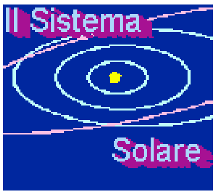
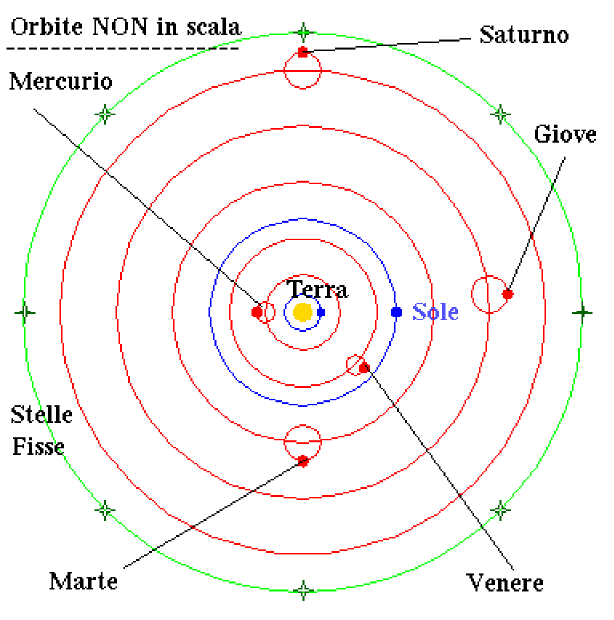
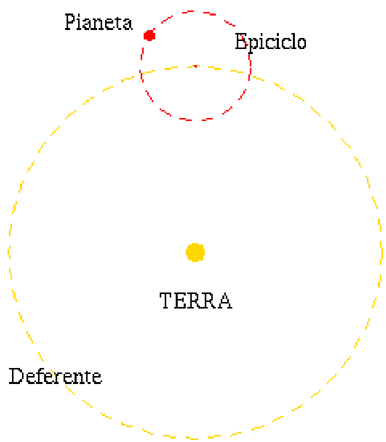
Sezione	Il Sistema Solare	Testo Parte III
Argomenti trattati 	• Rappresentazione geometrica del sistema geocentrico o tolemaico • Rappresentazione geometrica del sistema eliocentrico o copernicano	• Velocità areolare • Leggi di Keplero (approfondimento) • Derivazione delle leggi di Keplero • Elementi orbitali di un pianeta • Leggi di Keplero • Legge di Newton

Rappresentazione geometrica del sistema geocentrico o tolemaico

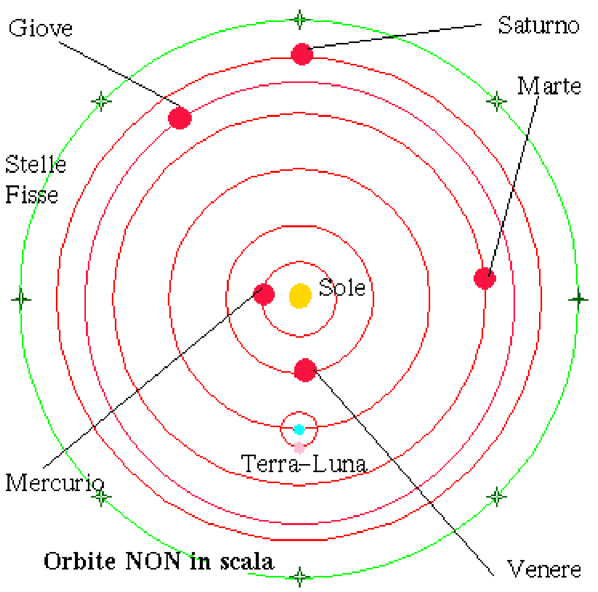
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>La Terra è immobile al centro dell'Universo. Ogni oggetto celeste è solidale ad una sfera che ruota con moto uniforme attorno alla Terra.</td>
</tr>
<tr>
<td>Le stelle fisse sono incastonate alla sfera celeste (o sfera delle stelle fisse) e ruotano con essa (cerchio verde).</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>I pianeti appaiono muoversi in modo irregolare: cambiano velocità, si fermano, tornano indietro rispetto al moto precedente; Mercurio e Venere non si osservano mai oltre una certa altezza sull'orizzonte.
La riproduzione di queste irregolarità avviene tramite gli epicicli, orbite circolari su cui il pianeta si muove di moto uniforme. Il centro dell'epiciclo si muove a sua volta, sempre di moto uniforme, su un'orbita circolare detta deferente (cerchi rossi).</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Nella figura sopra i pianeti sono rappresentati in ordine di distanza dalla Terra: Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno. Ai tempi di Tolomeo le distanze dalla Terra non erano note, ma il fatto che un pianeta fosse più distante di un altro veniva dedotto dalla differenza tra i periodi di rivoluzione (si noti che la 3^a legge di Keplero sarebbe stata scoperta circa 15 secoli più tardi).</td>
<td>Il Sole (S) e la Luna, considerati pianeti come tutti gli altri, non richiedono epicicli perché il loro moto non mostra stazionamenti e retrogradazioni come gli altri corpi celesti. (cerchi blu).</td>
</tr>
</table>



