Alcune questioni matematiche riguardanti  
la dinamica stellare.**

Estratto da:  
La Matematica nella Società e nella Cultura  
*Bollettino della Unione Matematica Italiana*  
(8), 5-A, Aprile 2002, 97-141



AMMINISTRAZIONE E DISTRIBUZIONE

**ZANICHELLI EDITORE S.p.A.**

**BOLOGNA**

## Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare.

LUCA CIOTTI

### 1. – Introduzione.

Come ogni problema astrofisico, anche la dinamica stellare nasce con lo scopo di rispondere a ben precise domande poste dal mondo naturale agli astronomi. In particolare alcune delle questioni che per le loro ramificazioni ed implicazioni sono al centro del dibattito astrofisico contemporaneo sono connesse all'origine, all'evoluzione ed alla struttura delle galassie.

A tali domande la scienza tenta di rispondere attaccando i problemi posti da varie angolature, ovvero ottenendo misure sempre migliori grazie a telescopi che hanno visto negli ultimi anni uno sviluppo tecnologico senza precedenti e, da un punto di vista teorico, costruendo modelli matematici sempre più sofisticati che siano capaci ad un tempo di *descrivere* le proprietà osservate, di *inquadrarle* (se possibile) nelle teorie già solidamente accertate, ed infine di *predire* nuovi fenomeni.

Con particolare riguardo a quest'ultimo punto, non si dovrebbe mai dimenticare che scopo della scienza (nel nostro caso particolare, dell'astrofisica) non è quello di elencare semplicemente dei fatti, ma di capire come dalle leggi fondamentali della natura si originino la varietà osservata dei fenomeni naturali.

Come è noto, le scienze naturali (ed in maniera specialissima le cosiddette «scienze esatte» come la fisica e l'astrofisica) hanno trovato nella matematica lo strumento «perfetto» sia per operare tale discesa dal generale (le leggi fisiche fondamentali) al particolare (il comportamento di un dato sistema in date condizioni), sia per costruire modelli descrittivi capaci di predizioni quantitative.

Questo approccio non è ovviamente, tranne che in casi estremamente idealizzati, realizzabile completamente in maniera simbolica, poiché la complessità dei modelli necessari per una descrizione sufficientemente realistica di sistemi fisici (come un atomo, una stella, o una galassia) è tale che si richiede l'approccio numerico tramite un massiccio utilizzo di computers. Si può affermare che una delle principali attività di un astrofisico teorico contemporaneo sia infatti quella di scrivere, a partire dalle leggi fisiche di base, equazioni che devono descrivere un modello, mentre le conseguenze quantitative di tale modello (da confrontarsi poi con le osservazioni, e che ne determineranno il successo o il fallimento) sono ormai di norma ottenute con metodi numerici.

Ovviamente, l'interazione tra teoria ed osservazioni procede anche in senso inverso: modelli teorici sempre più sofisticati permettono di predire fenomeni sempre più complessi e di difficile osservazione, che pongono nuove sfide e sono quindi di stimolo alla tecnologia impiegata per le osservazioni. In questa maniera si innesca un meccanismo di *feedback* fra teoria ed osservazioni che è al cuore del successo della scienza galileiana.

In questo lavoro cercherò di presentare in maniera non tecnica ma al tempo stesso corretta alcune delle idee e delle problematiche di tipo matematico che sono state sviluppate, o che sviluppate per motivi diversi hanno trovato sorprendente applicazione, per risolvere alcuni dei problemi più interessanti associati alla *formazione, struttura, ed evoluzione* delle galassie. In particolare mi limiterò al campo d'indagine della **dinamica stellare**: è quasi superfluo ricordare che tale scelta esclude dalla presente trattazione moltissimi altri aspetti fondamentali dell'astrofisica delle galassie, come ad esempio tutte le proprietà associate alla presenza di enormi quantitativi di gas, all'evoluzione stellare, a fenomeni estremi collegati alla presenza di *buchi neri* al centro delle galassie stesse, che in certe condizioni possono dar origine al cosiddetto fenomeno degli *AGN* (dall'inglese, «Active Galactic Nuclei»). In ogni caso, nella parte iniziale del lavoro verranno brevemente presentate alcune delle proprietà fondamentali delle galassie, come le loro masse, dimensioni e morfologie caratteristiche. Tali informazioni permetteranno anche al let-

tore che non possieda una conoscenza specifica di astrofisica, ma che sia curioso di conoscere alcuni degli sviluppi matematici associati a questa disciplina, di farsi un'idea degli oggetti di cui ci interessere-  
mo nelle sezioni successive.

## 2. – Principali proprietà delle galassie.

Le galassie sono sistemi stellari di immense proporzioni quando confrontati non solo con gli oggetti dell'esperienza comune degli esseri umani, ma anche col nostro sistema solare. Stime del *numero di stelle* ( $N_*$ ) che le compongono vanno da  $N_* \sim 10^9$  per le galassie più piccole fino a  $N_* \sim 10^{12}$  per quelle più grandi. Le loro *masse* ( $M_{\text{gal}}$ ) vanno da  $M_{\text{gal}} \approx 10^9 M_{\odot}$  fino a  $M_{\text{gal}} \approx 10^{13} M_{\odot}$  (col simbolo  $M_{\odot}$  si indica in astronomia la massa solare, pari a circa  $1.989 \times 10^{33}$  g). Da un punto di vista osservativo, definire le *dimensioni* caratteristiche delle galassie è un problema non banale: infatti, i sistemi stellari in genere non presentano un «bordo» netto ben definito, quanto piuttosto un profilo di luce di intensità decrescente man mano che ci si allontana dalle loro regioni centrali. In generale (ma con eccezioni) si trova che il profilo di luce (ad esempio, ricavato da un'immagine al telescopio) delle galassie caratterizzate da forma ellissoidale è ben descritto dalla famiglia di curve

$$(1) \quad I(R) = I(0) \times \exp[-b(m)(R/R_e)^{1/m}]$$

con  $m$  numero reale (usualmente con valori che, variando da galassia a galassia, si trovano nell'intervallo  $1 \lesssim m \lesssim 10$ ).  $R_e$  è il cosiddetto «raggio effettivo», ovvero il raggio di un cerchio immaginario contenente metà della luce emessa dalla galassia, ed  $R$  è la distanza dal centro dell'immagine della galassia in questione. Come conseguenza di questa definizione si ha che la funzione adimensionale  $b(m)$  ha la seguente *espansione asintotica* per  $m \rightarrow \infty$

$$(2) \quad b(m) \sim 2m - \frac{1}{3} + \frac{4}{405m} + \dots$$

Come quasi sempre accade tale espansione asintotica fornisce



Fig. 1. – L'ammasso globulare NGC 6093, come osservato dal telescopio spaziale Hubble. Si noti la forma rotondeggiante, ed il colore prevalentemente rossastro delle sue stelle: gli ammassi globulari sono infatti sistemi stellari molto vecchi, con un'età simile a quella dell'universo stesso, maggiore di 10 miliardi di anni.

un'ottima approssimazione anche per valori «piccoli» ( $m \simeq 1$ ) del parametro.

In genere le galassie che presentano nel loro piano equatoriale un sostanziale «disco stellare» sono ben descritte dalla legge precedente dove  $m \simeq 1$ : in altre parole, i dischi galattici sono ben descritti da un profilo di brillantezza di tipo esponenziale. Risulta naturale considerare  $R_e$  una «misura» delle dimensioni caratteristiche delle galassie: dalle osservazioni si ricava che i raggi effettivi delle galassie normali sono in genere dell'ordine di qualche *kiloparsec*, dove  $1 \text{ kpc} = 3.08 \times 10^{21} \text{ cm}$ . Tradotte in *anni luce* (ovvero, l'unità di misura equivalente alla distanza che la luce, alla velocità di circa  $3 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$ , percorre in un anno), tale dimensioni vanno da *decina di migliaia* fino a *centinaia di migliaia di anni luce* per le galassie più grandi.

Le *velocità* caratteristiche delle stelle all'interno delle galassie sono dell'ordine di qualche centinaio di chilometri al secondo: questo significa che una stella impiega qualche *centinaia di milioni di an-*

*ni* a percorrere una distanza pari alle dimensioni caratteristiche della galassia che la ospita, e quindi in un periodo confrontabile con l'età dell'universo ( $t_H \approx 13$  Gyr, dove  $1 \text{ Gyr} = 10^9$  anni) una stella può percorrere varie volte la galassia che la ospita.

Una delle proprietà più importanti delle galassie per l'astronomo che si dedica alla loro classificazione morfologica è data dal fatto stesso che le galassie che popolano l'Universo possono, almeno grossolanamente, essere classificate in *pochi tipi distinti*. Una delle classificazioni più utili si è rivelata essere la cosiddetta *classificazione di Hubble*, dal nome dell'astronomo americano Edwin Hubble che la introdusse nei suoi lavori pionieristici. Essenzialmente in tale classificazione le galassie si suddividono in *galassie sferoidali*, caratterizzate da immagini di forma ellittica con eccentricità più o meno marcata, e *galassie a disco*, in cui risulta ben evidente un disco sottile di stelle; su tale disco risultano poi in molti casi evidenti i *bracci a spirale*, impressionanti organizzazioni stellari che danno in maniera naturale il nome di *galassie a spirale* ai sistemi che le ospitano. Le ragioni dinamiche che sottostanno alla formazione e al mantenimento di tali strutture su tempi scala che sono dell'ordine di decine di rotazioni del disco galattico sono estremamente complesse, e sono state indagate di approfonditi studi matematici.

Da un punto di vista astrofisico una delle più importanti proprietà della classificazione di Hubble è che *altre* proprietà galattiche appaiono correlare molto bene col tipo morfologico: ad esempio, le galassie sferoidali (chiamate anche ellittiche per il loro aspetto) mostrano raramente presenza di stelle giovani blu, sono di colore rossastro, presentano pochissimo gas (quando confrontato alle loro masse in stelle!), e sono caratterizzate da una distribuzione di luce sulla quale non risultano particolari evidenti. Al contrario, le galassie a spirale mostrano sempre quantità significative di gas, presenza sostanziale di giovani stelle blu, e nel complesso i loro dischi sono caratterizzati da un aspetto «frastagliato» (dovuto alla distribuzione irregolare delle nubi di gas), sotto al quale è presente l'impressionante struttura a spirale. Nelle regioni centrali delle galassie a spirale si trova una specie di «rigonfiamento» del disco, chiamato *bulge*. Il bulge è per molti aspetti simile ad una galassia ellittica in miniatura, ed anche il suo colore (ed altre pro-

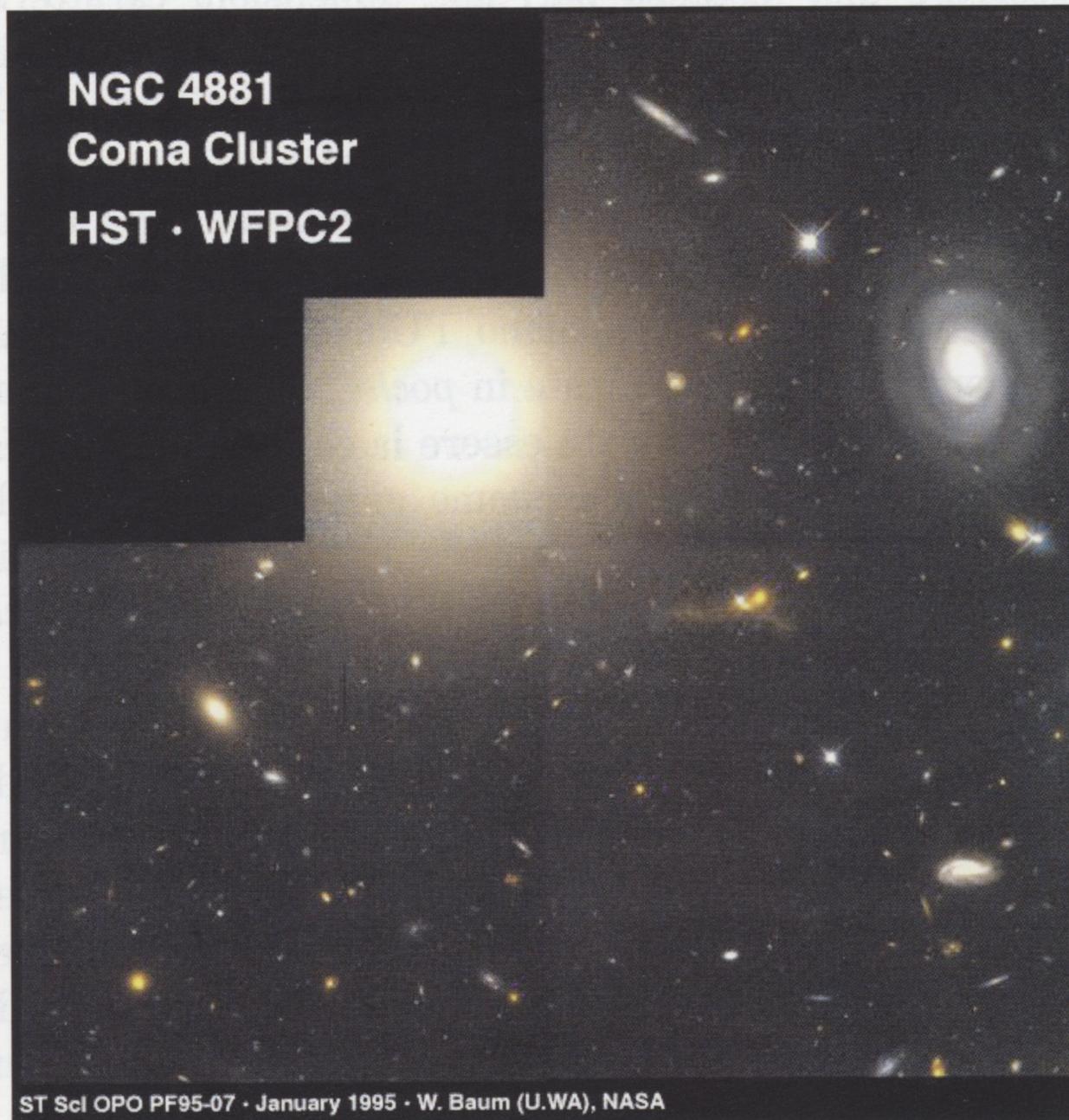


Fig. 2. – La galassia ellittica NGC 4881 nell’ammasso di galassie di Coma. Il suo aspetto uniforme non deve trarre in inganno: tale galassia è composta infatti da miliardi di stelle separate ciascuna dall’altra da distanze enormi, dell’ordine di vari anni-luce. Nello stesso ammasso ci sono anche galassie a disco e spirali, come si può chiaramente vedere dall’immagine.

prietà che non possiamo entrare qui a descrivere) è rossastro, come il colore delle galassie ellittiche.