Ogni nuova particolarità del moto viene riprodotta aggiungendo uno o più epicicli a quelli già esistenti (fino a 33). È anche possibile che il pianeta ruoti sull'epiciclo nello stesso verso in cui il centro dell'epiciclo ruota sul deferente (*epiciclo maggiore*) o in verso opposto (*epiciclo minore*).

Questo modello è un completamento e un'estensione del sistema del mondo di *Ipparco* ed è dovuto a **Claudio Tolomeo** (Alessandria II sec d.C.) che lo descrisse nell'opera che noi conosciamo, tramandata dagli Arabi, con il nome di *Almagesto*.

Rappresentazione geometrica del sistema eliocentrico o copernicano

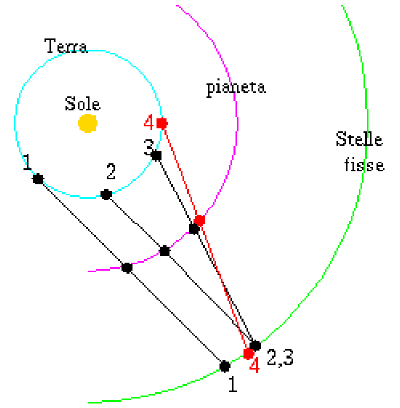


Rispetto al sistema tolemaico, si scambiano le posizioni della Terra e del Sole. Quest'ultimo è al centro e la Terra diventa uno dei pianeti; la **Luna** le ruota attorno come suo satellite. Il moto continua ad essere circolare uniforme.

La Terra ruota non solo attorno al Sole (*moto di rivoluzione*), ma anche attorno al proprio asse (*moto di rotazione*). La rotazione rende inutile il moto della *sfera delle stelle fisse*, che è quindi immobile.

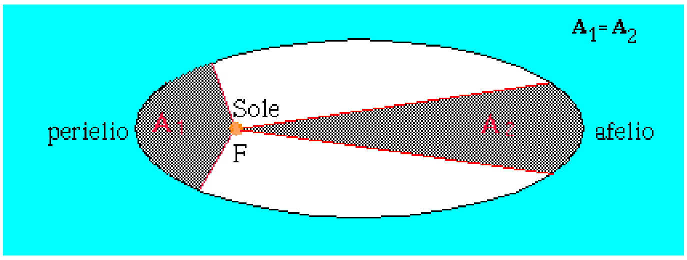
L'importanza del sistema copernicano consiste nel considerare *apparenti* le anomalie del moto dei pianeti, dovute al loro moto combinato con quello della Terra (*nella figura*

Il moto reale dei corpi celesti potrebbe allora svolgersi su orbite circolari (i deferenti di Tolomeo) senza bisogno di introdurre gli epicicli.