Nella classificazione di Hubble le galassie ellittiche sono «collegate» alle galassie a spirale dalla tipologia intermedia delle *galassie lenticolari* (o S0), oggetti rossastri, simili per quel che riguarda la popolazione stellare ed il contenuto stellare alle galassie ellittiche, ma con un marcato disco dal profilo esponenziale, che le può far assomigliare a delle galassie a spirale. A differenza di queste però le galassie S0 non presentano (tranne che in pochissimi casi particola-

ri) i bracci a spirale: si tratta quindi di un'indicazione di notevole interesse che ci dice come il gas sia una componente di grande importanza per il processo che porta un disco stellare a sviluppare e mantenere dei bracci, e diventare quindi una galassia a spirale.

L'ultima «classe» di galassie è rappresentata dalle *galassie irregolari* che, come dice il nome, non presentano una morfologia ben definita. Caratteristiche distintive di queste galassie sono una presenza di una gran quantità di gas e di un considerevole numero di stelle giovani e blu. In genere le galassie irregolari sono più piccole delle galassie «regolari» che sono state sopra descritte.

Ovviamente questa descrizione non vuol certamente essere esaustiva: ogni classe di galassie può essere a sua volta organizzata in sottoclassi individuate in base a criteri ben definiti: ad esempio, le galassie ellittiche sono classificate in base alla loro ellitticità, mentre le spirali possono essere di tipo *barrato* oppure *normali*, a seconda della presenza o assenza di una «barra» stellare nelle parti centrali del loro disco. Inoltre, i bracci possono essere più o meno «avvolti». È di grande interesse astrofisico il fatto che, un esempio fra molti, le dimensioni relative del bulge rispetto al disco correlino sorprendentemente bene con l'avvolgimento dei bracci.

Per motivi di spazio non possiamo discutere di molti altri interessantissimi aspetti collegati alla classificazione morfologica delle galassie. Come detto nell'introduzione dovrebbe essere comunque chiaro che una classificazione morfologica, per quanto interessante e profonda, non è sufficiente per l'astrofisico. La vera sfida è posta dalla comprensione, attraverso l'applicazione delle leggi della fisica, di come queste strutture si formino e si mantengano, di quali processi presiedano alla formazione di una galassia ellittica invece che di una spirale, se una galassia di un tipo possa trasformarsi morfologicamente e, se sì, sotto quali condizioni, se all'epoca di formazione dell'universo si sia formato solo un determinato tipo di galassie e le altre si siano formate per evoluzione di queste galassie primordiali, oppure se al contrario le galassie che vediamo oggi sono essenzialmente le stesse che si sono formate miliardi di anni fa.

È ovvio che una classificazione come quella di Hubble, con le sue varie correlazioni tra proprietà apparentemente scollegate, contenga in-

dizi importantissimi per chiunque voglia tentare di rispondere a questo tipo di problemi. Nelle prossime sezioni cercheremo di chiarire alcuni dei «punti fermi» attualmente disponibili che riguardano la dinamica delle galassie, specialmente per quanto riguarda le nostre conoscenze sul comportamento collettivo di un numero elevatissimo di stelle interagenti fra di loro attraverso la legge di Newton.

### 3. – Introduzione alla dinamica stellare.

La *dinamica stellare* è un campo molto vasto di studio, di cui non è facile dare una semplice definizione. Un'idea parziale ma sostanzialmente corretta può essere ottenuta comunque attraverso la lettura di queste brevi note. Esistono ovviamente trattati molto avanzati sull'argomento: il lettore che volesse approfondire alcuni aspetti di questo campo di ricerca può ad esempio consultare alcune tra le referenze [1], [2], [3], [4], [5] e [6].

Possiamo iniziare affermando genericamente, ma abbastanza correttamente, che il principale problema affrontato dalla dinamica stellare è il tentativo di raggiungere una *comprensione qualitativa della struttura e dell'evoluzione dei sistemi stellari* (come ad esempio, muovendosi su scale spaziali sempre più grandi, gli ammassi aperti e globulari, le galassie, gli ammassi di galassie) e sviluppare **metodi matematici** (analitici e numerici) capaci di previsioni quantitative.

In generale la dinamica stellare non è un campo di ricerca «autocontenuto», perché utilizza ampiamente *tecniche e risultati* propri di altri campi della Fisica e della Matematica. In generale possiamo dire che la dinamica stellare si occupa di studiare il comportamento di sistemi gravitazionali composti da un numero molto elevato di «particelle» (i cosiddetti «sistemi ad  $N$  corpi», diciamo con  $N > 10$ ). I collegamenti della dinamica stellare con la meccanica celeste (identificabile con la disciplina che studia il comportamento di sistemi con un numero di corpi molto minore, diciamo per riferimento  $N \leq 10$ ) sono, come ovvio, molto forti e profondi, ma anche la meccanica analitica, la meccanica statistica, la fluidodinamica e la fisica del plasma hanno in comune con la dinamica stellare molte tecniche e risultati.

Ovviamente, non si deve dimenticare l'importanza delle *osservazioni*, che sono il vero punto di contatto tra la teoria ed il mondo fisico. Le osservazioni hanno un ruolo duplice per la dinamica stellare: da un lato la teoria serve come sorgente di interessanti obbiettivi per gli astronomi osservativi, sfidando la loro abilità ed i loro strumenti; da un altro, osservazioni di accuratezza sempre maggiore possono confermare o falsificare i risultati teorici. Chi si occupa di dinamica stellare dovrebbe infatti aver sempre presente e riconoscere *esplicitamente* la natura speciale delle ipotesi via via avanzate, e rivedere continuamente le relazioni fra il modello adottato e il reale sistema fisico che il modello matematico cerca di riprodurre.

Uno dei più importanti problemi della dinamica stellare riguarda il trattamento formale dei mattoni costituenti ogni sistema stellare, ovvero le stelle.

A questo proposito consideriamo il raggio solare  $R_{\odot}$  ( $R_{\odot} \approx 7 \times 10^{10}$  cm) come il raggio caratteristico delle stelle in un dato sistema stellare, ed inoltre supponiamo che un numero  $N_*$  di stelle sia distribuito *omogeneamente* dentro una sfera di raggio  $r$ , il nostro modello semplificato di sistema stellare. La *sezione d'urto geometrica* per l'impatto tra due stelle è ovviamente  $\sigma_* = 4\pi R_{\odot}^2$ : ad ogni stella risulta associato un volume efficace dato da  $\lambda_g \sigma_*$ , dove, per definizione,

$$(3) \quad N_* \lambda_g \sigma_* = \frac{4\pi}{3} r^3,$$

ovvero,

$$(4) \quad \frac{\lambda_g}{2r} = \left( \frac{r}{R_{\odot}} \right)^2 \frac{1}{6N_*}.$$

La grandezza  $\lambda_g$  fornisce una stima (come ordine di grandezza) del percorso che una stella in media può percorrere senza avere collisioni geometriche (ovvero, urtare) con una qualunque altra stella del sistema. Assumiamo adesso come valori caratteristici per  $N_*$  ed  $r$  le coppie  $(10^{11}; 10^4 \text{ pc})$  e  $(10^6; 10 \text{ pc})$ ; ricordiamo che  $1 \text{ pc} = 3.08 \times 10^{18} \text{ cm}$ . Queste due coppie possono essere considerate come rappresentative rispettivamente di una galassia ellittica e di un ammasso

globulare. Nel primo caso  $\lambda_g/2r \approx 3 \times 10^{11}$  mentre nel secondo  $\lambda_g/2r \approx 3 \times 10^{10}$ ; inoltre, gli astronomi ci dicono che le velocità caratteristiche ( $v_*$ ) delle stelle sono dell'ordine di qualche centinaio di chilometri al secondo nelle galassie ellittiche e di poche decine di chilometri al secondo negli ammassi globulari.

Anche nell'ipotesi massimale che le galassie ellittiche e gli ammassi globulari siano vecchi come l'universo, otteniamo  $\lambda_g/v_* t_H \approx 10^9$  per le galassie ellittiche e  $\lambda_g/v_* t_H \approx 10^6$  per gli ammassi globulari. *Dunque, nei sistemi stellari come le galassie ellittiche e gli ammassi globulari, si può ragionevolmente escludere la possibilità di collisioni geometriche tra stelle anche su scale temporali molto più lunghe dell'età stessa dell'universo: il nostro Sole non urterà mai un'altra stella della nostra galassia!* È comunque importante ricordare che in determinate situazioni astrofisiche, come ad esempio in zone di densità stellare particolarmente elevata (ad esempio nelle regioni centrali delle galassie), la probabilità di avere collisioni fisiche tra stelle non è trascurabile.

Questa preliminare discussione qualitativa rende plausibile l'ipotesi fatta nella maggior parte dei problemi studiati nella dinamica stellare, ovvero che le collisioni geometriche tra stelle possono essere del tutto ignorate. Ciascuna stella è allora ipotizzata essere un punto materiale cosicché il punto di partenza della dinamica stellare è rappresentato dalle *equazioni differenziali* che descrivono quello che è probabilmente il problema più famoso di tutta la fisica matematica, ovvero il *problema degli N corpi*.

Nella formulazione Newtoniana (in coordinate Cartesiane) le equazioni del moto per ciascuna delle  $N$  particelle, espresse in un sistema di riferimento generico ma inerziale  $S_0$ , sono date da:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{v}}_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}, \\ U = -\frac{G}{2} \sum_{i,j=1; j \neq i}^N \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}, \end{cases}$$

per  $i = 1, \dots, N$ , dove  $m_i$ ,  $\mathbf{x}_i$ , e  $\mathbf{v}_i$  sono la massa, posizione, e velocità della  $i$ -ma stella,  $U$  è l'energia potenziale,  $\partial U/\partial \mathbf{x}_i$  è il gradiente di  $U$  rispetto a  $\mathbf{x}_i$ , e finalmente  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  è la norma Euclidea. La costante  $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2} \text{ g}^{-1}$  è la costante di gravitazione universale. Il problema è formulato con l'assegnazione delle *condizioni iniziali*:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_i^0, \\ \mathbf{v}_i(0) = \mathbf{v}_i^0, \end{cases}$$

per  $i = 1, \dots, N$ ; il problema degli  $N$  corpi può ovviamente essere formulato anche usando tecniche più sofisticate, come l'approccio *Lagrangiano* ed *Hamiltoniano*, ma tale discussione ovviamente esula dagli scopi di questo lavoro.

Come ben noto, le proprietà della soluzione generale del problema degli  $N$  corpi, per le attuali conoscenze matematiche, non sono disponibili, e ciò lo rende di grande interesse matematico. Le varie tecniche matematiche che sono state sviluppate per «estrarre» informazioni dalle equazioni differenziali appena ricordate hanno infatti contribuito in maniera essenziale al raggiungimento di molti risultati fondamentali sia in matematica pura, che applicata, che in analisi numerica. Considerato l'enorme quantità di lavoro svolto attorno a questo soggetto di ricerca negli ultimi tre secoli, è chiaramente qui impossibile anche soltanto riportare un elenco parziale dei risultati più importanti ottenuti. Nondimeno qui di seguito tenteremo di riassumere almeno alcuni dei risultati «diretti» più importanti concernenti il problema degli  $N$  corpi.