in basso i punti 2,3 rappresentano uno stazionamento e il punto 4, in rosso, una retrogradazione).	
	In realtà le orbite non sono circolari e i moti non sono uniformi per cui Copernico sarà costretto ad usare epicicli ed eccentrici (anche in combinazione tra loro) per rendere conto del moto dei pianeti. In alcuni casi (*es. il sistema Sole-Terra*) la costruzione copernicana è più complessa di quella tolemaica.
Questa complicazione verrà superata da Keplero, alcune decine di anni dopo Copernico, con l'introduzione di **orbite ellittiche** e la costanza della velocità areolare. Il sistema eliocentrico fu descritto da Copernico (1473-1543) nel *De Revolutionibus Orbium Coelestium (1543).*	

Velocità areolare

Dalla **2.a legge di Keplero**: le aree descritte dal raggio vettore che congiunge il Sole al pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerne l'arco corrispondente**,**



si ha che, se le aree "spazzate" dal raggio vettore (A_1 e A_2 in figura) sono uguali, vengono percorse in tempi uguali.
il rapporto tra area coperta dal raggio vettore e tempo necessario a coprirla viene detto **velocità areolare**.

Leggi di Keplero

(Approfondimento)

Si riporta un esempio applicativo che illustra la relazione esistente tra il semiasse maggiore dell'orbita e la velocità tangenziale di un pianeta.
Si misurino i periodi di rivoluzione dei pianeti in anni e si assuma l'Unità Astronomica come unità di lunghezza.
La 3^a legge, applicata a due pianeti (diciamo 1 e 2), dà:

$$P_1^2/P_2^2 = a_1^3/a_2^3$$

Se il secondo pianeta è la Terra, $\mathbf{P_2=1}$ e $\mathbf{a_2=1}$, e quindi :

$$P_1^2 = a_1^3$$

cioè:

$$a_1=(P_1^2)^{1/3}$$

Giove ha **P=11.86 anni** e quindi il semiasse maggiore della sua orbita è :

$$a_{giove}=(11.86^2)^{1/3}=5.2\ \text{U.A}$$

Nell'ipotesi, semplificata, che le orbite siano circolari, è possibile calcolare le velocità medie. Le velocità areolari dei pianeti 1 e 2 sono

$$v_1=2\pi a_1 / P_1$$

$$v_2=2\pi a_2 / P_2$$

e cioè:

$$v_1 / v_2 = a_1 P_2 / a_2 P_1$$

Dalla 3.a legge si ha:

$$P_2 / P_1 = (a_2 / a_1)^{1/3}$$

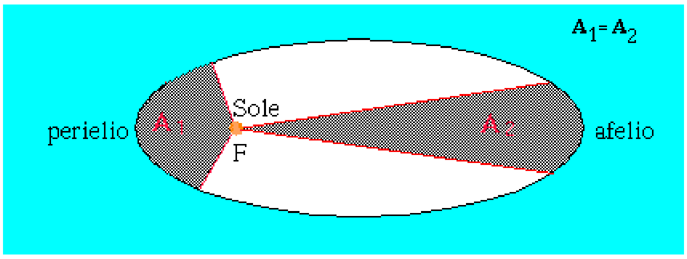
e quindi

$$v_1 / v_2 = (a_1 / a_2)^{1/2}$$

Se prendiamo come riferimento la Terra, $\mathbf{a_2=1}$ **e** $\mathbf{v_2=1}$. Allora

$$v_1 = (1/ a_1)^{1/2}$$

Questa velocità è espressa come frazione della velocità della Terra *(29.8 km/s)*. Tanto maggiore è la distanza del pianeta dal Sole, tanto minore è la sua velocità tangenziale media.



Derivazione delle leggi di Keplero

Derivazione della legge di Newton
Consideriamo per semplicità il caso di moti circolari. Ogni pianeta, proprio a causa del moto di rivoluzione, è soggetto ad una accelerazione centripeta *c*

$$c = v^2/d = 4\,p^2\,d/P^2$$

con *v* velocità tangenziale, *d* raggio dell'orbita e *P* periodo di rivoluzione.