È necessario avvertire il lettore che in questa discussione col termine «diretto» intendiamo *derivato dalle equazioni differenziali del problema degli  $N$  corpi per assegnate condizioni iniziali*. Come vedremo, questo non significa che i risultati ottenuti con altri metodi siano *scorretti*, ma, piuttosto, che in alcuni approcci alternativi caratteristici della dinamica stellare sono introdotte (esplicitamente o implicitamente), alcune *ipotesi addizionali*. La breve presentazione che segue dovrebbe infatti facilmente convincere il lettore della rea-

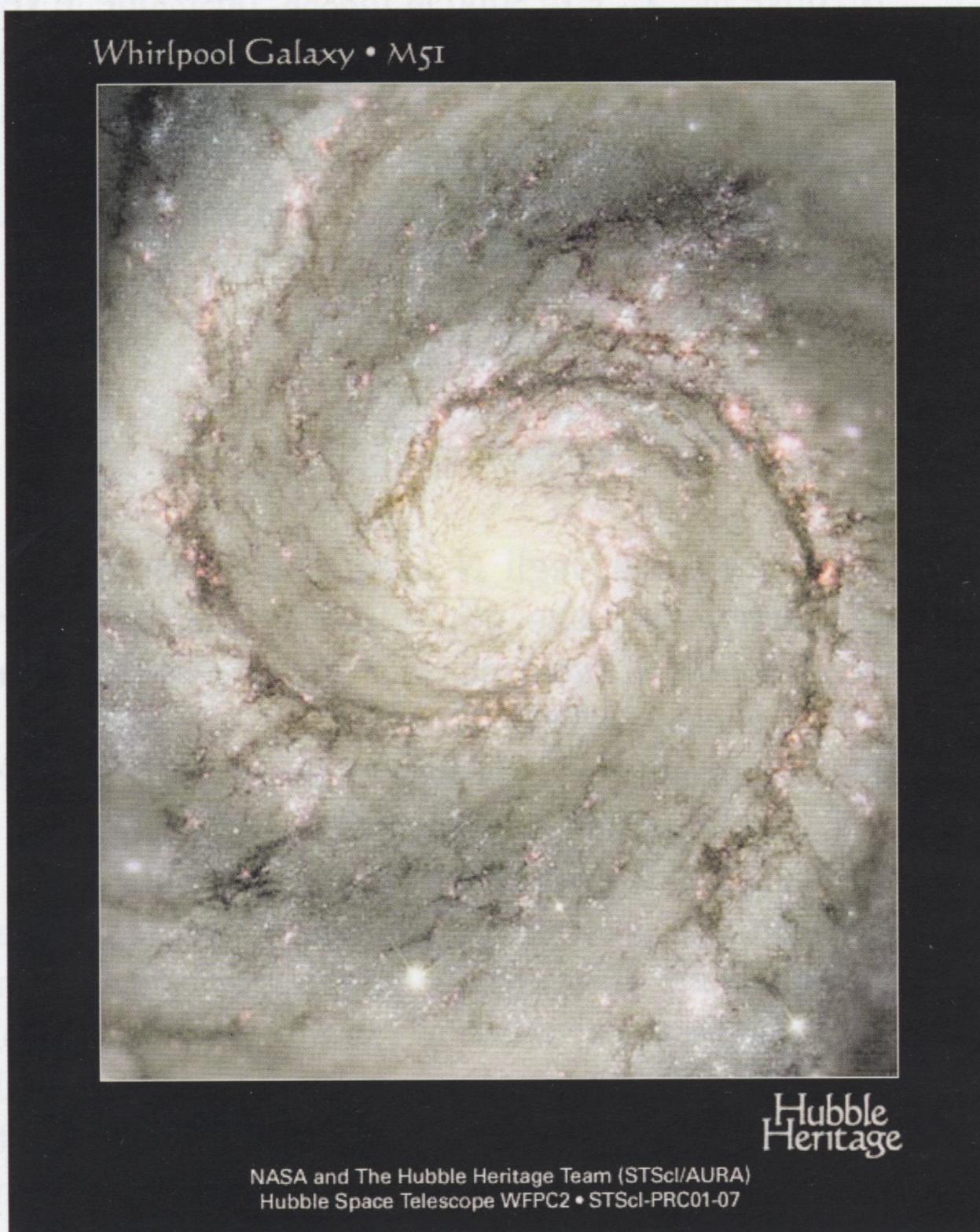


Fig. 3. – La galassia a spirale M51. Si noti l'impressionante struttura dei bracci a spirale, solcati da bande di polvere scura. La nostra galassia, se vista da un osservatore esterno, sarebbe molto simile ad un oggetto come questo. Al centro si può chiaramente vedere il «bulge» di stelle più rosse.

le *necessità* di un approccio alternativo (invece che un attacco diretto delle equazioni differenziali del problema degli  $N$  corpi) per la risoluzione dei problemi affrontati dalla dinamica stellare, specialmente per ricavare informazioni che possano poi essere confrontate direttamente con le osservazioni.

#### 4. – Alcuni risultati generali per il problema degli $N$ corpi.

Come ben noto, per  $N \geq 3$  il problema degli  $N$  corpi non è esplicitamente risolubile in generale (ovvero, per condizioni iniziali generiche) nel significato classico del termine, ovvero, *la sua soluzione non può essere ridotta a  $6N - 1$  integrazioni indipendenti*. Nondimeno, molte importanti proprietà dei sistemi di  $N$  corpi possono essere ottenute ed esplorate analiticamente utilizzando direttamente le equazioni (5) e (6). Uno dei risultati di più semplice derivazione e più ampio utilizzo in dinamica stellare è il seguente

TEOREMA 1 [Identità di Lagrange-Jacobi]. – *In  $S_0$*

$$(7) \quad \ddot{I} = 2(2T + U) = 2(T + E) = 2(2E - U).$$

La seconda e terza identità nell'equazione (7) sono ottenute dalla prima usando semplicemente la legge di conservazione dell'energia,  $E = T + U$ , dove  $T$  è l'energia cinetica totale del sistema. La prima identità si ottiene invece derivando due volte rispetto al tempo la funzione che definisce il momento polare di inerzia del sistema in questione,  $I = \sum_{i=1}^N m_i \|\mathbf{x}_i\|^2$ . Dunque,  $\ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i (\langle \dot{\mathbf{x}}_i, \dot{\mathbf{x}}_i \rangle + \langle \mathbf{x}_i, \ddot{\mathbf{x}}_i \rangle)$ . Come può essere facilmente riconosciuto dall'equazione (5),  $U$  è una funzione omogenea di ordine  $-1$ , ed usando il teorema di Eulero per le funzioni omogenee il risultato è immediatamente provato. Il risultato appena mostrato è molto importante perché collega informazioni sull'evoluzione della struttura del sistema ( $I$ ) a grandezze dinamiche come la sua energia cinetica ( $T$ ), potenziale ( $U$ ), e totale ( $E$ ). Infatti, fondamentali stime della massima e minima separazione di due qualunque masse puntiformi (ad esempio, stelle in una galassia) che compongono un sistema di  $N$  corpi sono ottenute in funzione del momento polare di inerzia quando espresso nel sistema inerziale del baricentro  $S'$ , e dell'energia gravitazionale totale del sistema (d'ora in poi ogni grandezza caratterizzata da un apice sarà da considerarsi descritta in  $S'$ ).

TEOREMA 2. – *Nel sistema di riferimento (inerziale) baricentrico  $S'$  le seguenti disuguaglianze valgono  $\forall t$  ed indipendentemente*

dal numero di corpi del sistema:

$$(8a) \quad \frac{A}{|U(t)|} \leq r(t) \leq \frac{B}{|U(t)|},$$

$$(8b) \quad C\sqrt{I'(t)} \leq R(t) \leq D\sqrt{I'(t)},$$

dove  $A, B, C, D$  sono costanti positive che dipendono soltanto dalle masse  $m_i$  delle singole particelle.  $r(t)$  ed  $R(t)$  sono la minima e la massima distanza tra i corpi di tutte le possibili coppie del sistema. In altre parole, l'energia potenziale ed il momento di inerzia baricentrico sono una stima rispettivamente di  $r(t)$  ed  $R(t)$ .

Un caso notevolissimo in cui le stime appena ricordate giocano un ruolo di particolare interesse è rivestito dallo studio delle circostanze per cui, in linea di principio, sono possibili degli urti tra particelle, ovvero,  $r(t) \rightarrow 0$ . Qui è sufficiente ricordare che lo studio più generale delle singolarità delle equazioni differenziali che descrivono il problema degli  $N$  corpi è un campo di ricerca tuttora in rapida espansione, nonostante le sue origini risalgano al 1895, anno in cui il matematico francese Paul Painlevé (1863-1933) pubblicò un saggio fondamentale sull'argomento. In questo contesto il principale problema posto dalle equazioni (5) è il fatto che, essendo tali equazioni *non-lineari*, la loro soluzione può sviluppare singolarità *mobili*, ovvero, singolarità che dipendono dalla scelta specifica delle condizioni iniziali (si ricordi che invece equazioni differenziali lineari possono presentare soltanto singolarità *fisse*, cioè singolarità che non dipendono dalle condizioni iniziali e sono quindi di più facile identificazione e studio, dipendendo soltanto dalle singolarità dei coefficienti delle equazioni in questione). Poiché quindi non siamo ancora in grado di rispondere compiutamente a tale problema, diventa naturale porsi almeno la seguente domanda: nell'ipotesi di «buone» condizioni iniziali (ovvero, assenza di collisioni e/o velocità infinite per  $t = 0$ ), è possibile dare almeno una stima di un tempo minimo tale che, per tempi minori, si possa escludere con certezza il verificarsi di collisioni? La risposta è affermativa, ma sfortunatamente le stime sono molto povere, ovvero, i tempi minimi stimati con i metodi conosciuti

risultano in generale molto più brevi del tempo necessario per un'eventuale collisione. Infine, un'altra importante questione sollevata dallo studio delle singolarità è la loro classificazione. Una volta introdotta la seguente

DEFINIZIONE 1. – *Le singolarità che possono svilupparsi in un sistema di  $N$  corpi sono definite come segue:*

- I) *Collisioni:*  $\lim_{t \rightarrow t_{\text{sing}}} r = 0$ ;
- II) *Pseudo-collisioni:*  $\liminf_{t \rightarrow t_{\text{sing}}} r = 0$  &  $\limsup_{t \rightarrow t_{\text{sing}}} r > 0$ ;
- III) «*Blow-up*»:  $\lim_{t \rightarrow t_{\text{sing}}} R = \infty$ , con  $t_{\text{sing}} < \infty$ .

valgono i seguenti risultati (si veda, ad esempio, [7]):

TEOREMA 3.

- I) *Per  $N = 3$  tutte le singolarità sono collisioni.*
- II) *Se  $I' = O(1)$  per  $t \rightarrow t_{\text{sing}}$ , allora la singolarità è una collisione.*
- III) *Se le  $N$  particelle sono su una linea retta, allora tutte le singolarità sono collisioni.*
- IV) *Una singolarità a  $t_{\text{sing}}$  è una collisione se e solo se  $U = O[(t - t_{\text{sing}})^{-2/3}]$ .*
- V) *L'insieme delle condizioni iniziali che conducono a una collisione in un tempo finito ha misura (di Lebesgue) nulla.*

Concludiamo questa breve sezione riguardante le singolarità del problema degli  $N$  corpi con un bel risultato:

TEOREMA 4 [Weierstrass-Sundman]. – *Il collasso globale<sup>(1)</sup> di un sistema di  $N$  corpi può verificarsi soltanto in un tempo finito (ovvero,  $t_{\text{sing}} < +\infty$ ) e solo nel caso di momento angolare totale (baricentrico) nullo,  $L' = 0$ .*

<sup>(1)</sup> «Collasso globale» significa che le mutue distanze tra tutte le particelle vanno a zero contemporaneamente, ovvero,  $\lim_{t \rightarrow t_{\text{sing}}} I'(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow t_{\text{sing}}} U = -\infty$ , dove  $I'$  è il momento polare d'inerzia baricentrico.

Un tentativo diverso di approccio alla soluzione del problema degli  $N$  corpi consiste non tanto nell'indagine delle singolarità delle soluzioni più o meno generali, quanto invece nella costruzione di *soluzioni particolari* esatte. Infatti, sotto determinate circostanze (simmetrie), il problema degli  $N$  corpi può essere risolto esplicitamente. Eulero e Lagrange hanno esplorato in questo senso il problema dei 3 corpi, mentre il problema più generale è ancora attivamente studiato. Queste soluzioni simmetriche sono di particolare interesse, perché sono le uniche che possono essere studiate in ogni dettaglio. Il lettore ad esse interessato potrà trovare molti più risultati (con le dimostrazioni) di quelli qui di seguito riportati, in [7] ed [8]. Iniziamo con la fondamentale

**DEFINIZIONE 2.** – *Nel sistema di riferimento (inerziale) baricentrico  $S'$  una soluzione del problema degli  $N$  corpi è detta:*

I) *planare, se esiste un piano  $\Pi$  con una giacitura indipendente dal tempo che contiene tutte le particelle a tutti i tempi;*

II) *piatta, se esiste un piano  $\Pi(t)$  che contiene tutte le particelle ad ogni tempo;*

III) *sigiziale al tempo  $t_0$ , se per  $t = t_0$  le  $N$  particelle sono tutte allineate sulla stessa retta;*

IV) *rettilenea, se esiste una linea retta  $A$  con una direzione indipendente dal tempo che contiene tutti i corpi a tutti i tempi;*

V) *collineare, se esiste una linea retta  $A(t)$  che contiene tutte le particelle a tutti i tempi;*

VI) *omografica, se esiste una funzione scalare  $\lambda(t) \geq 0$  ed una matrice ortogonale  $\mathcal{R} \in SO(3)$  cosicché  $\forall t$  la posizione di ciascuna particella è collegata alla sua posizione iniziale da*

$$(9) \quad \mathbf{x}_i = \lambda(t) \mathcal{R}(t) \mathbf{x}_i^0;$$

VII) *omotetica, se nell'equazione (9)  $\mathcal{R}$  è la matrice identità per tutti i tempi;*

VIII) di equilibrio relativo, se nell'equazione (9)  $\lambda(t) = 1$  per tutti i tempi;

IX) una configurazione centrale, se esiste una funzione scalare  $\sigma(t) \geq 0$  tale che

$$(10) \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} = \sigma(t) m_i \mathbf{x}_i;$$

$\forall t$  ed  $i = 1, \dots, N$ .

I seguenti risultati sono riportati senza dimostrazione:

TEOREMA 5.

I) Se la soluzione è planare ed  $\mathbf{L}' \neq 0$ , il piano  $\Pi$  coincide con il piano invariabile, ovvero col luogo dei punti perpendicolari ad  $\mathbf{L}'$ .

II) Una soluzione planare può comunque esistere anche per  $\mathbf{L}' = 0$ .

III) Se  $\mathbf{L}' = 0$ , allora ogni soluzione piatta è planare.

IV) Ogni soluzione planare è piatta.

V) Non ogni soluzione piatta è planare (come esempio banale si noti che la soluzione generale del problema dei 3 corpi è necessariamente sempre piatta).

VI) Dai punti III) e V) segue che ogni soluzione del problema dei 3 corpi con  $\mathbf{L}' = 0$  è planare.

VII) Se esiste il piano invariabile (ovvero, se  $\mathbf{L}' \neq 0$ ), allora ogni configurazione sigiziale è contenuta nel piano invariabile.

VIII) Ogni soluzione rettilinea è collineare.

IX) Ogni soluzione collineare è piatta.

X) Ogni soluzione collineare è planare [infatti, se  $\mathbf{L}' \neq 0$ , dal punto VII) la linea retta  $\Lambda(t)$  giace sul piano invariabile  $\forall t$ , ed il problema pertanto è planare: se  $\mathbf{L}' = 0$ , dai punti III) and IX), la soluzione deve essere planare].

È qui importante ricordare che le soluzioni più importanti dal punto di vista fisico sono certamente le soluzioni omografiche e le

configurazioni centrali: per esempio, le celebrate soluzioni collineari (Eulero-Lagrange) e planari (triangolare equilatera, Lagrange) del problema degli  $N$  corpi sono tutte omografiche. Ricordiamo inoltre che tali soluzioni, lungi dall'essere delle «semplici» curiosità matematiche, per l'astronomo rivestono una grande importanza, essendo realizzate in natura nel nostro sistema solare da famiglie di asteroidi nel campo di gravità del Sole e di Giove. Mostriamo qui il risultato forse più importanti concernente il tipo di soluzioni appena discusso, ovviamente omettendone la dimostrazione.

TEOREMA 6 [Teorema di Laplace]. – *Una soluzione del problema degli  $N$  corpi è omografica se e solo se è una configurazione centrale.*

Un altro interessantissimo campo di indagine concernente il problema degli  $N$  corpi riguarda la *natura asintotica* (ovvero, la natura per  $t \rightarrow \infty$ ) delle soluzioni. I teoremi relativi a questo settore di studio sono estremamente tecnici (per un breve sommario il lettore interessato è ancora una volta invitato a consultare [7] ed [8]): comunque, data la loro importanza per la matematica e la fisica, presentiamo qui brevemente uno di tali enunciati, in maniera tale da trasmettere al lettore un'idea del «tipo» di risultati di cui stiamo parlando.

TEOREMA 7 [Minima e massima distanza tra particelle]. – *Nel problema generale degli  $N$  corpi,*

I) *Per un'energia totale baricentrica  $E' < 0$ , esiste una costante positiva  $A$  tale che  $r(t) \leq A \forall t$ .*

II) *Nel caso in cui  $E' = 0$ ,  $r(t) = O(t^{2/3})$  ed esiste una costante positiva  $A$  tale che  $R(t) \geq At^{2/3}$  per  $t \rightarrow \infty$ .*

III) *Finalmente, per  $E' > 0$ ,  $r(t) = O(t)$  ed esiste una costante positiva  $A$  tale che  $R(t) \geq t$  per  $t \rightarrow \infty$ .*

Il punto I) qui sopra significa che quando  $E' < 0$  la minima tra le distanze relative tra le varie particelle  $r(t)$  rimane limitata, mentre niente può essere affermato riguardo alla massima tra le distanze

relative tra le particelle,  $R(t)$  (e questo ci ricorda che, a differenza del problema dei due corpi, un'energia baricentrica totale negativa *non* è condizione sufficiente per impedire la fuga di una particella da un sistema di  $N$  corpi quando  $N \geq 3$ ). Il punto II) significa che  $r(t)$  non può crescere più velocemente di  $t^{2/3}$  (e può naturalmente rimanere limitata) quando  $E' = 0$ ; all'opposto,  $R(t)$  non può crescere più lentamente di  $t^{2/3}$ , ovvero, in un sistema di  $N$  corpi con energia baricentrica totale nulla, almeno una particella deve sfuggire dal sistema. Dal punto III) segue infine che, quando  $E' > 0$ ,  $r(t)$  non può aumentare più velocemente di  $t$  (e può anche rimanere limitata), mentre  $R(t)$  non può crescere più lentamente di  $t$ : almeno una particella deve sfuggire da un sistema di  $N$  corpi con energia totale baricentrica positiva. Infine, si noti che i punti II) and III) implicano che  $E' < 0$  è una condizione *necessaria* affinché tutte le distanze relative  $r_{ij}(t)$  rimangano limitate a tutti i tempi.

Prima di concludere questa discussione, ricordiamo infine un diverso tipo di risultati esatti sul problema degli  $N$  corpi, basati sul fondamentale concetto di *viriale*: tali risultati non riguardano tanto il comportamento delle singole orbite, quanto *proprietà globali* del sistema stesso:

DEFINIZIONE 3 [Sistema autogravitante virializzato]. – *Un sistema di  $N$  corpi si dice autogravitante se il potenziale gravitazionale totale sotto l'azione del quale si muovono le particelle è determinato dalle particelle stesse attraverso l'equazione (5). Un sistema di  $N$  corpi autogravitante si dice virializzato se nel sistema inerziale baricentrico  $S'$*

$$(11) \quad 2T' = -U > 0, \quad \forall t.$$

Si possono abbastanza facilmente mostrare i seguenti risultati:

TEOREMA 8. – *Un sistema di  $N$  corpi è virializzato se e solo se*

$$(12) \quad \frac{dI'}{dt} = 0,$$

dove  $I'$  è il momento polare d'inerzia nel sistema del baricentro.

*Inoltre, se un sistema autogravitante di  $N$  corpi è virializzato, allora*

$$(13) \quad E' < 0 .$$

*Infine, un sistema autogravitante di  $N$  corpi è virializzato se e solo se*

$$(14) \quad T' = T'(0); \quad U = U(0);$$

*ed esistono due costanti positive  $A$  e  $B$  tali che*

$$(15) \quad A \leq r_{ij}(t) \leq B \quad (\forall i, j = 1, \dots, N \ \& \ i \neq j).$$

In realtà, è possibile dare una definizione notevolmente più generale di sistema virializzato:

DEFINIZIONE 4. – *Sia  $A = A(t)$  una funzione localmente integrabile per  $t > 0$  si ponga*

$$(16) \quad \langle A \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t A(\tau) d\tau$$

*esiste. Se inoltre  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle A \rangle_t$  esiste, il limite viene indicato con  $\langle A \rangle_\infty$ , ed è chiamato media temporale di  $A$ .*

TEOREMA 9 [Viriale in media temporale]. – *Per un sistema autogravitante di  $N$  corpi le seguenti identità sono equivalenti*

$$(17) \quad 2\langle T' \rangle_\infty = -\langle U \rangle_\infty,$$

$$(18) \quad \dot{I}'(t) = o(t), \quad \text{for } t \rightarrow \infty .$$

Si noti che, se un sistema di  $N$  corpi è virializzato, allora è necessariamente virializzato anche in media temporale, ma il viceversa non è ovviamente vero in generale.

DEFINIZIONE 5. – *Per un sistema virializzato, la dispersione di velocità viriale  $V_V$  e il raggio viriale  $r_V$  sono definiti come:*

$$(19) \quad \frac{M_{\text{gal}} V_V^2}{2} = T', \quad \frac{GM_{\text{gal}}^2}{r_V} = |U|.$$

*Dunque, nelle nuove variabili*

$$(20) \quad V_V^2 = \frac{GM_{\text{gal}}}{r_V}.$$

Tale relazione è di centrale importanza in dinamica stellare (e non solo), in quanto permette di poter «pesare» una galassia (ovvero, stimare  $M_{\text{gal}}$ ) una volta che si abbiano informazioni sulle velocità caratteristiche delle stelle al suo interno ( $V_V$ ) e sulle sue dimensioni caratteristiche ( $r_V$ ). In questa maniera si è mostrato che nell'universo potrebbe esistere una quantità di materia molto maggiore di quella visibile, che non avrebbe altri effetti se non quello di produrre campi gravitazionali (la cosiddetta «materia oscura»): *tutte le ricerche condotte fino ad ora non sono però state in grado di identificare i componenti di tale materia oscura, e possiamo dire senza tema di smentita che questo è uno dei problemi più importanti affrontati dall'astrofisica contemporanea, anche per i suoi collegamenti con l'origine ed il destino ultimo dell'universo.*

## 5. – Il tempo di rilassamento a due corpi.

Come dovrebbe risultare chiaro, nonostante gli importanti risultati raggiunti nella trattazione del problema degli  $N$  corpi, tali risultati sono tuttavia troppo generali per poter essere di grande aiuto quando si cerchi di arrivare ad una comprensione dettagliata dei sistemi stellari reali. È quindi necessario introdurre tecniche più potenti per proseguire l'indagine che ci siamo proposti. Un intero ramo della dinamica stellare si occupa di questo problema, ed uno dei più fecondi mezzi d'indagine teorica si è mostrato essere la sostituzione del «discreto» (gli  $N$  corpi) con vari tipi di «continuo» (di cui parleremo brevemente più avanti): qui è sufficiente ricordare che,

come ci si aspetta, la trattazione continua del problema fa sì che in questo nuovo ambito di lavoro le equazioni differenziali che descrivono il sistema non siano più equazioni differenziali *ordinarie* come le (5), ma equazioni differenziali alle *derivate parziali*.

Uno dei capisaldi su cui si basa questo passaggio di approccio, e che, nonostante l'aspetto apparentemente tecnico riveste un ruolo centrale nel caratterizzare l'evoluzione e la struttura di sistemi stellari, è il loro *tempo di rilassamento a due corpi*. L'introduzione di tale concetto può essere (ovviamente) motivata in molte maniere diverse, alcune molto sofisticate (collegate ad esempio alla teoria delle equazioni differenziali stocastiche e ad argomenti di meccanica statistica), altre molto più fenomenologiche, che hanno però il merito di



Fig. 4. – La galassia a disco NGC 1512. Si noti l'anello più esterno di colore bluastrò, sintomo di una formazione stellare recente.

rendere più intuitivo il concetto medesimo e di portare a stime sufficientemente corrette per le applicazioni pratiche in astrofisica. Qui illustreremo brevemente il concetto e ne metteremo in risalto le implicazioni più importanti.

Da un punto di vista «generale» possiamo dire che la motivazione tecnica che spinge all'introduzione del concetto di tempo di rilassamento è il tentativo di capire sotto quali condizioni sia possibile sostituire *allo studio delle equazioni del moto di  $N$  corpi nel potenziale da loro generato, lo studio del moto di una particella campione nel potenziale generato da un «fluido» materiale che rappresenta l'approssimazione continua del sistema di  $N$  corpi medesimo.* Tale concetto può a prima vista sembrare artificioso, ma, come detto sopra, è invece profondamente motivato. Da un punto di vista tecnico ci si chiede in altre parole sotto quali condizioni sia possibile sostituire lo *spazio delle fasi  $\Gamma$*  del sistema ad  $N$  corpi (che possiamo identificare per semplicità con  $\mathfrak{R}^{6N}$ ), con lo spazio delle fasi  $\gamma$  (identificato con  $\mathfrak{R}^6$ ). Da un punto di vista «pratico» tale riduzione può essere operata per sistemi caratterizzati da un valore «molto grande» di un certa quantità fisica, detta appunto *tempo di rilassamento a due corpi*. Il punto di partenza per questa riduzione di dimensionalità è la sostituzione del sistema *discreto* di  $N$  corpi con una distribuzione *continua* di densità in  $\mathfrak{R}^3$ , che indicheremo come  $\varrho(\mathbf{x}; t)$ . *Tale distribuzione continua di densità, che dovrà rappresentare una descrizione soddisfacente del sistema originale, può a prima vista sembrare un concetto estremamente inadeguato alla descrizione di un sistema come una galassia, dove le distanze tra le stelle sono enormi quando confrontate con le loro dimensioni caratteristiche, eppure dalla nostra analisi risulterà che le galassie possono essere trattate in maniera ottimale come un «continuo».*

Alla nostra densità  $\varrho$  è associato, attraverso l'equazione di Poisson  $\Delta\phi = 4\pi G\varrho$ , un potenziale gravitazionale «continuo» dato da

$$(21) \quad \phi(\mathbf{x}; t) = -G \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{\varrho(\mathbf{x}'; t) d^3 \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}.$$

Fintanto che saremo nelle condizioni (ancora da determinarsi) nelle

quali vale la nostra approssimazione continua per  $\varrho$ , il moto di ogni particella nel nostro sistema potrà considerarsi determinato soltanto dal potenziale  $\phi(\mathbf{x}; t)$ , attraverso l'equazione

$$(22) \quad \ddot{\mathbf{x}} = - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}.$$

Si noti che tale potenziale dipenderà, in generale, anche dal tempo, in quanto il sistema non sarà in genere stazionario (ovvero, all'equilibrio). Sotto queste stesse condizioni sarà quindi possibile operare la riduzione di dimensionalità dello spazio delle fasi, da  $6N$  a 6.