Se consideriamo due pianeti (1 e 2), il rapporto tra le loro accelerazioni è:

$$c_1/c_2 = d_1/d_2 \cdot (P_2/P_1)^2.$$

La 3^a legge di Keplero stabilisce che:

$$(P_2/P_1)^2 = (d_2/d_1)^3$$

per cui

$$c_1/c_2 = (d_2/d_1)^2.$$

Quindi le accelerazioni centripete sono inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze.

Il **secondo principio della dinamica** afferma che ad ogni accelerazione corrisponde una forza ad essa proporzionale; quindi il Sole deve esercitare sui pianeti una forza proporzionale all'inverso del quadrato della distanza:

$$F = G/d^2,$$

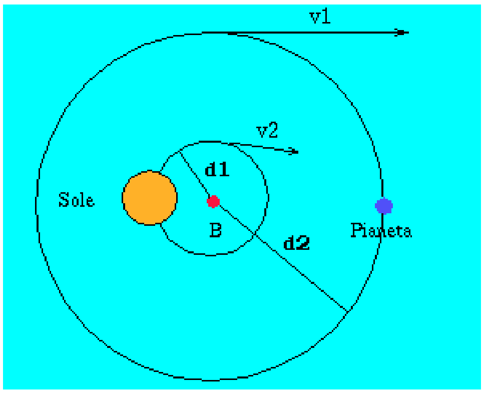
con *G* costante di proporzionalità.

Newton suppose che la forza dovesse dipendere dalle masse dei corpi ed enunciò la legge di gravitazione come:

$$F = G(m_1 m_2)/d^2,$$

G essendo nota come *costante di gravitazione*. Il valore di G fu trovato da Cavendish, nel '700, con un'esperienza divenuta classica.

Espressione esatta della 3 ^{a} legge di Keplero



Dalla legge di Newton si può ricavare la 3^a legge di Keplero:

Siano $\mathbf{d_1}$ la massa di un pianeta e $\mathbf{d_2}$ quella del Sole.

I due corpi formano un sistema che ha il baricentro in B, (vedi figura a lato) e siano $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ le distanze del pianeta e del Sole da B; $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ siano le loro velocità di rivoluzione attorno al baricentro.

Se le orbite sono circolari e **P** è il periodo di rivoluzione attorno al baricentro, comune ai due corpi, si ha :

$$\mathbf{v_1 = 2\pi\ d_1 / P}$$

$$\mathbf{v_2 = 2\pi\ d_2 / P}$$

Per entrambi gli oggetti la forza centripeta coincide con quella di gravità:

$$\mathbf{m_1 v_1^{\ 2} / d_1 = m_2\ v_2^{\ 2} / d_2 = G\ (m_1 m_2 / d^2)}$$

e si ottiene, utilizzando le espressioni precedenti,

$$\mathbf{d_1 = (G\ m_2 / 4\ \pi^2 d^2)\ P^2}$$

$$\mathbf{d_2 = (G\ m_1 / 4\ \pi^2 d^2)\ P^2}$$

da cui :

$$\mathbf{d = d_1 + d_2 = (G\ m_2 / 4\ \pi^2 d^2)\ P^2\ (m_1 + m_2)}$$

cioè:

$$d^3/P^2 = G\,(m_1 + m_2)/\,4\,\pi^2 \quad (1)$$

Che è l'espressione corretta della 3ª legge di Keplero. Questa formula, calcolata con l'assunzione di orbite circolari, è valida anche in caso di orbite ellittiche.

La massa $\mathbf{m_2}$ del Sole è molto più grande della massa di ognuno dei pianeti, per cui il secondo membro della (1) è costante per tutti corpi del Sistema Solare. Inoltre, la distanza **d** coincide in pratica con la distanza pianeta - Sole.

Dalla (1), noti i valori di **d** e **P** e trascurando $\mathbf{m_1}$**,** la massa $\mathbf{m_2}$ del corpo centrale di un qualsiasi sistema può essere calcolata facilmente. È possibile, ad esempio, calcolare la massa del Sole noti i parametri della Terra o la massa di un pianeta, noti i parametri dei suoi satelliti.

La determinazione della massa di pianeti sprovvisti di satelliti è difficile: occorre analizzare le perturbazioni indotte sul pianeta dai pianeti vicini. L'uso dei satelliti artificiali si è rivelato molto proficuo per il calcolo della massa: infatti si comportano come satelliti naturali e i parametri delle loro orbite sono noti con precisione.

Elementi orbitali di un pianeta

Vediamo in maggiore dettaglio gli elementi che permettono di definire l'orbita di un pianeta:

1. definizione del piano dell'orbita
2. orientazione dell'orbita
3. forma dell'orbita
4. elementi meccanici del moto

Le orbite sono descritte rispetto ad un piano di riferimento.

- Per i pianeti questo è il piano dell'orbita terreste (l'eclittica); per i satelliti è il piano che contiene l'equatore dei rispettivi pianeti.
- I due punti in cui l'orbita interseca il piano di riferimento sono detti **nodi**. Il **nodo ascendente** è definito dal passaggio da posizioni al di sotto del piano di riferimento (negative) a posizioni al di sopra del piano di riferimento (positive). Il **nodo discendente** è definito, al contrario, come il punto di passaggio da posizioni positive a posizioni negative. La linea che congiunge i nodi è detta **linea dei nodi**.
- Per definire l'orbita, si fissa prima di tutto l'angolo *i* tra il piano dell'orbita e il piano di riferimento. Questo angolo è l'**inclinazione**. Poi si fissa l'angolo *O*, detto **longitudine del nodo**, contato dal *punto gamma* al nodo ascendente.

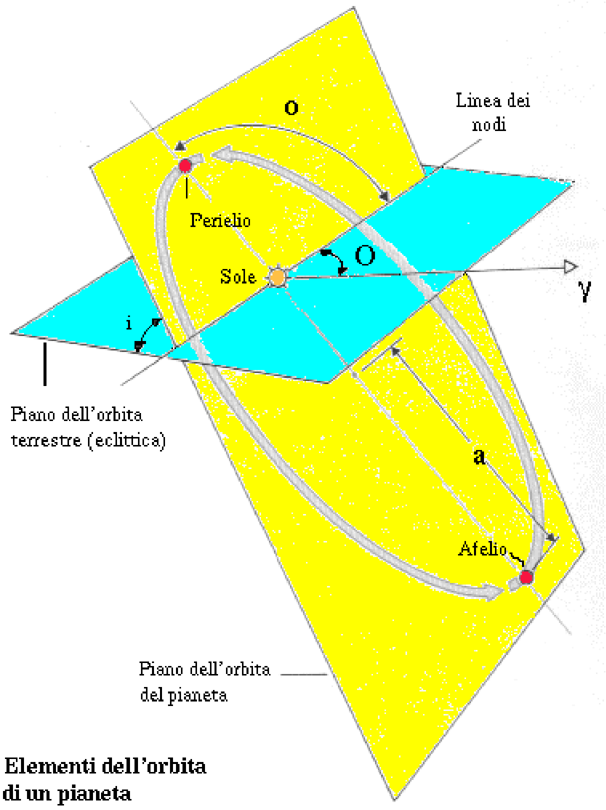
Iperastro- **Il Sistema Solare-Parte III**

Per orientare l'orbita sul piano è sufficiente individuare la direzione del suo asse maggiore **oppure** fissare la direzione del perielio *P*, cioè l'angolo *o*, detto anche **distanza angolare tra perielio e nodo**.

Determinare la forma dell'orbita vuol dire fissare la lunghezza del suo *semiasse maggiore a* e l'*eccentricità e*.