Il problema principale posto da questa sostituzione è che, in realtà, in un dato sistema di  $N$  corpi ogni particella si muove sotto l'azione del potenziale vero  $\phi_N$ , che per la particella generica  $i$  è dato da

$$(23) \quad \phi_N(\mathbf{x}_i, t) = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|}.$$

Il nostro problema può quindi essere riformulato come segue: per un certo lasso di tempo  $t$  a partire dalle condizioni iniziali del sistema, quanto grande è la differenza tra l'orbita descritta da una particella generica sotto l'influenza del campo di forza derivato dal potenziale  $\phi$  rispetto all'orbita vera descritta sotto l'azione di  $\phi_N$ ? O, posto in maniera diversa, poiché possiamo scrivere  $\phi_N = \phi + (\phi_N - \phi)$ , quanto tempo dovrà trascorrere affinché il termine di «granularità»  $(\phi_N - \phi)$  cambi significativamente l'orbita di una particella generica quando considerato come perturbazione all'orbita percorsa sotto l'azione di  $\phi$ ? Naturalmente, è possibile esprimere in maniera tecnicamente corretta le domande che ci siamo appena posti, ma come già detto, qui proseguiremo con una descrizione volutamente qualitativa. In ogni caso, è ovvio notare che la risposta esatta alla precedente domanda potrebbe essere data soltanto nell'ipotesi (ovviamente falsa) di conoscere entrambe le orbite, ma questa è esattamente la difficoltà che stiamo tentando di evitare!

In dinamica stellare, per rispondere alla domanda appena formulata, si stima (in maniera più o meno rigorosa), il *tempo di rilassamento a due corpi*, ovvero la scala temporale caratteristica oltre la

quale l'approssimazione continua appena descritta perde la sua validità. Un approccio fenomenologico per ottenere la stima cercata può essere basato su due assunzioni (chiaramente false):

I) Tutti gli incontri tra le particelle sono trattati come incontri *indipendenti*, ovvero, l'effetto di ogni passaggio «ravvicinato» tra due stelle è semplicemente *sommato* a quello degli altri incontri,

II) Tutti gli incontri tra le stelle sono trattati come *problemi dei due corpi iperbolici*.

Esattamente per questi due motivi, il tempo caratteristico ottenuto è chiamato *tempo di rilassamento a due corpi*, ed indicato con  $t_{2b}$ . Un sistema gravitazionale (come una galassia) in cui l'effetto cumulativo di questi incontri sia trascurabile viene detto *non collisionale*, mentre, nel caso contrario, *collisionale*. Si noti che in questa terminologia non ci stiamo riferendo ad urti fisici tra stelle che sono, come abbiamo visto, (quasi) sempre trascurabili in sistemi astrofisici reali, ma soltanto a «passaggi ravvicinati». Chiaramente, sistemi reali di  $N$  corpi, quando osservati per tempi sufficientemente lunghi, sono sempre, strettamente parlando, collisionali. Nondimeno, faremo vedere che modelli di galassie basati sull'ipotesi di perfetta non collisionalità sono di estrema importanza nella comprensione di sistemi reali come le galassie. Per ottenere tale risultato è necessario introdurre il concetto fondamentale di *funzione di distribuzione*:

DEFINIZIONE 6 [Funzione di distribuzione]. – La funzione di distribuzione  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$  di un sistema di  $N$  corpi è una funzione *non negativa*  $f : \gamma \mapsto \mathfrak{R}^+ \cup 0$  definita dalla proprietà che

$$(24) \quad \Delta M(\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{v}; t) = \int_{\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{v}$$

è la massa totale di particelle che al tempo  $t$  è contenuta nel volume 6-dimensionale  $\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{v} \subseteq \gamma$ . Ovviamente,

$$(25) \quad \Delta M(\gamma; t) = \int_{\gamma} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{v} = M.$$

In altre parole, fissata una posizione  $\mathbf{x}$  in una galassia, ed una ve-

locità  $\boldsymbol{v}$ , l'integrale della  $f$  nel volume 6-dimensionale  $\Delta\boldsymbol{x}\Delta\boldsymbol{v}$  attorno ad  $\boldsymbol{x}$  e  $\boldsymbol{v}$  ci dice qual è la massa totale di stelle che si trovano in tale «volume».

Siamo adesso in grado di quantificare il concetto di tempo di rilassamento a due corpi  $t_{2b}$ . Una possibilità è quella di calcolare separatamente per ogni incontro la variazione di energia  $|\Delta E|$  della particella di prova, e confrontare l'effetto cumulativo di tutti gli incontri con l'energia iniziale della particella,  $E_0$ . Dopo un numero di incontri tale che la variazione totale di energia è uguale all'energia iniziale, si dice che per il sistema in questione è passato un *tempo di rilassamento*. In altre parole,  $t_{2b}$  è definito come il tempo necessario affinché  $\sum |\Delta E|$  sia uguale all'energia iniziale di una stella generica. Sotto le ipotesi fatte sopra, ed usando il concetto di funzione di distribuzione, questo argomento può essere quantificato calcolando la variazione totale di energia di una particella di prova come conseguenza delle interazioni a due corpi in *un attraversamento* del sistema:

$$(26) \quad \sum_{\gamma} |\Delta E| = \int n(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{v}^0) |\Delta E| d^3\boldsymbol{x}^0 d^3\boldsymbol{v}^0.$$

Definiamo adesso il tempo di rilassamento  $t_{2b}$ . Se ciascun attraversamento del sistema richiede un tempo  $t_{\text{cross}}$ , allora dalla definizione  $t_{2b}$  è dato da

$$(27) \quad t_{2b} = n_{2b} \times t_{\text{cross}},$$

dove, per definizione, il *numero di attraversamenti*  $n_{2b}$  necessari per il «rilassamento» della particella (generica) di test è dato da

$$(28) \quad \frac{n_{2b} \sum |\Delta E|}{E_0} = 1, \quad \text{i.e.} \quad n_{2b} = \frac{E_0}{\sum |\Delta E|}.$$

Si può provare che una stima asintotica (ovvero, per  $N \rightarrow \infty$ ) del tempo di rilassamento a due corpi in un sistema autogravitante è data da

$$(29) \quad t_{2b} \sim \frac{0.1 N_* t_{\text{cross}}}{\ln N_*}.$$

Si noti come  $t_{2b}$  aumenti (abbastanza controintuitivamente) *all'aumentare di  $N_*$*  (si potrebbe essere infatti portati a pensare che al-

l'aumentare del numero di particelle l'effetto degli urti dovrebbe farsi *più* importante, non *meno*!).

Come applicazione astrofisica, consideriamo una galassia tipica, con  $N_* \approx 10^{11}$  e  $t_{\text{cross}} \approx 2 \times 10^8$  anni: il tempo di rilassamento a due corpi per tale sistema risulta dell'ordine di  $10^{15 \div 16}$  anni, ovvero, *milioni di volte più lungo dell'età dell'universo!*. Quindi le galassie sono a tutti gli effetti perfetti esempi di sistemi *non collisionali* su tempi scala dell'ordine della vita dell'universo. Al contrario, per i sistemi stellari conosciuti come *ammassi globulari*, dove  $N_* \approx 10^6$  e  $t_{\text{cross}} \approx 10^6$  anni,  $t_{2b} \approx 5 \times 10^9$  anni, più breve dell'età dell'Universo (che possiamo assumere con buona approssimazione dell'ordine di  $\approx 10^{10}$  anni. Per sistemi di quest'ultimo tipo ci si aspetta che gli effetti cumulativi dovuti alle interazioni a due corpi siano importanti per la loro evoluzione, ed infatti questa conclusione è confermata sia dalle simulazioni numeriche che dalle osservazioni. La fisica (e la matematica) che descrive l'evoluzione di sistemi gravitazionali su scale temporali più lunghe del loro tempo di rilassamento a due corpi è incredibilmente affascinante, ma sfortunatamente per motivi di spazio non potremo qui affrontarne neanche una descrizione qualitativa.

## 6. – Sistemi stellari in regime non collisionale.

Nella discussione precedente abbiamo ottenuto indicazioni che, aumentando il numero di particelle in un sistema dominato dalle forze gravitazionali, l'approssimazione non collisionale (ovvero, la sostituzione del sistema vero - discreto - con la sua approssimazione continua, e la conseguente riduzione della dimensionalità dello spazio delle fasi associato), è realizzata con sempre migliore approssimazione su tempi scala sempre più lunghi. Nel limite ideale di  $N_* \rightarrow \infty$  (ovvero, nel caso di un «continuo non collisionale») ci aspettiamo che l'approssimazione non collisionale sia verificata per ogni tempo. Cosa possiamo dire sull'evoluzione di un sistema puramente non collisionale? Una naturale considerazione porta a ritenere che lo strumento per descrivere l'evoluzione di un sistema non collisionale sia un'equazione differenziale alle derivate parziali per la funzione di distribuzione del sistema. Infatti, ricordiamo che la funzione

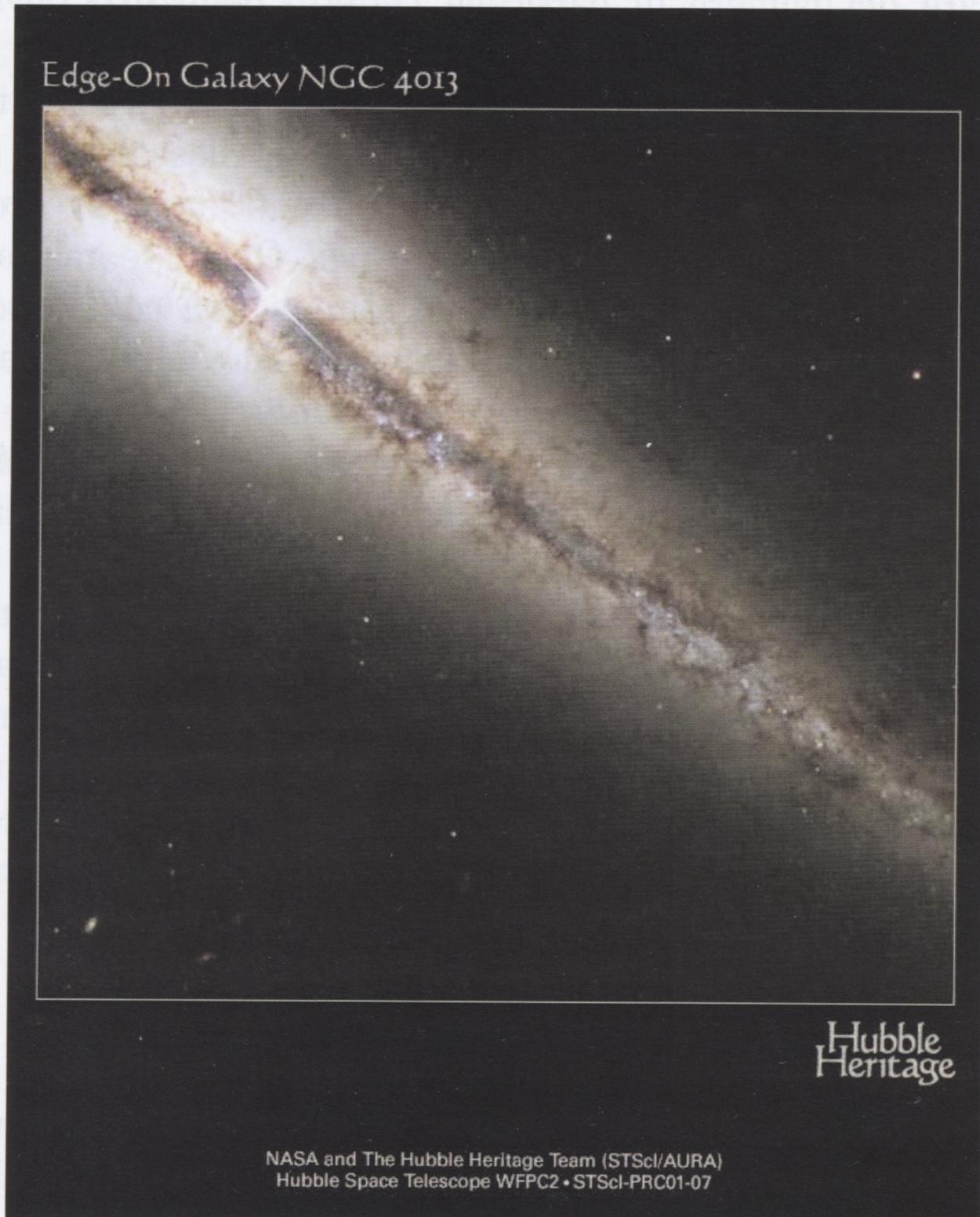


Fig. 5. – Parte della galassia a disco NGC 4013. Per la sua orientazione rispetto alla nostra galassia tale sistema stellare è visto quasi perfettamente «di taglio», ed il disco stellare è visibile in tutta la sua magnificenza. Si noti il grande quantitativo di polvere interstellare, che appare come una banda nera che solca il disco.

di distribuzione contiene le informazioni complete sulle velocità e le posizioni di tutte le particelle del sistema ad ogni tempo, ed è quindi ragionevole ritenere che la sua evoluzione sia determinata dalla funzione di distribuzione medesima.

Per amore di generalità (ed anche per realismo astrofisico)

nella seguente discussione assumiamo che, oltre al potenziale  $\phi$  associato alla densità continua  $\varrho$  (equazione [21]), sia presente anche un *potenziale esterno*  $\phi_{\text{ext}} = \phi_{\text{ext}}(\mathbf{x}; t)$  (un potenziale cioè generato da una distribuzione di densità distinta dal sistema considerato, come ad esempio una distribuzione di gas o di materia oscura: si noti che le due densità saranno in genere spazialmente sovrapposte). In altre parole, da un punto di vista tecnico assumiamo che ogni elemento di volume di spazio delle fasi  $\gamma$  si muova sotto l'azione di un campo di forza generato dal potenziale totale  $\phi_{\text{T}} = \phi + \phi_{\text{ext}}$  (quando  $\phi_{\text{ext}} = 0$  il sistema è allora *autogravitante*). Ci sono vari approcci alla derivazione dell'equazione differenziale cercata, alcuni molto tecnici, altri basati molto di più su considerazioni di carattere fenomenologico. Diamo qui semplicemente tale equazione, conosciuta in dinamica stellare col nome di *equazione non collisionale di Boltzmann*:

TEOREMA 10 [Equazione non collisionale di Boltzmann]. – *Nel regime non collisionale la funzione di distribuzione evolve secondo la seguente equazione:*

$$(30) \quad \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left\langle \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_{\text{T}}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0,$$

dove

$$(31) \quad \Delta \phi(\mathbf{x}; t) = 4\pi G \int_{\mathfrak{R}^3} f d^3 \mathbf{v},$$

con

$$(32) \quad \phi_{\text{ext}} = \phi_{\text{ext}}(\mathbf{x}; t), \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; 0) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

L'equazione non collisionale di Boltzmann è quindi un'equazione alle derivate parziali del primo ordine di tipo quasi-lineare, e pertanto la sua soluzione in linea di principio può essere ottenuta con il *metodo delle caratteristiche*. In questo caso le caratteristiche sono date

dalle soluzioni del sistema associato all'equazione (30):

$$(33) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial \phi_T}{\partial \mathbf{x}}, \end{cases}$$

con condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$  e  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0$ . In altre parole, le caratteristiche associate all'equazione (30), ovvero le curve nello spazio delle fasi esteso tramite le quali la funzione di distribuzione  $f$  si «propaga» in tale spazio, sono note una volta che si sappiano risolvere le equazioni differenziali ordinarie sopra riportate. Si noti come la dimensionalità dello spazio in cui si devono effettuare i calcoli è adesso ridotta a 6 dimensioni spaziali ed una temporale, *una semplificazione enorme rispetto al problema originario, ottenuta dall'ipotesi di non collisionalità*.

Sfortunatamente, le conoscenze matematiche attuali non sono ancora sufficienti per avere una comprensione completa delle orbite percorse nello spazio 3 dimensionale sotto l'azione di un potenziale generico dipendente dal tempo (o addirittura stazionario, ovvero indipendente dal tempo!). Di conseguenza, *il problema posto dalla soluzione generale dell'equazione non collisionale di Boltzmann è ancora in generale irrisolto*: in altre parole, anche l'ipotesi di non collisionalità non è ancora abbastanza forte da un punto di vista puramente matematico da permettere la costruzione di un modello di galassia nel caso generale. Come conseguenza del risultato negativo sopra accennato, ci sposteremo adesso alla discussione di alcuni metodi sviluppati per *estrarre informazioni* dall'equazione non collisionale di Boltzmann. Tali metodi possono essere suddivisi, con accettabile approssimazione in questa trattazione, in due grandi categorie: quelli per estrarre informazioni dall'equazione (30) nel suo caso generale (il cosiddetto *metodo dei momenti*), e quelli mirati alla costruzione di soluzioni esatte in casi particolari (in genere sotto l'ipotesi aggiuntiva di stazionarietà). Naturalmente i risultati più interessanti si ottengono nei casi in cui i due metodi possono essere utilizzati insieme: *in questi casi saremo autorizzati a ritenere di avere un modello accettabile per la dinamica delle stelle all'interno di*

*una galassia.* L'idea che sta alla base del metodo dei momenti è di costruire (in maniera rigorosa, ed a partire dall'equazione non collisionale di Boltzmann), delle equazioni differenziali più semplici dell'equazione (30). Tali equazioni (che per motivi storici sono dette *equazioni di Jeans*), descrivono le relazioni che intercorrono fra alcune funzioni chiamate appunto «momenti» della funzione di distribuzione sullo spazio delle velocità. Si possono poi usare le equazioni di Jeans come punto di partenza sul quale sviluppare un ulteriore insieme di equazioni dei momenti, definiti questa volta sullo spazio delle configurazioni, che costituiscono la gerarchia delle *equazioni viriali in forma tensoriale*.

Prima di continuare è comunque opportuno sottolineare come l'equazione non collisionale di Boltzmann sia modificabile, attraverso l'introduzione di un *termine di sorgente*, per descrivere sistemi in regime «debolmente collisionale» (come ad esempio gli ammassi globulari):

$$(34) \quad \frac{Df}{Dt} = C[f].$$

L'operatore  $C[f]$  dipenderà in generale non soltanto dalla funzione di distribuzione al tempo  $t$ , ma anche da tutta la sua storia passata. L'interessantissima questione di come specificare la forma dell'operatore  $C[f]$  in maniera tale da «catturare» il comportamento a lungo termine (ovvero, per  $t \gg t_{2b}$ ), è di estremo interesse per il fisico ed il matematico, ma la sua trattazione esula completamente dallo scopo del presente lavoro (si veda, ad esempio, [9]).

Tutti i risultati che illustreremo d'ora in poi sono relativi a sistemi descritti in un sistema di riferimento inerziale  $S_0$ ; inoltre si usa la convenzione degli indici ripetuti. Il punto di partenza per la derivazione delle equazioni di Jeans è la seguente

DEFINIZIONE 7. – Sia  $F = F(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ ,  $F : \gamma \times \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$  una funzione microscopica (ovvero, definita sullo spazio delle fasi). Ad essa è associata la funzione macroscopica (ovvero definita sullo spazio

delle configurazioni)  $\bar{F} = \bar{F}(\mathbf{x}; t)$ ,  $\bar{F} : \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$ , data da

$$(35) \quad \bar{F}(\mathbf{x}; t) = \frac{1}{\varrho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathfrak{R}^3} F(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d^3 \mathbf{v},$$

e dove, dalla definizione di funzione di distribuzione,

$$(36) \quad \varrho(\mathbf{x}; t) = \int_{\mathfrak{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) d^3 \mathbf{v}.$$

Da un punto di vista fisico  $\bar{F}$  può quindi essere interpretata come il «valor medio» di  $F$  sopra tutte le particelle che al tempo  $t$  determinano la densità  $\varrho$  in  $\mathbf{x}$ : in questo contesto  $f$  viene interpretata come la *densità di probabilità* da usarsi come funzione peso nelle medie. Il fatto che l'integrale nella definizione (35) sia esteso su tutte le velocità equivale infatti a considerare *tutte* le particelle in quel dato volume attorno ad  $\mathbf{x}$  (si riveda la discussione intorno al significato di funzione di distribuzione).

Il punto di partenza del metodo dei momenti è la derivazione dell'equazione differenziale che descriva l'evoluzione di  $\bar{F}$ . Questa equazione è facilmente ottenuta dall'identità

$$(37) \quad \int_{\mathfrak{R}^3} F \frac{Df}{Dt} d^3 \mathbf{v} = 0,$$

diretta conseguenza dell'equazione non collisionale di Boltzmann (30). Dopo varie integrazioni per parti si arriva al seguente risultato:

**TEOREMA 11.** – *L'identità (37) è equivalente alla seguente equazione differenziale:*

$$(38) \quad \frac{\partial \varrho \bar{F}}{\partial t} + \frac{\partial \varrho \bar{F} v_i}{\partial x_i} = -\varrho \frac{\partial \phi_{\text{T}}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{F}}{\partial v_i} + \varrho \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \varrho v_i \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i},$$

dove  $\phi_{\text{T}} = \phi + \phi_{\text{ext}}$ , e

$$(39) \quad \phi(\mathbf{x}; t) = -G \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{\varrho(\mathbf{x}'; t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3 \mathbf{x}', \quad \phi_{\text{ext}}(\mathbf{x}; t) = -G \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{\varrho_{\text{ext}}(\mathbf{x}'; t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3 \mathbf{x}'.$$

Si noti come lo spazio sul quale adesso è definita la precedente

equazione non sia più 6-dimensionale, ma 3-dimensionale. Usando l'equazione generale (38), siamo adesso nella posizione di ottenere le cosiddette *equazioni di Jeans*. Per far questo si introducono alcune funzioni macroscopiche di particolare interesse in astrofisica, i

DEFINIZIONE 8 [Momenti delle velocità]. – Per  $i, j = 1, 2, 3$  si definiscono

$$(40) \quad \bar{v}_i(\mathbf{x}; t) = \frac{1}{\varrho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathfrak{R}^3} v_i f d^3 \mathbf{v} ,$$

$$(41) \quad \overline{v_i v_j}(\mathbf{x}; t) = \frac{1}{\varrho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathfrak{R}^3} v_i v_j f d^3 \mathbf{v} ,$$

$$(42) \quad \sigma_{ij}^2(\mathbf{x}; t) = \frac{1}{\varrho(\mathbf{x}; t)} \int_{\mathfrak{R}^3} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f d^3 \mathbf{v} .$$

$\bar{v}_i$  sono le componenti delle velocità medie, ed il tensore (simmetrico)  $\sigma_{ij}^2$  è il tensore di dispersione delle velocità.

Tali concetti non devono apparire ostici: si tratta in realtà delle quantità più semplici che un astronomo ricava dalle osservazioni di un sistema stellare, ovvero, se e a che velocità (ad esempio) tale sistema ruota (un caso di velocità media non nulla), e quali siano gli scarti quadratici delle velocità stellari attorno ai loro valori medi (una misura del «disordine» dei moti stellari). Dovrebbe essere quasi superfluo ricordare qui che queste medie sono chiaramente da intendersi in senso «locale»: quando diciamo che le stelle di una galassia sono caratterizzate da una velocità media in una data posizione all'interno della galassia stessa intendiamo il fatto che tutte le funzioni medie sopra definite sono funzioni della posizione e del tempo, come risulta dalla notazione usata nelle definizioni (40), (41) e (42).

Una dei più importanti momenti delle velocità per la comprensione della struttura e della dinamica delle galassie e per l'interpretazione delle osservazioni, è senza dubbio la dispersione di velocità. È

immediato mostrare che vale la seguente scomposizione:

$$(43) \quad \sigma_{ij}^2 = \overline{v_i v_j} - \overline{v_i} \overline{v_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Data la manifesta simmetria di questo tensore, esiste una matrice ortogonale di rotazione (che dipenderà nel caso generale da  $\mathbf{x}$  e  $t$ ) tale che la rappresentazione di  $\sigma_{ij}^2$  in tale sistema è diagonale. Dalla definizione stessa di  $\sigma_{ij}^2$  è immediato provare che si tratta di una matrice *positiva definita*. Questa semplice constatazione algebrica portata a rappresentarci una galassia, quando vista sotto l'aspetto cinematico, come qualcosa di abbastanza interessante: un campo continuo di densità non collisionale, caratterizzato da un campo (vettoriale) di velocità medie che varia da punto a punto ed in funzione del tempo. In aggiunta, in ogni punto è associato anche un campo tensoriale, che può essere rappresentato da un ellissoide con orientamento e lunghezza degli assi diversa da punto a punto e variabile col tempo. Questi ellissoidi (nello spazio delle velocità) sono dati dalla forma quadratica associata al tensore di dispersione delle velocità

$$(44) \quad \sigma^2 = \sigma_{ij}^2 n_i n_j, \quad (\|\mathbf{n}\| = 1),$$

e si chiamano *ellissoidi di dispersione di velocità*: una famiglia importantissima di modelli dinamici per le galassie è caratterizzata dalla seguente

DEFINIZIONE 9 [Sistemi isotropi]. – *Il tensore di dispersione delle velocità si dice isotropo se  $\forall \mathbf{x}$*

$$(45) \quad \sigma_{ij}^2(\mathbf{x}; t) = \sigma^2(\mathbf{x}; t) \delta_{ij}$$

*ovvero, l'ellissoide di dispersione delle velocità in questo caso è ovunque una sfera. Se il tensore di dispersione delle velocità non è isotropo, si dice anisotropo.*

Con le definizioni introdotte ed i risultati ottenuti possiamo scrivere le equazioni di Jeans (limitandoci ai momenti di ordine secondo), probabilmente le equazioni più utilizzate in dinamica stellare nell'interpretazione fenomenologica delle osservazioni di sistemi stellari come le galassie e gli ammassi globulari:

TEOREMA 12 [Equazioni di Jeans]. – *Limitandoci ai momenti del secondo ordine, valgono le seguenti identità:*

$$(46) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho \bar{v}_i}{\partial x_i} = \frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0.$$

$$(47a) \quad \frac{\partial \varrho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} = -\varrho \frac{\partial \phi_T}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

*L'ultima equazione può anche essere riscritta come*

$$(47b) \quad \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = \frac{D\bar{v}_i}{Dt} = -\frac{\partial \phi_T}{\partial x_i} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho \sigma_{ij}^2}{\partial x_j}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

dove  $D/Dt = \partial/\partial t + \bar{v}_i \partial/\partial x_i$ .