In definitiva, quindi, i 6 **elementi orbitali**, necessari a definire un'orbita, sono:

1. il semiasse maggiore *a*
2. l'eccentricità *e*
3. l'inclinazione *i*
4. la longitudine del nodo ascendente *O*
5. la distanza angolare tra perielio e nodo *o*
6. l'istante *T* del passaggio al perielio



Elementi dell'orbita di un pianeta

Per individuare un'orbita sono necessarie almeno **3 osservazioni** che fissino 3 coppie di valori (3 coordinate nel sistema eclitticale). Con questi dati è possibile trovare i sei elementi orbitali, incogniti. La soluzione di questo problema è molto complicata e non viene qui nemmeno accennata.

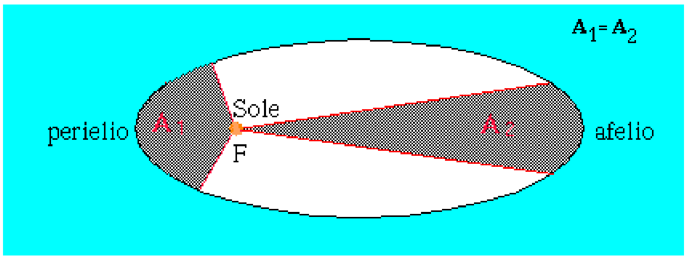
Leggi di Keplero

Keplero, sicuro della precisione delle osservazioni di Marte ottenute da Tycho Brahe, fu in grado, all'inizio del 17mo secolo, di calcolare prima l'orbita della Terra e poi quella di Marte. L'analisi dei risultati gli permise di enunciare le tre leggi fondamentali che regolano il moto dei pianeti:

1^{a} - I pianeti descrivono attorno al Sole orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi (1609).

- Le orbite descritte dai pianeti del Sistema Solare sono ellissi di piccola eccentricità, in prima approssimazione assimilabili a cerchi.

2^{a} - Le aree descritte dal raggio vettore che congiunge il Sole al pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrere l'arco corrispondente (1618).



- Se le aree "spazzate" dal raggio vettore (A_1 e A_2 in figura) sono uguali, vengono percorse in tempi uguali. Il rapporto tra area coperta dal raggio vettore e tempo necessario a coprirla viene detto velocità areolare.

3^{a} - I quadrati dei periodi P di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite (1618).

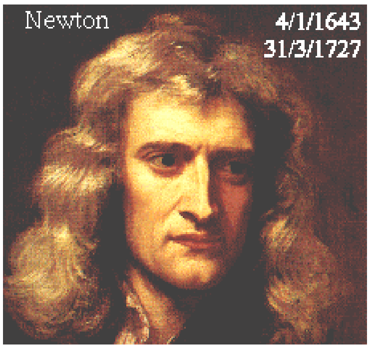
$$P^2 = k\,a^3$$

- Essendo *k* la costante di proporzionalità. Questa formulazione della 3^{a} legge non è del tutto esatta, ma è un'ottima approssimazione nel caso dei pianeti.

Conseguenze:

- la 3^{a} legge permette di disegnare esattamente la pianta del Sistema Solare. Prendendo come unità di misura l' Unità Astronomica, cioè la distanza media media Terra-Sole (U.A. = 149,6 *milioni di chilometri*), la costante K diventa uguale a 1.

Noto il periodo di rivoluzione P si può conoscere il semiasse maggiore dell'orbita e quindi disegnare in scala il Sistema Solare.



Legge di Newton

Newton, nello studio dei problemi dinamici connessi con i moti planetari, trovò quella che oggi è nota con il nome di **legge di gravitazione universale**:

Due corpi si attraggono con una forza che è direttamente proporzionale alle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza .

$$F = G\,(m_1 m_2)/d^2$$

essendo $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/Kg^2$ la costante di gravitazione, m_1 e m_2 le masse dei corpi e **d** la loro mutua distanza.