La letteratura basata sulle equazioni precedenti, sia per la loro applicabilità a sistemi concreti come le galassie che per le importanti implicazioni matematiche che contengono, è immensa e ricca di risultati molto belli e profondi sui quali purtroppo non è possibile so-

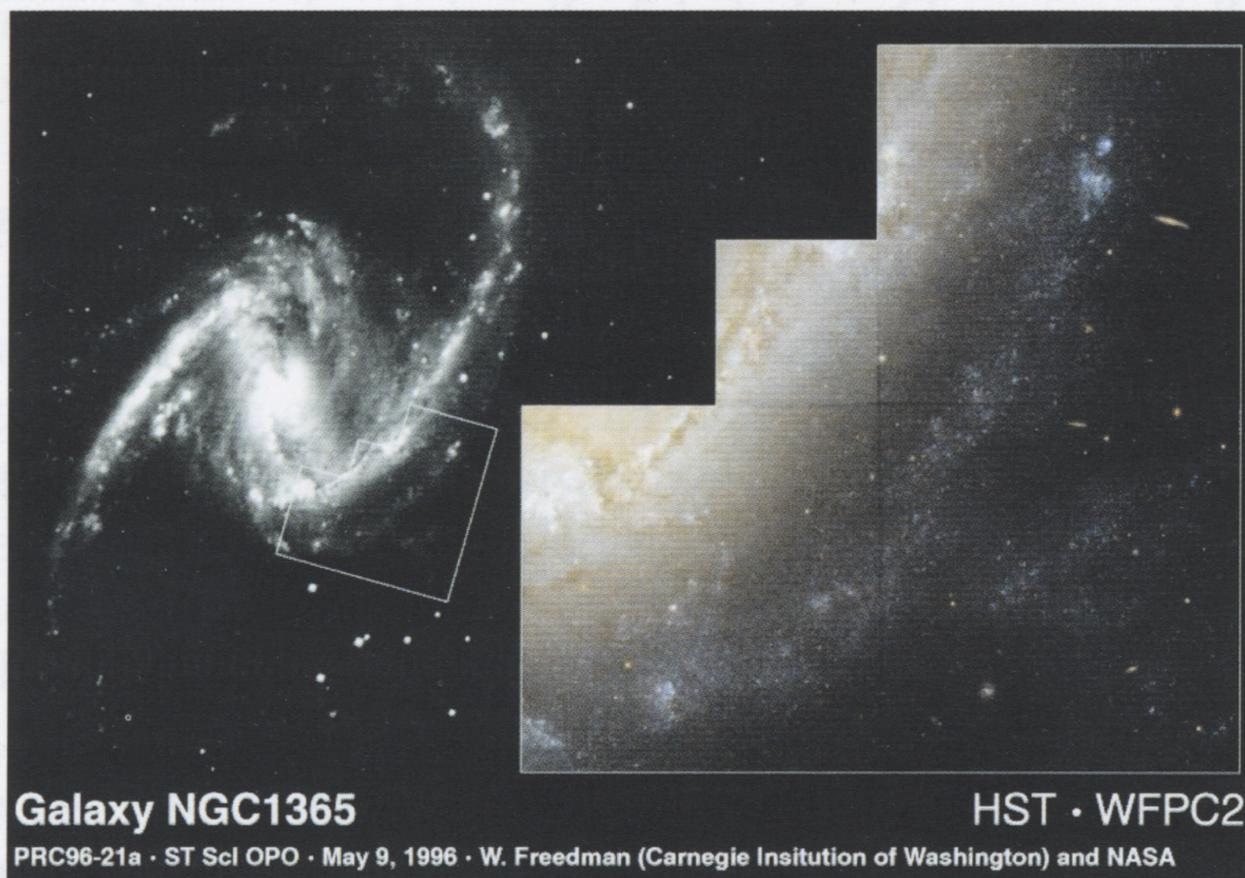


Fig. 6. – La galassia a disco barrata NGC 1365 (riquadro piccolo), ed un suo ingrandimento. La barra centrale di stelle è chiaramente visibile.

fermarsi. Una semplice considerazione fisica può però trovare qui spazio: il lettore con una conoscenza fisica di base certamente avrà constatato l'impressionante somiglianza delle equazioni di Jeans con le equazioni di *continuità* e dell'*impulso* della fluido dinamica (in presenza di un campo gravitazionale e di viscosità, ed in assenza di termini di sorgente). Questa analogia ovviamente non è casuale, poiché le equazioni della fluido dinamica possono essere derivate in totale analogia a quelle di Jeans utilizzando lo stesso strumento matematico, l'importante *teorema del Trasporto* che qui non abbiamo descritto per motivi di spazio.

Comunque, nonostante l'analogia formale, esiste una *fondamentale* differenza tra i fluidi ordinari ed il «fluido» non collisionale di cui è composta una galassia, e tale differenza è da ricercarsi proprio nella proprietà di non collisionalità. Infatti, mentre in un fluido ordinario la temperatura e la pressione sono quantità scalari associate a tensori isotropi, in generale la «temperatura» (o la «pressione») di un sistema non collisionale sono tensori anisotropi. In altre parole mentre in un comune fluido, come ad esempio un gas, gli urti tra particelle sono frequentissimi ed ogni eventuale deviazione dalla isotropia nella distribuzione dei moti quadratici delle particelle viene cancellata su tempi brevissimi dagli urti stessi, questi, per definizione, sono completamente assenti in un «gas stellare» non collisionale, che può pertanto essere più «caldo» in una direzione e più «freddo» in un'altra, come descritto dalle lunghezze degli assi del tensore di dispersione delle velocità. Questo è il motivo per cui le galassie ellittiche sono di forma ellissoidale: lungo il loro asse maggiore questi sistemi sono «più caldi» che lungo il loro asse minore. Una nube di gas con queste condizioni iniziali diventerebbe rapidissimamente di forma sferica, ridistribuendo attraverso gli urti molecolari ogni energia cinetica in «eccesso» lungo una qualsiasi direzione. In una galassia il tempo in cui questo accade è misurato in unità di tempi di rilassamento a due corpi, ovvero come abbiamo visto, tempi enormemente più lunghi delle età dell'universo stesso: *da questo punto di vista i sistemi stellari non collisionali sono come dei «fossili» che ancora ci mostrano il loro stato dinamico a seguito dei processi di formazione avvenuti circa dieci miliardi di anni fa!*

Da un punto di vista più matematico la differenza tra le equazioni di Jeans e quelle della fluido finamica si manifesta dal fatto che mentre queste ultime sono un insieme di equazioni «chiuso» (nel senso che la termodinamica provvede le relazioni di chiusura del sistema di equazioni differenziali), purtroppo le equazioni di Jeans sono un insieme «aperto» di equazioni (non esistendo in dinamica stellare relazioni termodinamiche che provvedono il numero sufficiente di relazioni per ottenerne la chiusura): le equazioni di Jeans sono quindi una «gerarchia» infinita di equazioni che coinvolgono momenti delle velocità di ordine sempre più elevato. Comunque l'importanza pratica dei momenti si riduce velocemente con il loro ordine, e possiamo dire che la quasi totalità della dinamica stellare (dal punto di vista osservativo) è attualmente circoscritta all'utilizzo dei momenti del primo e secondo ordine (anche se in alcune applicazioni molto particolari si usano anche quantità derivate dai momenti del terzo e quarto ordine). Per risolvere le equazioni di Jeans si è quindi forzati (tranne in casi specialissimi che vedremo più avanti) ad introdurre relazioni di chiusura più o meno arbitrarie, per esempio specificando il tipo di anisotropia del tensore di dispersione delle velocità. *Da questo punto di vista quindi il tentativo di aggirare la soluzione dell'equazione non collisionale di Boltzmann usando il metodo dei momenti è stato un successo solo parziale: tale approccio ha permesso una miglior comprensione delle proprietà in gioco nello stabilire la dinamica di un sistema stellare, ma la riduzione di dimensionalità ottenuta è stata ottenuta al prezzo di aver visto aumentare il numero di equazioni da una – l'equazione di Boltzmann – ad infinite, le equazioni di Jeans.* In ogni caso, le equazioni di Jeans nella loro forma generale, sono equazioni *esatte*, e possono essere usate in tutta legittimità come punto di partenza per una ulteriore riduzione di dimensionalità dello spazio su cui definire delle equazioni differenziali che descrivano relazioni tra proprietà macroscopiche delle galassie: tale riduzione si ottiene costruendo i momenti delle equazioni di Jeans sullo *spazio delle configurazioni*, in maniera analoga a come sono state ricavate le equazioni di Jeans considerando i momenti dell'equazione non collisionale di Boltzmann sullo spazio delle velocità. In tal modo si ottiene la cosiddet-

ta *gerarchia dei viriali in forma tensoriale* (si veda, ad esempio, [3] e [6]).

Senza addentrarci in calcoli complessi, ricordiamo qui le principali grandezze che entrano in questa seconda gerarchia.

DEFINIZIONE 10 [Tensore di inerzia]. – Per  $i, j = 1, 2, 3$ ,

$$(48a) \quad I_{ij}(t) = \int_{\mathfrak{R}^3} \varrho x_i x_j d^3 \mathbf{x}$$

è detto *tensore di inerzia*. La sua traccia è il *momento di inerzia*, che abbiamo già incontrato:

$$(48b) \quad I(t) = \text{Tr}(I_{ij}).$$

Inoltre, i seguenti tensori possono essere considerati come generalizzazioni del concetto di energia cinetica e potenziale:

DEFINIZIONE 11 [Tensori di energia cinetica]. – Per  $i, j = 1, 2, 3$  le quantità

$$(49) \quad K_{ij}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} \varrho \overline{v_i v_j} d^3 \mathbf{x}$$

$$(50) \quad T_{ij}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} \varrho \overline{v_i} \overline{v_j} d^3 \mathbf{x}$$

$$(51) \quad \Pi_{ij}(t) = \int_{\mathfrak{R}^3} \varrho \sigma_{ij}^2 d^3 \mathbf{x}$$

sono rispettivamente i *tensori di energia cinetica totale, ordinata, e di dispersione*. Le loro tracce sono indicate come

$$(52) \quad K(t) = \text{Tr}(K_{ij}), \quad T(t) = \text{Tr}(T_{ij}), \quad \Pi(t) = \text{Tr}(\Pi_{ij}).$$

Si noti come tutti i tensori sopra definiti siano simmetrici rispetto allo scambio di indici. Ad una data galassia si possono associare inoltre le tre grandezze scalari:

DEFINIZIONE 12 [Autogravit , energia esterna, e di interazione]. – Per la distribuzione di densit   $\varrho$  le tre quantit 

$$(53) \quad U(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} \varrho \phi d^3 \mathbf{x} = - \frac{G}{2} \int_{\mathfrak{R}^6} \frac{\varrho(\mathbf{x}; t) \varrho(\mathbf{x}'; t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}'$$

$$(54) \quad U_{\text{ext}}(t) = \int_{\mathfrak{R}^3} \varrho \phi_{\text{ext}} d^3 \mathbf{x} = -G \int_{\mathfrak{R}^6} \frac{\varrho(\mathbf{x}; t) \varrho_{\text{ext}}(\mathbf{x}'; t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}',$$

e

$$(55) \quad W(t) = - \int_{\mathfrak{R}^3} \varrho \left\langle \mathbf{x}, \frac{\partial \phi_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle d^3 \mathbf{x}.$$

sono dette autoenergia gravitazionale, energia gravitazionale esterna, ed energia di interazione.

Infine, considerando la traccia dell'equazione viriale tensoriale del secondo ordine (che non abbiamo derivato) si ottiene il fondamentale

TEOREMA 13 [Teorema del viriale in forma scalare]. – Per ogni galassia vale

$$(56) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + U + W.$$

Si noti la stretta somiglianza dell'identit  appena ricavata con l'identit  di Lagrange-Jacobi, ricavata invece a partire direttamente dalle equazioni del moto del problema degli N corpi. Si potrebbe provare che le due equazioni sono in effetti assolutamente identiche, mostrando quindi che l'approccio (continuo) non collisionale «preserva» alcune fondamentali propriet  del problema diretto degli N corpi come espresso dall'equazione (5). *Il teorema del viriale nella sua*

*forma tensoriale (che non abbiamo mostrato) si è rivelato di estrema importanza per la comprensione delle galassie: grazie ad esso è stato possibile mostrare che le galassie ellittiche non sono schiacciate dalla rotazione (come si riteneva fino alla fine degli anni '70, quando si pensava che le galassie ellittiche potessero essere descritte dalle soluzioni per masse fluide rotanti), ma dall'anisotropia del tensore di dispersione di velocità. Questo risultato è stato di notevole impatto in astrofisica, ed anche di sorpresa per i matematici: si ricordi che la teoria delle masse fluide rotanti aveva attirato l'attenzione di matematici del livello di Newton, McLaurin, Jacobi, Riemann, Poincaré!*

## **7. – Costruzione di un modello di galassia.**

Fino ad ora ci siamo occupati della descrizione di un approccio notevolmente *generale* alla comprensione della struttura e dinamica delle galassie. In realtà, è possibile impostare il problema ad un livello molto più profondo, la cui descrizione dettagliata ovviamente esula dallo scopo di questo lavoro.

Qui possiamo comunque ricordare alcuni problemi matematici che vengono sollevati da questo diverso approccio, basato sull'idea (supportata dalle osservazioni) che le galassie possano essere a tutti gli effetti considerate *sistemi non collisionali stazionari*. Una delle principali conseguenze della stazionarietà in un sistema non collisionale è il fatto che, pur non sapendo ancora risolvere l'equazione di Boltzmann nonostante la mancanza del termine di dipendenza esplicita dal tempo, si possono fare delle affermazioni di tipo fisico-matematico estremamente potenti, che hanno un notevole impatto sulla nostra comprensione della struttura e dinamica delle galassie. Forse la più importante di tali considerazioni è rappresentata dal teorema di Jeans, che presenteremo soltanto nelle sue linee qualitative. Iniziamo dando la seguente definizione formale di

**DEFINIZIONE 13** [Sistema stazionario non collisionale]. – *Un sistema non collisionale con funzione di distribuzione  $f$  si dice sta-*

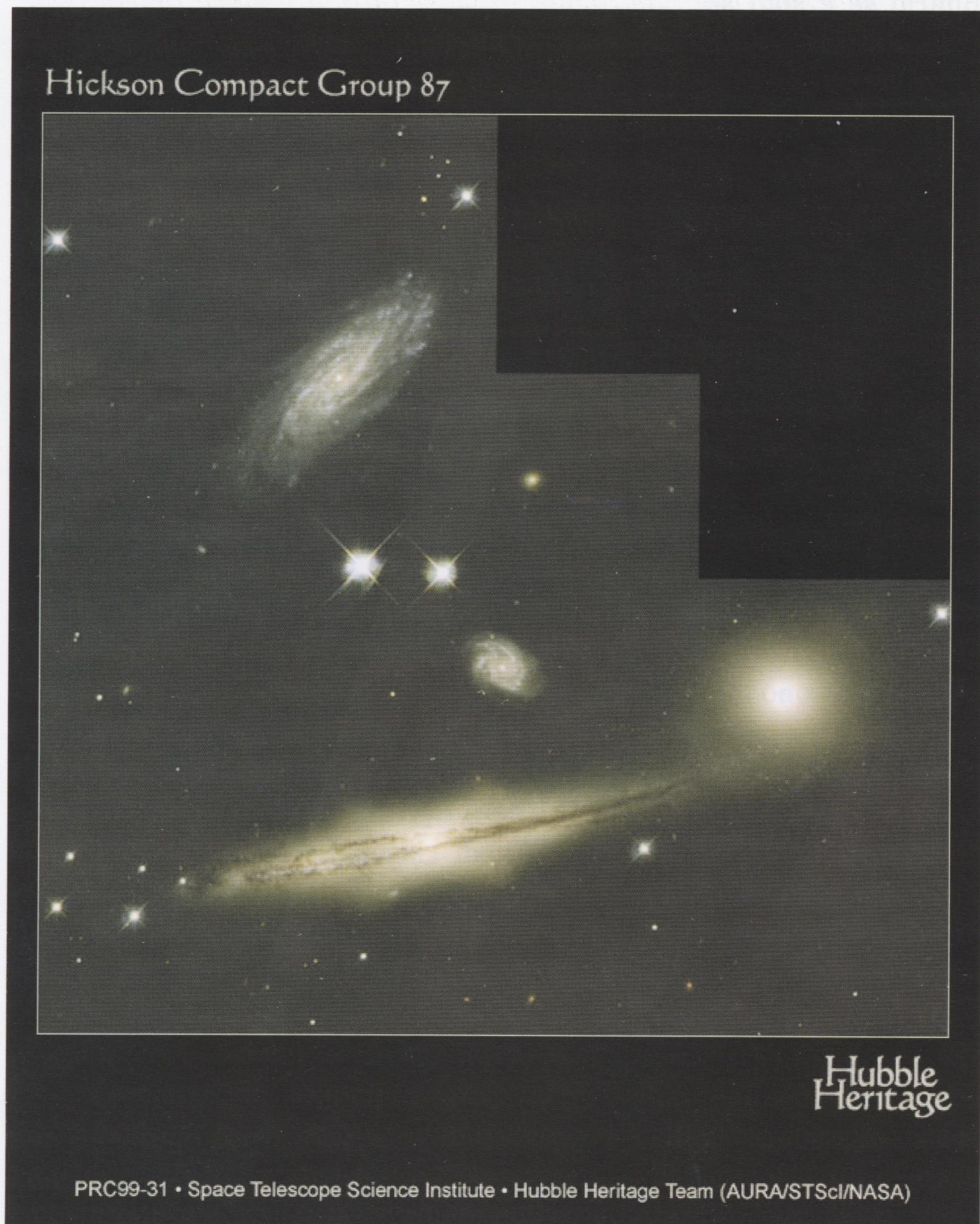


Fig. 7. – Il gruppo compatto di galassie Hickson 87. I vari tipi morfologici di galassie sono visibili in maniera evidente. Le due stelle brillanti appartengono alla nostra galassia, e compaiono nell'immagine soltanto per effetto prospettico, essendo enormemente più vicine a noi che le galassie dell'immagine.

zionario *se e solo se*

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \forall t \text{ i.e.} \\ \left\langle \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_{\text{T}}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0. \end{cases}$$

Il teorema di Jeans afferma che in ogni sistema stazionario la funzione di distribuzione, pur se ignota, dipende dalle coordinate dello spazio delle fasi soltanto attraverso gli *integrali del moto* associati al potenziale totale  $\phi_{\text{T}}$ . Ciò è formalizzato nel seguente:

TEOREMA 14 [Jeans]. – *Sia  $f$  la funzione di distribuzione di un sistema stazionario non collisionale. Allora  $f$  dipende dalle coordinate dello spazio delle fasi soltanto attraverso gli integrali regolari del moto  $I_i$  permessi da  $\phi_{\text{T}}$ , ovvero*

$$(58) \quad f = f(I_1, I_2, \dots).$$

Ma cosa sono gli integrali del moto? Si tratta forse del più importante concetto associato alla soluzione delle equazioni differenziali ordinarie. Da un punto di vista *fisico* possiamo qui dire soltanto che si tratta di «leggi di conservazione», ovvero, di quantità dinamiche che si «conservano» lungo l'orbita di ciascuna stella nel suo moto sotto l'azione del potenziale  $\phi_{\text{T}}$ . Da un punto di vista *matematico* il problema è estremamente profondo ed affascinante: data un'equazione differenziale ordinaria, esistono metodi per determinare quante e quali «leggi di conservazione» sono ad essa associate? La letteratura attorno a questo problema è realmente immensa, con contributi fondamentali dati tra gli altri da Jacobi, Hamilton, Liouville, Lie, Poincaré, e, in tempi più recenti da Vladimir Arnold. Per quanto riguarda la risposta generale a questo problema purtroppo dobbiamo dire che attualmente la matematica è ben lontana dall'averne una risposta completa (costruttiva) a questo problema, e molti risultati di utilizzo astrofisico sono ottenuti grazie a simulazioni numeriche. In alcuni casi particolari è comunque possibile rispondere, poiché è noto che ad ogni *simmetria* (più o meno evidente) associata a  $\phi_{\text{T}}$  corrisponde un integrale del moto (E. Noether). Fortunatamente le ga-

lassie sono caratterizzate da una considerevole simmetria, ed è quindi naturale aspettarsi che sia possibile identificare, se non tutti, almeno qualche integrale del moto. Ad esempio, in sistemi stazionari di forma qualunque l'energia totale di ogni stella è uno di tali integrali, in galassie sferiche anche le tre componenti del momento angolare di ogni stella lo sono, mentre in sistemi caratterizzati da simmetria cilindrica (come ad esempio molte galassie ellittiche e le galassie a disco) soltanto la componente del momento angolare lungo l'asse di simmetria lo è.

Il fatto di poter far dipendere la funzione di distribuzione da alcune quantità note (gli integrali del moto), permette di impostare, (e nei casi più fortunati, risolvere), l'equazione fondamentale della dinamica stellare non collisionale, ovvero l'equazione di *autoconsistenza*:

DEFINIZIONE 14 [Sistema non collisionale autoconsistente a più componenti]. – Per  $k = 1, \dots, n$  siano  $f_k = f_k(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$  funzioni regolari. La funzione

$$(59) \quad f = \sum_{k=1}^n f_k$$

si dice essere la funzione di distribuzione di un sistema non collisionale autoconsistente a più componenti se e solo se per  $i = 1, \dots, n$  e  $\forall(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) \in \Gamma \times \mathfrak{R}$

$$(60) \quad \frac{\partial f_k}{\partial t} + \left\langle \mathbf{v}, \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_T}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0,$$

$$(61) \quad f_k \geq 0,$$

$$(62) \quad \Delta \phi_T = 4\pi G \varrho_T,$$

dove

$$(63) \quad \varrho_T = \sum_{k=1}^n \varrho_k = \sum_{k=1}^n \int_{\mathfrak{R}^3} f_k d^3 \mathbf{v}.$$

In altre parole, attraverso le equazioni (59)-(63) il problema della costruzione di un modello «realistico» di galassia è ricondotto alla soluzione di un problema alle derivate parziali ellittico e non lineare.

Grazie al teorema di Jeans, nel caso stazionario l'equazione (59) è risolta automaticamente quando si faccia dipendere la  $f$  da alcuni (o tutti) gli integrali del moto ammessi dalle simmetrie di  $\phi_T$ , e quindi il problema si «riduce» alla soluzione delle due equazioni (62) e (63): si noti inoltre la richiesta *non banale* di positività per le  $f_k$  espressa dalla (61)! Ovviamente, dobbiamo chiudere qui questa discussione, non senza però aver prima ricordato che questo approccio ha permesso una comprensione realmente soddisfacente ad esempio delle galassie ellittiche, ottenuta dalla scuola pisana (si veda ad esempio il Capitolo 22 in [1]).

## 8. – Conclusioni.

Nel presente lavoro sono stati presentati in maniera intuitiva, ma essenzialmente corretta, alcuni dei problemi e delle tecniche matematiche più importanti originati dallo studio della dinamica stellare, come strumento per la comprensione della struttura e della dinamica delle galassie. Moltissimi altri problemi sarebbero certamente degni di nota (uno fra tutti, la questione di come si possano ricavare informazioni strutturali e dinamiche da oggetti che, come le galassie, possiamo soltanto osservare *proiettati* nel piano del cielo, ovvero, di cui possediamo soltanto una immagine *bidimensionale*), ma la speranza è che il lettore interessato al tipo di problemi che qui sono stati soltanto accennati, sia rimasto incuriosito e la sua curiosità stimolata ulteriormente: per tale lettore diamo una lista di libri di approfondimento nella Bibliografia.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] G. BERTIN, *Dynamics of galaxies* (Cambridge University Press), 2000.
- [2] G. BERTIN - C. C. LIN, *Spiral structure in galaxies: a density wave theory* (MIT University Press), 1996.
- [3] J. BINNEY - S. TREMAINE, *Galactic dynamics* (Princeton University Press), 1987.
- [4] J. BINNEY - M. MERRIFIELD, *Galactic astronomy* (Princeton University Press), 1998.

- [5] S. CHANDRASEKHAR, *Principles of stellar dynamics* (Dover), 1960.
- [6] L. CIOTTI, *Dynamical models in astrophysics* (Lecture Notes, Scuola Normale Superiore), 2001.
- [7] D. BOCCALETTI - G. PUCACCO, *Theory of orbits. 1: Integrable systems and non-perturbative methods* (Springer), 1996.
- [8] A. WINTNER, *The analytical foundations of celestial mechanics* (Princeton University Press), 1947.
- [9] L. SPITZER, *Dynamical evolution of globular clusters* (Princeton University Press), 1987.

Luca Ciotti, Osservatorio Astronomico di Bologna  
via Ranzani 1, I-40127 Bologna, Italy; e-mail: ciotti@bo.astro.it  
Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, I-56126 Pisa, Italy